بسم الله الرحمن الرحیم

جبرهای اندازه و کاربردها

دوفصلنامهٔ علمی دانشگاه قم

سال اول، شماره اول، پاییز و زمستان ۱۴۰۲، شماره پیاپی ۱

صاحب امتیاز: دانشگاه قم

مدیرمسئول: دکتر علیرضا باقری ثالث

سردبیر: دکتر مرتضی میرزائی ازندریانی

- در این دوفصلنامه، مقالاتی انتشار می‌یابند که مرتبط با آنالیز ریاضی و به‌ویژه در ارتباط با فضاهای اندازه باشند (فارسی همراه با چکیدهٔ مبسوط انگلیسی).
- مسئولیت مطالب هر مقاله بر عهدهٔ نویسنده است.
- نقل مطالب دوفصلنامه با ذکر منبع مانعی ندارد.
- دوفصلنامه در ویرایش، اختصار و اصلاح مقاله‌ها آزاد است.

نشانی: قم، بلوار الغدیر، دانشگاه قم، ساختمان مرکزی، دفتر دوفصلنامهٔ جبرهای اندازه و کاربردها.

کد پستی: ۳۷۱۶۱۴۶۶۱۱، تلفن: ۰۲۵-۳۲۱۰۳۳۶۰

Website: maa.qom.ac.ir * Email: maa@qom.ac.ir

راهنمای نگارش مقاله

۱. مقاله باید پیش‌از این منتشر نشده باشد و نباید هم‌زمان به مجلهٔ دیگری ارسال شده باشد.

۲. پذیرش اولیهٔ مقاله منوط به نگارش مقاله در فایل نمونهٔ قرارگرفته در وبگاه مجله (قسمت راهنمای نویسندگان) و باتوجه‌به توضیحات ذکرشده در آن است. در ضمن، فایل LaTeX مقاله باید بدون خطا اجرا شود و هر دو فایل LaTeX و PDF مقاله، توسط نویسندهٔ محترم از طریق سامانهٔ مجله ارسال شوند.

۳. حداقل دو صفحهٔ اول مقاله باید به زبان انگلیسی نوشته شوند (چکیده و چکیدهٔ مبسوط انگلیسی).

۴. منابع مقاله باید مطابق استانداردهای مجله (که در فایل نمونه ذکر شده است) باشند.

۵. دوفصلنامه در رد یا قبول، ویرایش، اختصار و اصلاح مقاله‌ها آزاد است.

۶. درصورتی‌که مقاله بیش از یک نویسنده داشته باشد، محتوای مقاله باید مورد تأیید همهٔ نویسندگان باشد.

۷. نقل و اقتباس از مقاله‌های مجله با ذکر منبع آزاد است.

۸. در صورت استفاده از دستاوردهای پژوهشی دیگران یا بخشی از پژوهش‌های خود، ذکر منبع الزامی است.

سخن سردبیر

با لطف و عنایت پروردگار بلندمرتبه، اولین شماره از دوفصلنامهٔ "جبرهای اندازه و کاربردها" با دوازده مقاله منتشر شد. تمام مقالات برای داوران متخصص در موضوع ارسال شدند و به دلیل دقت نظر و سرعت تحسین‌برانگیز داوران محترم، مرحلهٔ داوری هر یک از مقالات در کمتر از سه ماه به پایان رسید.

باتوجه‌به اهداف و چشم‌انداز این دوفصلنامه، مقالات منتشرشده مرتبط با آنالیز ریاضی و کاربردهای آن هستند لذا، به‌طور طبیعی، بیشتر مقالات توسط پژوهشگران گرایش آنالیز ریاضی ارسال شده‌اند؛ اما نکتهٔ جالب‌توجه، چاپ چند مقاله توسط محققانی است که شاخهٔ اصلی تحقیقاتی آنها جبر، دستگاه‌های دینامیکی و آمار است و این نشان‌دهندهٔ جذابیت فراوان و کاربردهای وسیع آنالیز ریاضی است. امید است مقالات این مجله مورد استفادهٔ علاقه‌مندان به این حوزهٔ تحقیقاتی قرار بگیرند.

در پایان، از تمام عزیزانی که در مراحل مختلف انتشار این شماره به اینجانب یاری رساندند، به‌ویژه دوست و همکار گرامی جناب آقای دکتر سید علی موسوی، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

مرتضی میرزائی ازندریانی

جبرهای اندازه و کاربردها

فهرست مقالات

Measure Algebras and Applications

Relative commutativity degree for some topological groups

Seyyed Ali Moosavi[1]

1. Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran. Email: s.a.mousavi@qom.ac.ir

Article Info	ABSTRACT

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 4 April 2023
Received in revised form:
18 May 2023
Accepted: 22 May 2023
Published Online:
30 September 2023

Keywords:
Commutativity degree,
Relative commutativity degree,
Topological group,
Compact group,
Closed subgroup

2020 Mathematics Subject Classification:
20P05, 20D60, 28A60

Assume that G is a compact Hausdorff topological group and H is a closed subgroup of G. In this paper, we will define the notion of relative commutativity degree for the subgroup H, which will be a generalization of the concept of relative commutativity degree in the case of finite groups. Then we will prove some properties of relative commutativity degree, that hold for finite groups, for these groups. In particular, we will derive an upper bound for the relative commutativity degree and state and prove a structural theorem for groups that have this upper bound. Additionally, we will provide some examples of compact infinite groups for which the mentioned bounds hold.

Cite this article: Moosavi, S.A. (2023). Relative commutativity degree for some topological groups. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 1–12. http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9447.1004

Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/MAA.2023.9447.1004

Extended Abstract

Introduction

Let G be a locally compact topological group, then by [6], there exists a Haar measure μ on the Borel σ-algebra. Suppose that H is a closed subgroup with non-zero measure, i.e., $\mu(H) \neq 0$. Define the measure μ_H on Borel subsets by

$$\mu_H(D) := \frac{\mu(D \cap H)}{\mu(H)}.$$

In this paper, we define the relative commutativity degree of subgroup H as follows:

$$\mathrm{Pr}(H, G) := \mu_H \times \mu(C) = \int_{G\times G} \chi_c(x, y) d\mu_H(y) d\mu(x),$$

where $C = \{(x, y) \in G \times G \mid xy = yx\}$ and μ is the normalized Haar measure on G. We will show that

$$\mathrm{Pr}(H, G) = \frac{1}{\mu(H)} \int_G \mu(C_H(y)) d\mu(y) = \frac{1}{\mu(H)} \int_H \mu(C_G(x)) d\mu(x).$$

Using the above result, we will prove that

$$\mathrm{Pr}(G) \leq \mathrm{Pr}(H, G) \leq \mathrm{Pr}(H),$$

and if H is a non-normal subgroup, then both of the above inequalities are strict. Also we will state some necessary and sufficient conditions such that the equality holds in the above inequalities.

In Section 4, we will find upper bounds for the relative commutativity degree of a subgroup. In fact, it will be shown that

$$\mathrm{Pr}(H, G) \leq \frac{\mu(H) + \mu(Z \cap H)}{2\mu(H)}.$$

We will show that $\mathrm{Pr}(H, G) \leq \frac{3}{4}$ and if H is non-abelian, then $\mathrm{Pr}(H, G) \leq \frac{5}{8}$ and we will provide some examples of groups for which these upper bounds occur.

Finally, we state a theorem about the groups that reach these upper bounds, in particular, we will show that if $\mathrm{Pr}(H, G) = \frac{3}{4}$, then

$$\frac{H}{Z(G) \cap H} \cong \mathbb{Z}_2$$

and if $\mathrm{Pr}(H, G) = \frac{5}{8}$ and H is non-abelian, then

$$\frac{H}{Z(G) \cap H} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Conclusion

In this article, we defined the notion of relative permutation degree for a subgroup in a compact topological group and examined some properties of this concept for these groups. We observed that the properties that hold for finite groups also hold for compact topological groups. In fact, since finite groups have the discrete topology, the definition in the finite case can be considered as a special case of the above definition for compact topological groups, and the results obtained for finite groups can be seen as a special case of the results obtained for compact groups.

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۱۲-۱

درجه جابه‌جایی نسبی برای برخی از گروه‌های توپولوژیک

سید علی موسوی [۱]

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: s.a.mousavi@qom.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱/۱۵
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۲/۲۸
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۳/۱
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
درجهٔ جابه‌جایی،
درجهٔ جابه‌جایی نسبی،
گروه توپولوژیک،
گروه فشرده،
زیرگروه بسته

رده‌بندی ریاضی:
20P05, 20D60, 28A60

چکیده

فرض کنید G یک گروه توپولوژیک فشرده، هاسدورف و H زیرگروهی بسته از G باشد. در این مقاله، به تعریف درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه H خواهیم پرداخت که تعمیمی از مفهوم درجهٔ جابه‌جایی نسبی در حالت گروه‌های متناهی خواهد بود. در ادامه، برخی از ویژگی‌های درجهٔ جابه‌جایی نسبی که برای گروه‌های متناهی برقرار هستند را برای این گروه‌ها ثابت خواهیم کرد. به‌ویژه، کران بالایی برای درجهٔ جابه‌جایی نسبی به دست خواهیم آورد و یک قضیهٔ ساختاری در مورد گروه‌هایی که این کران بالا را دارند بیان و اثبات خواهیم کرد. همچنین مثال‌هایی از گروه‌های فشردهٔ نامتناهی که کران‌های ذکرشده برای آنها برقرار هستند را ارائه خواهیم کرد.

استناد: موسوی، سید علی. (۱۴۰۲). درجه جابه‌جایی نسبی برای برخی از گروه‌های توپولوژیک. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۱۲-۱.
http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9447.1004

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

فرض کنید G یک گروه متناهی و H زیرگروهی از G باشد. درجهٔ جابه‌جایی گروه G با نماد $\Pr(G)$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Pr(G) = \frac{|C|}{|G|^{۲}},$$

که در آن

$$C = \{(x, y) \in G \times G \mid xy = yx\}. \qquad (۱.۱)$$

درجهٔ جابه‌جایی درحقیقت نشان‌دهندهٔ احتمال جابه‌جاشدن دو عضو از G است که به‌صورت تصادفی انتخاب شده باشند. درجهٔ جابه‌جایی برای اولین بار در [۲] مطرح شده است و کارهای بسیار زیادی در این زمینه توسط محققان انجام شده است. در [۳] نویسندگان مفهوم درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه را به‌عنوان تعمیمی از مفهوم درجهٔ جابه‌جایی مطرح کردند که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Pr(H, G) = \frac{|\{(x, y) \in H \times G \mid xy = yx\}|}{|H||G|}.$$

درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه نیز توسط بسیاری از محققان مورد بررسی قرار گرفته است که برای نمونه می‌توان به [۳، ۵، ۸] مراجعه کرد. یک سؤال که به‌طور طبیعی به ذهن می‌رسد این است که آیا می‌توان مفاهیم فوق را برای گروه‌های نامتناهی هم مطرح کرد به‌گونه‌ای که این مفاهیم در حالت متناهی با تعاریف فوق مطابقت داشته باشند؟ در پاسخ به این سؤال، اولین بار گوستافسون در [۵] درجهٔ جابه‌جایی را در حالت کلی‌تر برای یک گروه توپولوژیک فشرده تعریف کرد و با استفاده از آن چند خاصیت مشابه حالت متناهی را برای این گروه‌ها ثابت کرد. در سال ۲۰۰۸ عرفانیان و روسو در [۴] و در سال ۲۰۱۱ رضایی و روسو در [۹] به روشی مشابه، این موضوعات را مورد بررسی قرار داده و برخی احکام مشابه حالت متناهی را ثابت کردند.

در این مقاله، مفهوم درجهٔ جابه‌جایی نسبی را برای گروه‌های توپولوژیک فشرده تعریف خواهیم کرد و ویژگی‌های آن را مورد بررسی قرار خواهیم داد. همان‌طور که خواهیم دید این تعریف و خاصیت‌های مورد توجه، مشابه حالت متناهی به دست خواهند آمد. به‌ویژه خواهیم دید که چون هر گروه متناهی با توپولوژی گسسته یک گروه توپولوژیک فشرده است، نتایج فوق در حالت خاص گروه‌های متناهی با نتایج قبلی کاملاً مطابقت دارد. لازم به ذکر است که اغلب نتایج به‌دست‌آمده در این مقاله، با نتایج بیان‌شده در [۹] مشابه است؛ ولی شیوهٔ تعریف و برهان آنها در بسیاری موارد متفاوت است. همچنین در این مقاله به ارائهٔ مثال‌هایی در ارتباط با این موضوع خواهیم پرداخت که در جهت روشن‌تر شدن مفاهیم، بسیار اثرگذار خواهد بود.

۲ تعاریف و قضایای مقدماتی

در این بخش به بیان تعاریف و احکام مقدماتی خواهیم پرداخت که در بخش ۳ و ۴ مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت. مرکزساز عضو x در G را با نماد $C_G(x)$ نشان می‌دهیم. همچنین شاخص زیرگروه H در گروه G با نماد $|G : H|$ نشان داده خواهد شد.

قضیه ۱.۲ (حکم ۵.۳.۱ از [۱۰]). فرض کنید G یک گروه باشد و H و K زیرگروه‌هایی از G باشند به‌طوری‌که $K \leq H \leq G$. در این صورت داریم

$$|G : K| = |G : H||H : K|.$$

قضیه ۲.۲ (حکم ۱۱.۳.۱ از [۱۰]). فرض کنید G یک گروه باشد و H و K زیرگروه‌هایی از G باشند. در این صورت داریم

$$|G : H \cap K| \leq |G : H||G : K|,$$

و تساوی اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر $G = HK$.

فرض کنید G یک گروه توپولوژیک فشرده و هاسدورف باشد. در این صورت طبق بخش‌های ۸ و ۹ از فصل دوم [۷]، یک اندازهٔ هار چپ μ روی σ -جبر شامل مجموعه‌های بورل با خاصیت $\mu(xE) = \mu(E)$ به‌ازای هر عضو x از G وجود دارد. با اعمال شرط نرمال‌سازی

$\mu(G) = ۱$ می‌توانیم فرض کنیم که μ اندازهٔ احتمال منحصربه‌فرد G است. روی فضای $G \times G$ اندازهٔ حاصل‌ضرب $\mu \times \mu$ را در نظر می‌گیریم. حال اگر تابع $f : G \times G \to G$ را با ضابطهٔ

$$f(x, y) = xyx^{-۱}y^{-۱},$$

تعریف کنیم، آنگاه f تابعی پیوسته است و $C = f^{-۱}(۱)$ و لذا C یک مجموعهٔ بسته و در نتیجه اندازه‌پذیر خواهد بود. در [۵] گوستافسون درجهٔ جابه‌جایی را برای گروه فشردهٔ G به‌صورت زیر تعریف کرد

$$\Pr(G) := \mu \times \mu(C), \tag{۱.۲}$$

که در آن μ اندازهٔ هار و C همان مجموعهٔ تعریف‌شده در رابطه (۱.۱) است. گوستافسون سپس نشان داد که احکام مشابه گروه‌های متناهی برای این گروه‌ها برقرار هستند، برای مثال او نشان داد که کران بالای یکسانی برای درجهٔ جابه‌جایی یک گروه غیرآبلی فشرده وجود دارد که در قضیهٔ بعد بیان شده است.

قضیه ۳.۲ (قضیهٔ اول از بخش دو [۵]). فرض کنید G یک گروه غیرآبلی فشرده باشد. در این صورت $\Pr(G) \leq \frac{۵}{۸}$.

مشابه با مفاهیم مطرح‌شده در [۵] در بخش سوم این مقاله به تعریف درجهٔ جابه‌جایی نسبی یک گروه توپولوژیک فشرده خواهیم پرداخت و نشان خواهیم داد که احکام مشابهی برای این گروه‌ها، در مقایسه با گروه‌های متناهی وجود دارند. در ادامه چند حکم مقدماتی بیان خواهند شد که در بخش‌های بعد مورد استفاده قرار خواهند گرفت. در ادامهٔ این مقاله، همواره منظور از گروه G یک گروه توپولوژیک فشرده، هاسدورف و زیرگروه H یک زیرگروه بسته از اندازهٔ غیرصفر است. همچنین منظور از اندازهٔ μ، اندازهٔ هار نرمال‌شده روی گروه G خواهد بود.

لم ۴.۲ (لم ۲.۲ از [۹]). فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از G باشد. در این صورت

$$\mu(H) = \begin{cases} \frac{۱}{|G:H|} & \text{اگر } |G:H| < \infty \\ ۰ & \text{اگر } |G:H| = \infty \end{cases}$$

لم ۵.۲ (برهان قضیه ۱ از بخش دوم [۵]). فرض کنید χ_C تابع مشخصه روی C باشد. در این صورت

$$\int_G \chi_C(x, y)d\mu(y) = \mu(C_G(x)).$$

لم ۶.۲. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از G باشد. در این صورت داریم

$$\frac{\mu(H)}{\mu(C_H(x))} \leq \frac{۱}{\mu(C_G(x))} \tag{۲.۲}$$

و تساوی اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر $G = HC_G(x)$.

اثبات. رابطه (۱.۲) معادل با این است که

$$\mu(H)\mu(C_G(x)) \leq \mu(C_H(x)), \tag{۳.۲}$$

لذا برای اثبات حکم کافی است رابطهٔ فوق را ثابت کنیم.
اگر $|G : C_G(x)| = \infty$، آنگاه با توجه به لم ۴.۲ داریم $\mu(C_G(x)) = ۰$ و واضح است که در این حالت حکم برقرار است. اگر $|G : C_G(x)| < \infty$، آنگاه $\mu(C_G(x)) = \frac{۱}{|G:C_G(x)|}$، $\mu(H) = \frac{۱}{|G:H|}$ و $\mu(C_H(x)) = \frac{۱}{|G:C_H(x)|}$. از طرفی چون $C_H(x) = H \cap C_G(x)$، لذا با توجه به قضیه ۲.۲ داریم

$$|G : C_H(x)| \leq |G : H||G : C_G(x)| \tag{۴.۲}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{۱}{|G : C_H(x)|} \geq \frac{۱}{|G : H|}\frac{۱}{|G : C_G(x)|}$$

و با توجه به لم ۴.۲ حکم به دست می‌آید. از سوی دیگر با توجه به قضیه ۲.۲، در رابطه (۴.۲) تساوی برقرار است اگر و تنها اگر داشته باشیم $G = HC_G(x)$، که نتیجه می‌دهد در (۱.۲) تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G = HC_G(x)$ و اثبات کامل می‌شود. □

تعریف ۷.۲. فرض کنید H زیرگروهی از G از اندازهٔ غیرصفر باشد و D زیرمجموعه‌ای بورل از G باشد. اندازهٔ μ_H را بر زیرمجموعه‌های بورل G به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mu_H(D) := \frac{\mu(H \cap D)}{\mu(H)},$$

در این صورت به‌راحتی می‌توان مشاهده کرد که μ_H اندازهٔ هار نرمال‌شده روی H است. همچنین واضح است که μ_G همان اندازهٔ μ خواهد بود.

در ادامهٔ این مقاله، همواره منظور از μ_H همان اندازهٔ بیان‌شده در تعریف ۷.۲ است و زیرگروه H همواره از اندازهٔ غیرصفر در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۸.۲. اندازهٔ ν را مطلقاً پیوسته نسبت به μ گویند، اگر برای هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر مثل A بتوان نشان داد که با صفر بودن اندازهٔ μ روی A، اندازهٔ ν روی A نیز صفر است، یعنی

$$\mu(A) = \circ \Rightarrow \nu(A) = \circ,$$

و آن را به‌صورت $\nu \ll \mu$ نشان می‌دهند.

قضیه ۹.۲ (رادون-نیکودیم (بخش ۶ از [۱۱])). فرض کنید (X, Σ) یک فضای اندازه باشد و ν و μ دو اندازهٔ σ-متناهی تعریف‌شده روی آن باشند. اگر اندازهٔ ν مطلقاً پیوسته نسبت به μ باشد، آنگاه یک تابع اندازه‌پذیر مثل f موجود است که نامنفی بوده و برای هر زیرمجموعه‌ای از X (مانند A)، داریم:

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

چنین تابعی را مشتق رادون-نیکودیم ν نسبت به μ گوییم و به شکل $\frac{d\nu}{d\mu}$ نشان می‌دهیم.

تابع f در قضیهٔ فوق به شکل منحصربه‌فردی قابل تشخیص و تعیین است، مگر در نقاطی که اندازهٔ μ آن‌ها صفر است. به این معنی که اگر g، تابع دیگری باشد که در این رابطه صدق کند، تقریباً همه‌جا داریم $f = g$.

اگر $\mu \ll \nu$، آنگاه برای هر تابع μ-انتگرال‌پذیر g داریم

$$\int_X g d\nu = \int_X g f d\mu.$$

ملاحظه ۱۰.۲. فرض کنید μ_H اندازهٔ بیان‌شده در تعریف ۷.۲ باشد. در این صورت $\mu \ll \mu_H$ و به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که مشتق رادون-نیکودیم μ_H نسبت به μ برابر

$$\frac{d\mu_H}{d\mu} = \frac{۱}{\mu(H)}\chi_H$$

است که در آن χ_H تابع مشخصهٔ H است. لذا به‌ازای هر تابع انتگرال‌پذیر g داریم

$$\int_X g d\mu_H = \int_X \frac{۱}{\mu(H)} g \chi_H d\mu = \frac{۱}{\mu(H)} \int_X g \chi_H d\mu. \qquad (۵.۲)$$

در اثبات احکام بخش سوم و چهارم مقاله از رابطهٔ فوق به‌صورت مکرر و بدون ارجاع مستقیم به این رابطه استفاده خواهیم کرد.

۳ درجهٔ جابه‌جایی نسبی

در این بخش مشابه با تعریف بیان‌شده در [۵]، درجهٔ جابه‌جایی نسبی یک زیرگروه را با استفاده از توابع μ و μ_H برای یک گروه فشرده و یک زیرگروه بسته از آن تعریف خواهیم کرد و احکام و قضایای مشابه حالت متناهی را برای آن اثبات خواهیم کرد.

تعریف ۱.۳. درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه H را با نماد $\Pr(H,G)$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Pr(H,G) := \mu_H \times \mu(C) = \int_{G\times G} \chi_C(x,y) d\mu_H(x) d\mu(y), \qquad (۱.۳)$$

که C همان مجموعهٔ تعریف‌شده در رابطه (۱.۱) و $\chi_C(x,y)$ تابع مشخصه روی C است.

تذکر ۲.۳. درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه را می‌توان در حالت کلی‌تر برای وقتی که $H \leq K \leq G$، به‌صورت زیر تعریف کرد

$$\Pr(H,K) := \mu_H \times \mu_K(C) = \int_{G\times G} \chi_C(x,y)d\mu_H(x)d\mu_K(y), \qquad (۲.۳)$$

به‌ویژه $\Pr(H,H)$ همان $\Pr(H)$ خواهد بود که برهان آن در اثبات قسمت دوم قضیه ۵.۳ قابل مشاهده است.

لم ۳.۳. همواره داریم

$$\Pr(H,G) = \frac{۱}{\mu(H)} \int_G \mu(C_H(y))d\mu(y) = \frac{۱}{\mu(H)} \int_H \mu(C_G(x))d\mu(x). \qquad (۳.۳)$$

اثبات. با توجه به تعریف درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه H و قضیهٔ فوبینی، داریم

$$\begin{aligned}
\Pr(H,G) &= \int_{G\times G} \chi_C(x,y)d\mu_H(x)d\mu(y)\\
&= \int_G \left(\int_G \chi_C(x,y)d\mu_H(x)\right) d\mu(y)\\
&= \frac{۱}{\mu(H)} \int_G \left(\int_G \chi_C(x,y)\chi_H(x)d\mu(x)\right) d\mu(y)\\
&= \frac{۱}{\mu(H)} \int_G \left(\int_H \chi_C(x,y)d\mu(x)\right) d\mu(y)\\
&= \frac{۱}{\mu(H)} \int_G \mu(C_H(y))d\mu(y)
\end{aligned}$$

و تساوی اول ثابت می‌شود. همچنین با استفادهٔ مجدد از تعریف داریم

$$\begin{aligned}
\Pr(H,G) &= \int_{G\times G} \chi_C(x,y)d\mu_H(x)d\mu(y)\\
&= \int_G \left(\int_G \chi_C(x,y)d\mu(y)\right) d\mu_H(x)\\
&= \int_G \mu(C_G(x))d\mu_H(x)\\
&= \frac{۱}{\mu(H)} \int_G \mu(C_G(x))\chi_H(x)d\mu(x)\\
&= \frac{۱}{\mu(H)} \int_H \mu(C_G(x))d\mu(x)
\end{aligned}$$

و تساوی دوم هم حاصل شد. □

حال مثالی از درجهٔ جابه‌جایی نسبی برای یک گروه فشردهٔ نامتناهی، ارائه می‌دهیم. فرض کنید $G_۱ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = ۱\}$، در این صورت $G_۱$ با ضرب معمولی اعداد مختلط و توپولوژی معمولی اعداد مختلط، یک گروه توپولوژیک فشرده است. در مثال‌های آینده همواره از گروه $G_۱$ استفاده خواهیم کرد.

مثال ۴.۳. فرض کنید $G = G_۱ \times S_۳$ که $S_۳$ گروه متقارن از درجهٔ ۳ است و فرض کنید که μ اندازهٔ هار نرمال‌شده روی G باشد. قرار می‌دهیم $H = G_۱ \times \langle(۱۲)\rangle$. در این صورت واضح است که $|G:H| = ۳$ و در نتیجه $\mu(H) = \frac{۱}{۳}$. حال درجهٔ جابه‌جایی نسبی H را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید

$$H_۱ = \{(g,id) \mid g \in G_۱\}, \quad H_۲ = \{(g,(۱۲)) \mid g \in G_۱\}.$$

در این صورت داریم $|G:H_۱|=۶$ و در نتیجه $\mu(H_۱)=\mu(H_۲)=\frac{۱}{۶}$. همچنین واضح است که برای $(g,id)\in H_۱$ داریم $C_G(g,id)=G$ و برای $(g,(۱۲))\in H_۲$ داریم $C_G(g,(۱۲))=H$. لذا خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\Pr(H,G)&=\frac{۱}{\mu(H)}\int_H \mu(C_G(x))d\mu(x)=۳\left(\int_{H_۱}\mu(C_G(x))d\mu(x)+\int_{H_۲}\mu(C_G(x))d\mu(x)\right)\\&=۳\left(\int_{H_۱}\mu(G)d\mu(x)+\int_{H_۲}\mu(H)d\mu(x)\right)=۳\left(\mu(H_۱)+\mu(H)\mu(H_۲)\right)\\&=۳\left(\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۶}\right)=\frac{۲}{۳}.\end{aligned}$$

قضیه ۵.۳. فرض کنید H زیرگروهی از G باشد. در این صورت داریم

$$\Pr(G)\leq \Pr(H,G)\leq \Pr(H), \tag{۴.۳}$$

که $\Pr(H)$ همان درجهٔ جابه‌جایی H است.

اثبات. با استفاده از لم ۳.۳ داریم

$$\begin{aligned}\Pr(H,G)&=\frac{۱}{\mu(H)}\int_G \mu(C_H(y))d\mu(y)\\&=\int_G \frac{\mu(C_H(y))}{\mu(H)}d\mu(y)\\&\geq \int_G \mu(C_G(y))d\mu(y)=\Pr(G),\end{aligned}$$

که رابطهٔ آخر با استفاده از لم ۶.۲ به دست آمده است. برای اثبات نامساوی دوم ابتدا توجه می‌کنیم که با استفاده از لم ۳.۳ داریم

$$\Pr(H,G)=\frac{۱}{\mu(H)}\int_H \mu(C_G(x))d\mu(x)$$

از سوی دیگر داریم

$$\begin{aligned}\Pr(H,H)&=\int_G\left(\int_G \chi_C(x,y)d\mu_H(y)\right)d\mu_H(x)\\&=\frac{۱}{\mu(H)}\int_G\left(\int_G \chi_C(x,y)\chi_H(y)d\mu(y)\right)d\mu_H(x)\\&=\frac{۱}{\mu(H)}\int_G \mu(C_H(x))d\mu_H(x)\\&=\frac{۱}{\mu(H)}\int_G \mu(C_H(x))\frac{۱}{\mu(H)}\chi_H(x)d\mu(x)\\&=\frac{۱}{\mu(H)}\int_H \frac{\mu(C_H(x))}{\mu(H)}d\mu(x)\\&\geq \frac{۱}{\mu(H)}\int_H \mu(C_G(x))d\mu(x)=\Pr(H,G)\end{aligned}$$

و نامساوی دوم هم ثابت شد (توجه کنید که در رابطهٔ آخر دوباره لم ۶.۲ به کار گرفته شده است). □

قضیه ۶.۳. فرض کنید H زیرگروهی از G باشد، در این صورت $\Pr(H,G)=\Pr(G)$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $y\in G$ داشته باشیم $G=HC_G(y)$.

اثبات. با توجه به اثبات قضیه ۵.۳ می‌توان دید که $\Pr(H,G)=\Pr(G)$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $y\in G$ داشته باشیم

$$\frac{\mu(C_H(y))}{\mu(H)}=\mu(C_G(y))$$

و با توجه به لم ۴.۲ این تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G=HC_G(y)$ به‌ازای هر $y\in G$ برقرار باشد. □

با استدلالی مشابه قضیهٔ قبل به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که در نامساوی دوم قضیه ۵.۳ تساوی برقرار است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $x \in H$ داشته باشیم $G = HC_G(x)$ و دلیل اینکه این رابطه فقط برای اعضای H بیان می‌شود این است که در اثبات نامساوی دوم قضیه ۵.۳ انتگرال‌های نهایی روی مجموعهٔ H هستند. لذا قضیهٔ زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۷.۳. فرض کنید H زیرگروهی از G باشد، در این صورت $\Pr(H, G) = \Pr(H)$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $x \in H$ داشته باشیم $G = HC_G(x)$.

اگر زیرگروه H را یک زیرگروه غیرنرمال در نظر بگیریم، آنگاه نامساوی‌ها در قضیه ۵.۳ به نامساوی‌های اکید تبدیل خواهند شد که برهان آن در ادامه خواهد آمد.

قضیه ۸.۳. فرض کنید H زیرگروهی غیرنرمال از G باشد. در این صورت داریم

$$\Pr(G) < \Pr(H, G) < \Pr(H). \tag{۵.۳}$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر به‌ازای هر $x \in H$ داشته باشیم $G = HC_G(x)$، آنگاه H زیرگروه نرمالی از G خواهد بود. فرض کنید که شرط فوق برقرار است و $h \in H$ و فرض کنید که $g \in G$ عضوی دلخواه از G باشد. چون

$$G = HC_G(x) = C_G(x)H,$$

لذا می‌توان نوشت $g = c_۱h_۱$ که $c_۱ \in C_G(h)$ و $h_۱ \in H$. حال داریم

$$g^{-۱}hg = h_۱^{-۱}c_۱^{-۱}hc_۱h_۱ = h_۱^{-۱}hh_۱ \in H,$$

که نشان می‌دهد H زیرگروه نرمالی از G است. حال اگر در قضیه ۵.۳ تساوی برقرار باشد، آنگاه با توجه به قضایای ۶.۳ و ۷.۳ و استدلال فوق نتیجه می‌شود که H زیرگروهی نرمال از G است که خلاف فرض است.

□

۴ کران بالایی برای درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه

در این بخش همواره منظور از Z مرکز گروه G است؛ یعنی اعضایی که با تمام اعضای گروه G جابه‌جا می‌شوند.

قضیه ۱.۴. فرض کنید H زیرگروهی از G و Z مرکز گروه G باشد. در این صورت داریم

$$\Pr(H, G) \leq \frac{\mu(H) + \mu(Z \cap H)}{۲\mu(H)}. \tag{۱.۴}$$

اثبات. قرار دهید $K = Z \cap H$. در این صورت به‌ازای هر $x \in K$ داریم $C_G(x) = G$ و در نتیجه $\mu(C_G(x)) = ۱$. همچنین اگر $x \in H - K$، آنگاه $C_G(x) < G$ که نتیجه می‌دهد $|G : C_G(x)| \geq ۲$، لذا با توجه به لم ۴.۲ خواهیم داشت

$$\mu(C_G(x)) \leq \frac{۱}{۲}.$$

حال با توجه به تعریف درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه داریم

$$\begin{aligned}\Pr(H,G) &= \frac{1}{\mu(H)}\int_H \mu(C_G(x))d\mu(x)\\ &= \frac{1}{\mu(H)}\left(\int_K \mu(C_G(x))d\mu(x) + \int_{H-K}\mu(C_G(x))d\mu(x)\right)\\ &\leq \frac{1}{\mu(H)}\left(\int_K d\mu(x) + \int_{H-K}\frac{1}{2}d\mu(x)\right)\\ &= \frac{1}{\mu(H)}\left(\mu(K) + \frac{\mu(H-K)}{2}\right)\\ &= \frac{2\mu(K)+\mu(H-K)}{2\mu(H)}\\ &= \frac{\mu(H)+\mu(K)}{2\mu(H)}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\Pr(H,G) \leq \frac{\mu(H)+\mu(Z\cap H)}{2\mu(H)},$$

و حکم ثابت شد. □

با استفاده از قضیهٔ فوق می‌توان کران‌های بالایی برای درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه‌ها به دست آورد. این نتایج با نتایج به‌دست‌آمده در حالت متناهی کاملاً یکسان است.

قضیه ۲.۴. فرض کنید G یک گروه غیرآبلی و H زیرگروهی از آن باشد. در این صورت داریم

الف. اگر $Z \subseteq H$، آنگاه $\Pr(H,G) = 1$؛

ب. اگر $Z \not\subseteq H$، آنگاه $\Pr(H,G) \leq \frac{3}{4}$؛

پ. اگر $Z \not\subseteq H$ و H غیرآبلی باشد، آنگاه $\Pr(H,G) \leq \frac{5}{8}$.

اثبات. الف. اگر $Z \subseteq H$، آنگاه به‌ازای هر $x \in H$ داریم $\mu(C_G(x)) = \mu(G) = 1$ و در نتیجه

$$\Pr(H,G) = \frac{1}{\mu(H)}\int_H \mu(C_G(x))d\mu(x) = \frac{1}{\mu(H)}\int_H d\mu(x) = \frac{\mu(H)}{\mu(H)} = 1.$$

ب. چون $Z \not\subseteq H$ پس $Z\cap H < H$ که نتیجه می‌دهد $|H : Z\cap H| \geq 2$. بنابراین

$$|G : Z\cap H| = |G : H||H : Z\cap H| \geq 2|G : H|,$$

که با توجه به لم ۴.۲ نتیجه می‌دهد

$$\mu(Z\cap H) \leq \frac{1}{2}\mu(H).$$

حال با به کار بردن قضیه ۱.۴ خواهیم داشت

$$\Pr(H,G) \leq \frac{\mu(H)+\mu(Z\cap H)}{2\mu(H)} \leq \frac{\mu(H)+\frac{1}{2}\mu(H)}{2\mu(H)} = \frac{3}{4}.$$

پ. چون H غیرآبلی است؛ لذا از قضیه ۳.۲ داریم $\Pr(H) \leq \frac{5}{8}$، بنابراین با توجه به قضیه ۵.۳ خواهیم داشت

$$\Pr(H,G) \leq \Pr(H) \leq \frac{5}{8}.$$

□

مثال ۳.۴. فرض کنید $G = G_۱ \times D_۸$ که $D_۸$ گروه دووجهی از مرتبهٔ ۸ با مولدهای a و b است (توجه کنید که برای مولدهای گروه $D_۸$ داریم $a^۴ = b^۲ = ۱$) و فرض کنید که μ اندازهٔ هار نرمال‌شده روی G باشد. زیرگروه H از G را به‌صورت $H = G_۱ \times \langle a \rangle$ در نظر می‌گیریم. واضح است که $|G : H| = ۲$ و لذا خواهیم داشت $\mu(H) = \frac{۱}{۲}$. فرض کنید

$$H_۱ = \{(g, x) \mid g \in G_۱, x \in \{۱, a^۲\}\}, \quad H_۲ = \{(g, y) \mid g \in G_۱, y \in \{a, a^۳\}\}.$$

در این صورت داریم $|G : H_۱| = ۴$ و در نتیجه $\mu(H_۱) = \mu(H_۲) = \frac{۱}{۴}$. همچنین چون $Z(D_۸) = \{۱, a^۲\}$ لذا برای $(g, x) \in H_۱$ داریم $C_G(g, x) = G$ و برای $(g, y) \in H_۲$ داریم $C_G(g, y) = H$. بنابراین

$$\begin{aligned}\Pr(H, G) &= \frac{۱}{\mu(H)} \int_H \mu(C_G(x)) d\mu(x) = ۲ \left(\int_{H_۱} \mu(C_G(x)) d\mu(x) + \int_{H_۲} \mu(C_G(x)) d\mu(x) \right) \\ &= ۲ \left(\int_{H_۱} \mu(G) d\mu(x) + \int_{H_۲} \mu(H) d\mu(x) \right) = ۲ \left(\mu(H_۱) + \mu(H)\mu(H_۲) \right) \\ &= ۲ \left(\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} \cdot \frac{۱}{۴} \right) = \frac{۳}{۴}.\end{aligned}$$

مثال ۴.۴. قرار دهید $G_۲ = Q_۸ \times C_۲$ که در آن $Q_۸$ گروه کواترنیون از مرتبهٔ ۸ و $C_۲$ گروه دوری از مرتبهٔ ۲ است. (در اینجا گروه کواترنیون را به‌صورت $Q_۸ = \{\pm ۱, \pm i, \pm j, \pm k\}$ در نظر گرفته‌ایم). حال قرار می‌دهیم $G = G_۱ \times G_۲$ و زیرگروه H از G را به‌صورت $H = G_۱ \times Q_۸$ در نظر می‌گیریم. واضح است که $|G : H| = ۲$ و لذا خواهیم داشت $\mu(H) = \frac{۱}{۲}$. فرض کنید

$$H_۱ = \{(g, x) \mid g \in G_۱, x \in \{۱, -۱\}\}, \quad H_۲ = \{(g, y) \mid g \in G_۱, y \in \{\pm i, \pm j, \pm k\}\}.$$

در این صورت داریم $|G : H_۱| = ۸$ که نتیجه می‌دهد $\mu(H_۱) = \frac{۱}{۸}$. اگر $(g, x) \in H_۱$، آنگاه $C_G(g, x) = G$ و اگر $(g, y) \in H_۲$، آنگاه داریم $C_G(g, y) = G_۱ \times (\langle y \rangle \times C_۲)$. چون مرتبهٔ $\langle y \rangle$ برابر ۴ است؛ لذا برای $(g, y) \in H_۲$ خواهیم داشت $\mu(C_G(g, y)) = \frac{۱}{۲}$. لذا درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه H به‌صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned}\Pr(H, G) &= \frac{۱}{\mu(H)} \int_H \mu(C_G(x)) d\mu(x) = ۲ \left(\int_{H_۱} \mu(C_G(x)) d\mu(x) + \int_{H_۲} \mu(C_G(x)) d\mu(x) \right) \\ &= ۲ \left(\int_{H_۱} \mu(G) d\mu(x) + \int_{H_۲} \frac{۱}{۲} d\mu(x) \right) = ۲ \left(\mu(H_۱) + \frac{۱}{۲} \mu(H_۲) \right) \\ &= ۲ \left(\frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۲} \cdot \frac{۶}{۱۶} \right) = \frac{۵}{۸}.\end{aligned}$$

ملاحظه ۵.۴. مثال‌های ۳.۴ و ۴.۴ نشان می‌دهند که کران‌های بالای بیان‌شده در قضیه ۲.۴ واقعاً رخ خواهند داد و لذا کران‌های بیان‌شده، بهترین کران‌های ممکن هستند.

آخرین قضیهٔ این مقاله به یک قضیهٔ ساختاری در مورد گروه‌های فشرده‌ای که کران‌های بالای درجهٔ جابه‌جایی نسبی برای آنها اتفاق می‌افتد، اختصاص دارد. شایان ذکر است که در حالت متناهی هم نتایج کاملاً مشابهی برقرار هستند.

قضیه ۶.۴. فرض کنید H زیرگروهی از G باشد. در این صورت داریم

الف. اگر $\Pr(H, G) = \frac{۳}{۴}$، آنگاه $\frac{H}{Z \cap H} \cong \mathbb{Z}_۲$.

ب. اگر $\Pr(H, G) = \frac{۵}{۸}$ و H غیرآبلی باشد، آنگاه $\frac{H}{Z \cap H} \cong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$.

اثبات. الف. فرض کنید $\Pr(H, G) = \frac{۳}{۴}$. در این صورت با توجه به قضیه ۱.۴ داریم

$$\frac{۳}{۴} \leq \frac{\mu(H) + \mu(Z \cap H)}{۲\mu(H)}$$

که نتیجه می‌دهد $\frac{\mu(H)}{\mu(Z \cap H)} \leq ۲$. لذا از لم ۴.۲ داریم $\frac{|G : Z \cap H|}{|G : H|} \leq ۲$. اگر $\frac{|G : Z \cap H|}{|G : H|} = ۱$، آنگاه $Z \cap H = H$ که نتیجه می‌دهد $H \subseteq Z$ و در نتیجه $\Pr(H, G) = ۱$ که متناقض با فرض است؛ بنابراین $\frac{|G : Z \cap H|}{|G : H|} = ۲$ و در نتیجه $|\frac{H}{Z \cap H}| = ۲$، لذا خواهیم

داشت $\frac{H}{Z\cap H}\cong \mathbb{Z}_۲$.
ب. فرض کنید $\Pr(H,G)=\frac{۵}{۸}$. در این صورت مشابه استدلال حالت قبل داریم $\frac{\mu(H)}{\mu(Z\cap H)}\leq ۴$ که نتیجه می‌دهد $\frac{|G:Z\cap H|}{|G:H|}\leq ۴$.
بنابراین $|\frac{H}{Z\cap H}|\leq ۴$. اگر $\frac{H}{Z\cap H}$ دوری باشد، آنگاه H آبلی است که خلاف فرض است. پس $|\frac{H}{Z\cap H}|=۴$ و چون $\frac{H}{Z\cap H}$ غیردوری است
لذا $\frac{H}{Z\cap H}\cong \mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲$. $\square$

۵ قدردانی

وظیفهٔ خود می‌دانم که از داوران گرامی که با صرف وقت ارزشمند خود، مقاله را مطالعه نموده و نظرات بسیار مفید و سازنده‌ای را در جهت بهبود مقاله بیان نمودند، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

References

[1] Das, A.K., & Nath, R.K. (2010). On generalized relative commutativity degree of a finite group. *International Electronic Journal of Algebra*, 7(7), 140–151.

[2] Erdos, P., & Turan, P. (1968). On some problems of statistical group theory. *Acta Math. Acad. Sci. Hung*, 19, 413–435. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01894517.

[3] Erfanian, A., Lescot, P., & Rezaei, R. (2007). On the relative commutativity degree of a subgroup of a finite group. *Comm. Algebra*, 35, 4183–4197. DOI: https://doi.org/10.1080/00927870701545044.

[4] Erfanian, A., & Russo, F.G. (2008). Probability of mutually commuting n-tuples in some classes of compact groups. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 34(2), 27–37.

[5] Gustafson, W.H. (1973). What is the probability that two groups elements commute?. *Amer. Math. Monthly*, 80, 1031–1304. DOI: https://doi.org/10.1080/00029890.1973.11993437.

[6] Hewitt, E., & Ross, K.A. (1963). Abstract Harmonic Analysis. *Springer Verlag, NewYork*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-40409-6.

[7] Nachbin, L. (1965). The Haar Integral. *D. Van Nostrand, Princeton, N.J.*

[8] Nath, R.K., & Yadav, M.K. (2015). Some results on relative commutativity degree. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1952-)*, 64, 229–239. DOI: https://doi.org/10.1007/s12215-015-0194-x.

[9] Rezaei, R., & Russo, F.G. (2011). Bounds for the relative n-th nilpotency degree in compact groups. *Asian-European Journal of Mathematics*, 4, 495–506. DOI: https://doi.org/10.1142/S1793557111000411.

[10] Robinson, D. (1996). A Course in the Theory of Groups. *Germany: Springer New York*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8594-1.

[11] Royden, H.L. (1988). Real Analysis. *United Kingdom: Macmillan*.

Measure Algebras and Applications

Some results on R-duals in Hilbert spaces

Farkhondeh Takhteh[1]

1. Persian Gulf University, Bushehr, Iran. Email: f.takhteh@pgu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 4 June 2023
Received in revised form:
12 July 2023
Accepted: 18 July 2023
Published Online:
30 September 2023

Keywords:
Hilbert space,
Frame,
R-dual,
Riesz basis

2020 Mathematics Subject Classification:
42C15

ABSTRACT

In this paper, the concept of R-duality with respect to Riesz bases is focused. In particular, some characterizations for frames and Riesz bases in terms of their R-dual sequences with respect to Riesz bases are given.

Cite this article: Takhteh, F. (2023). Some results on R-duals in Hilbert spaces. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 13–21. http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9523.1008

Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/MAA.2023.9523.1008

Extended Abstract

Introduction

Let g be a function in $L^2(\mathbb{R})$ and a, b be two positive constants. The collection $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ where $E_{mb}f(x) = e^{2\pi imbx}f(x)$ and $T_{na}f(x) = f(x - na)$ is called a *Gabor frame* in $L^2(\mathbb{R})$ if it is a frame for the Hilbert space $L^2(\mathbb{R})$.
Gabor frames, introduced by D. Gabor in 1946 (see [7]), have been extensively studied. One of the most important results for Gabor frames is the Ron-Shen duality principle that precisely characterizes Gabor frames. It states that for every $g \in L^2(\mathbb{R})$ and $a, b > 0$ with $ab \leq 1$, $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ is a frame with bounds A, B for $L^2(\mathbb{R})$ if and only if $\{\frac{1}{\sqrt{ab}}E_{\frac{m}{a}}T_{\frac{n}{b}}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ is a Riesz sequence with bounds A, B.
For a generalization of the duality principle from Gabor frames to abstract frame theory, the concept of R-duality with respect to orthonormal bases was defined as follows (see [10]):
Let $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ and $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ be orthonormal bases for a separable Hilbert space $\mathcal{H}$. Let $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ be a sequence such that for every $j \in \mathbb{N}$, $\sum_{i\in\mathbb{N}} |\langle f_i, e_j\rangle|^2 < \infty$ and

$$\omega_j^f := \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle f_i, e_j\rangle h_i.$$

The sequence $(\omega_j^f)_{j\in\mathbb{N}}$ is called the R-dual sequence of $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ with respect to $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ and $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Conclusion

The main results of this paper are:

***Theorem* 0.1.** *Assume that $\mathcal{I}$ is a subset of $\mathbb{N}$. Let $(e_j)_{j\in\mathcal{I}}$ and $(h_i)_{i\in\mathcal{I}}$ be Riesz bases in $\mathcal{H}$ and $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ be a sequence such that $\sum_{i\in\mathcal{I}} |\langle f_i, e_j\rangle|^2 < \infty$, for every $j \in \mathcal{I}$. Then, the following statements hold:*

1. *For every $i \in \mathcal{I}$*
$$f_i = \sum_{j\in\mathcal{I}} \langle \omega_j^f, \widetilde{h_i}\rangle \widetilde{e_j},$$
where $(\widetilde{e_j})_{j\in\mathcal{I}}$ and $(\widetilde{h_i})_{i\in\mathcal{I}}$ are the canonical dual frames of $(e_j)_{j\in\mathcal{I}}$ and $(h_i)_{i\in\mathcal{I}}$, respectively.
2. *$(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ is the R-dual sequence of $(\omega_j^f)_{j\in\mathcal{I}}$ with respect to $(\widetilde{h_i})_{i\in\mathcal{I}}$ and $(\widetilde{e_j})_{j\in\mathcal{I}}$.*

***Theorem* 0.2.** *Let $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ be a Bessel sequence with Bessel bound A, $(h_i)_{i\in\mathcal{I}}$ and $(e_j)_{j\in\mathcal{I}}$ be Riesz bases in $\mathcal{H}$ and M be defined as*

$$M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

$$M(f) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \langle f_i, f\rangle h_i.$$

If $(\omega_j^f)_{j\in\mathcal{I}}$ is the R-dual of $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ with respect to $(h_i)_{i\in\mathcal{I}}$ and $(e_j)_{j\in\mathcal{I}}$, then $(\omega_j^f)_{j\in\mathcal{I}}$ is a Bessel sequence in $\mathcal{H}$. Moreover, the following statements are equivalent:

1. *$R(M)$ is closed and M is injective.*

2. M *is bounded below.*

3. $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ *is a frame in* $\mathcal{H}$*.*

***Theorem* 0.3.** *Let* $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ *be a Bessel sequence in* $\mathcal{H}$ *and let* $(h_i)_{i\in\mathcal{I}}$ *be a Riesz basis in* $\mathcal{H}$*. Let* M *be*

$$M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

$$M(f) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \langle f_i, f\rangle h_i.$$

Then $M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *is an invertible anti-linear map if and only if* $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ *is a Riesz basis in* $\mathcal{H}$*.*

***Theorem* 0.4.** *Let* $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ *and* $\mathcal{G} = (g_i)_{i\in\mathcal{I}}$ *be frames in* $\mathcal{H}$ *and* $(h_i)_{i\in\mathcal{I}}$ *and* $(e_j)_{j\in\mathcal{I}}$ *be Riesz bases for* $\mathcal{H}$*. Suppose that*

$$M_1(f) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \langle f_i, f\rangle h_i, \qquad M_2(f) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \langle g_i, f\rangle \widetilde{h}_i,$$

and

$$S_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(f) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \langle f, f_i\rangle g_i.$$

Then the following statements are equivalent:

1. $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ *is an alternate dual frame of* $\mathcal{G} = (g_i)_{i\in\mathcal{I}}$*.*

2. $S_{\mathcal{F},\mathcal{G}} = S_{\mathcal{G},\mathcal{F}} = Id_{\mathcal{H}}$*.*

3. $\langle M_1(e_j), M_2(\widetilde{e}_k)\rangle = \delta_{jk}$ *for every* $j, k \in \mathcal{I}$*.*

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۲۱-۱۳

نتایجی درمورد R-دوگان‌ها در فضاهای هیلبرت

فرخنده تخته [۱]

۱. گروه ریاضی، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران. رایانامه: f.takhteh@pgu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۳/۱۴
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۴/۲۱
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۴/۲۷
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
فضای هیلبرت،
قاب،
R-دوگان،
پایهٔ ریس

رده‌بندی ریاضی:
42C15

چکیده

در این مقاله، مفهوم R-دوگان‌های قاب‌ها در فضاهای هیلبرت را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به‌ویژه، R-دوگان‌های تعریف‌شده نسبت به پایه‌های ریس مورد توجه قرار می‌گیرند و ساختارسازی‌هایی از قاب‌ها و پایه‌های ریس برحسب R-دوگان‌های آن‌ها نسبت به پایه‌های ریس ارائه می‌شوند.

استناد: تخته، فرخنده. (۱۴۰۲). نتایجی درمورد R-دوگان‌ها در فضاهای هیلبرت. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۲۱-۱۳.
http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9523.1008

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

فرض کنیم g یک تابع در $L^{2}(\mathbb{R})$ و a, b دو عدد مثبت باشند. در این صورت، خانوادهٔ $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ که در آن $T_{na}f(x) = f(x-na)$ و $E_{mb}f(x) = e^{2\pi imbx}f(x)$ یک قاب گابور نامیده می‌شود اگر آن یک قاب برای فضای هیلبرت $L^{2}(\mathbb{R})$ باشد.

قاب‌های گابور در سال ۱۹۴۶ توسط **گابور** [1] در مرجع [۷] معرفی شدند و به‌طور وسیع مورد مطالعه قرار گرفتند، برای نمونه مراجع [۷، ۸] را مشاهده کنید.

یکی از نتایج مهم در مورد قاب‌های گابور، اصل دوگانی **رن- شن** [2] است (مرجع [۹] را ملاحظه کنید) که دقیقاً قاب‌های گابور را ساختارسازی می‌کند. در واقع، بیان می‌کند که اگر $g \in L^{2}(\mathbb{R})$، $a, b > 0$ با $ab \leq 1$، در این صورت $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ یک قاب با کران‌های A, B برای $L^{2}(\mathbb{R})$ است اگر و فقط اگر $\{\frac{1}{\sqrt{ab}}E_{\frac{m}{a}}T_{\frac{n}{b}}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ یک دنبالهٔ ریس با کران‌های A, B باشد.

برای تعمیم این اصل از قاب‌های گابور در $L^{2}(\mathbb{R})$ به قاب‌ها در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، مفهوم یک R-دوگان نسبت به پایه‌های متعامدیکه در [۵] معرفی شد.

فرض کنیم $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ و $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ پایه‌های متعامدیکه برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند. همچنین فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ یک دنباله در $\mathcal{H}$ باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $j \in \mathbb{N}$، داشته باشیم $\sum_{i\in\mathbb{N}} |\langle f_i, e_j\rangle|^{2} < \infty$. در این صورت تعریف می‌کنیم $\omega_j^f := \sum_{i\in\mathbb{N}}\langle f_i, e_j\rangle h_i$ و دنبالهٔ $\{\omega_j^f\}_{j\in\mathbb{N}}$ یک R-دوگان $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ نسبت به پایه‌های متعامدیکه $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ و $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ نامیده می‌شود.

مفهوم R-دوگانی نسبت به پایه‌های متعامدیکه در مقالات زیادی مورد توجه قرار گرفته است، مقالات [۵]، [۲]، [۳] و [۴] را ملاحظه کنید.

در این مقاله، R-دوگان‌ها نسبت به پایه‌های ریس مورد بررسی و مطالعه قرار می‌گیرند و برخی از خواص آن‌ها به دست می‌آیند.

۲ نتایج اصلی

این بخش را با مفهوم یک R-دوگان نسبت به پایه‌های ریس آغاز می‌کنیم. این مفهوم در مرجع [۱۰] ارائه شده است.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ دو پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشند. فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ دنباله‌ای در $\mathcal{H}$ باشد به‌طوری‌که برای هر $j \in I$، $\sum_{i\in I} |\langle f_i, e_j\rangle|^{2} < \infty$. در این صورت، برای $\omega_j^f := \sum_{i\in I}\langle f_i, e_j\rangle h_i$، دنبالهٔ $(\omega_j^f)_{j\in I}$ را یک R-دوگان برای $\{f_i\}_{i\in I}$ نسبت به $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ می‌نامیم.

دقت کنید که اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل باشد، آن‌گاه برای هر $j \in I$، داریم $\sum_{i\in I} |\langle f_i, e_j\rangle|^{2} < \infty$. برای ارائهٔ مطالب در این مقاله، نیازمند تعریف یک عملگر مزدوج-خطی هستیم.

فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل در $\mathcal{H}$ با کران A و $\{h_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس با کران‌های $0 < B_1 \leq B_2 < \infty$ باشد. در این صورت، عملگر مزدوج-خطی $M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ را به‌صورت

$$M(f) = \sum_{i\in I}\langle f_i, f\rangle h_i \tag{۱.۲}$$

تعریف می‌کنیم. این عملگر خوش‌تعریف و کران‌دار است، زیرا برای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم

$$\|M(f)\|^{2} = \left\|\sum_{i\in I}\langle f_i, f\rangle h_i\right\|^{2} \leq B_2 \sum_{i\in I} |\langle f_i, f\rangle|^{2} \leq AB_2\|f\|^{2}$$

لذا

$$\|M\| \leq \sqrt{AB_2}.$$

الحاقی M یعنی M^* یک عملگر مزدوج-خطی به‌صورت زیر است

$$\langle M^*(f), g\rangle = \langle M(g), f\rangle$$

[1] Gabor
[2] Ron-Shen

(مرجع [۶] را ملاحظه کنید). بنابراین برای هر $f,g\in\mathcal{H}$ داریم:

$$\begin{aligned}\langle M^*f,g\rangle &= \langle Mg,f\rangle=\left\langle\sum_{i\in I}\langle f_i,g\rangle h_i,f\right\rangle\\ &= \sum_{i\in I}\langle h_i,f\rangle\langle f_i,g\rangle=\left\langle\sum_{i\in I}\langle h_i,f\rangle f_i,g\right\rangle,\end{aligned}$$

بنابراین

$$M^*f=\sum_{i\in I}\langle h_i,f\rangle f_i.$$

ملاحظه ۲.۲. فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل، $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ دو پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشند. در این صورت، اگر M عملگر تعریف‌شده در (۱.۲) باشد، آن‌گاه $M(e_j)=\sum_{i\in I}\langle f_i,e_j\rangle h_i$، لذا $\omega_j^f=M(e_j)$ پس $\{M(e_j)\}_{j\in I}$ یک R-دوگان $\{f_i\}_{i\in I}$ نسبت به $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ است.

در قضیهٔ زیر، الگوریتمی را معرفی می‌کنیم که $\{f_i\}_{i\in I}$ را برحسب یک R-دوگانش نسبت به پایه‌های ریس نمایش دهد (مراجع [۵، ۱۲] را ملاحظه کنید).

قضیه ۳.۲. فرض کنیم $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ دو پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشند و $\{f_i\}_{i\in I}$ دنباله‌ای در $\mathcal{H}$ باشد به‌طوری‌که برای هر $j\in I$ داشته باشیم $\sum_{i\in I}|\langle f_i,e_j\rangle|^2<\infty$. در این صورت، شرایط زیر برقرار هستند:

(الف) برای هر $i\in I$ داریم:

$$f_i=\sum_{j\in I}\langle\omega_j^f,\widetilde{h_i}\rangle\widetilde{e_j},$$

که در آن، $\{\widetilde{e_j}\}_{j\in I}$ و $\{\widetilde{h_i}\}_{i\in I}$ به‌ترتیب دوگان‌های کانونی $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ هستند.

(ب) $\{f_i\}_{i\in I}$ یک R-دوگان $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ نسبت به $\{\widetilde{h_i}\}_{i\in I}$ و $\{\widetilde{e_j}\}_{j\in I}$ است.

اثبات. (الف) چون $\{h_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس است، پس برای هر $i,j\in I$، $\langle h_i,\widetilde{h_j}\rangle=\delta_{i,j}$ لذا داریم $\langle\omega_j^f,\widetilde{h_i}\rangle=\langle f_i,e_j\rangle$. بنابراین، برای هر $i\in I$ داریم

$$f_i=\sum_{j\in I}\langle f_i,e_j\rangle\widetilde{e_j}=\sum_{j\in I}\langle\omega_j^f,\widetilde{h_i}\rangle\widetilde{e_j}.$$

(ب) چون برای هر $i,j\in I$ داریم $\langle\omega_j^f,\widetilde{h_i}\rangle=\langle f_i,e_j\rangle$، پس $\sum_{j\in I}|\langle\omega_j^f,\widetilde{h_i}\rangle|^2<\infty$. اکنون نتیجه با استفاده از قسمت (الف) به دست می‌آید.

□

قضیه ۴.۲. فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل با کران A باشد، $\{h_i\}_{i\in I}$ و $\{e_j\}_{j\in I}$ دو پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشند و M را عملگر تعریف‌شده در (۱.۲) در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ یک R-دوگان $\{f_i\}_{i\in I}$ نسبت به $\{h_i\}_{i\in I}$ و $\{e_j\}_{j\in I}$ باشد. در این صورت، $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ یک دنبالهٔ بسل در $\mathcal{H}$ است. علاوه‌بر این، گزاره‌های زیر معادل هستند.

(۱) $R(M)$ (برد M) بسته است و M یک‌به‌یک است.

(۲) M از پایین کران‌دار است.

(۳) $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ است.

اثبات. فرض کنیم M عملگر تعریف‌شده در (۱.۲) باشد و $0 < B_1 \le B_2 < \infty$ و $0 < C_1 \le C_2 < \infty$ به‌ترتیب کران‌های $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ باشند. در این صورت، به‌ازای هر $f\in\mathcal{H}$ داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I}|\langle\omega_j^f,f\rangle|^2 &= \sum_{j\in I}|\langle M(e_j),f\rangle|^2=\sum_{j\in I}|\langle M^*(f),e_j\rangle|^2\le B_2\|M^*(f)\|^2\\ &= B_2\left\|\sum_{i\in I}\langle h_i,f\rangle f_i\right\|^2\le AB_2\sum_{i\in I}|\langle h_i,f\rangle|^2\le AB_2C_2\|f\|^2.\end{aligned}$$

بنابراین $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ یک دنبالهٔ بسل برای $\mathcal{H}$ است.

(۱) $\Leftarrow$ (۲). فرض کنیم $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ متعامدیکه برای $\mathcal{H}$ باشد. عملگر خطی $\overline{M}:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ را به‌صورت $\overline{M}(\alpha\varepsilon_i)=\alpha\overline{M(\varepsilon_i)}$، که در آن $\overline{M(\varepsilon_i)}=\sum_{j\in I}\langle\varepsilon_i,f_j\rangle h_j$ و $\alpha\in\mathbb{C}$، تعریف می‌کنیم. چون $R(M)$ بسته است و M یک‌به‌یک است، پس $\overline{M}$ یک عملگر یک‌به‌یک با برد بسته است، لذا دارای وارون چپی مانند M' است. اکنون اگر $\overline{M'}$ را به‌صورت $\overline{M'}:R(\overline{M})\to\mathcal{H}$، $\overline{M'}(\alpha\varepsilon_i)=\overline{\alpha}M'(\varepsilon_i)$ تعریف کنیم، آن‌گاه به‌سادگی به دست می‌آید که $\overline{M'}$ یک وارون چپ M است، لذا M از پایین کران‌دار است و (۲) به دست می‌آید.

استلزام (۲) $\Leftarrow$ (۱) واضح است.

(۲) $\Leftarrow$ (۳). فرض کنیم $0<C_1\le C_2<\infty$ کران‌های ریس $\{h_i\}_{i\in I}$ باشند و فرض کنیم M از پایین کران‌دار باشد؛ لذا اعداد مثبت A_1 و A_2 موجودند به‌طوری‌که برای هر $f\in\mathcal{H}$ داریم:

$$A_1\|f\|^2\le\|M(f)\|^2\le A_2\|f\|^2,$$

لذا

$$\sum_{i\in I}|\langle f,f_i\rangle|^2\ge\frac{1}{C_2}\left\|\sum_{i\in I}\langle f_i,f\rangle h_i\right\|^2=\frac{1}{C_2}\|M(f)\|^2\ge\frac{A_1}{C_2}\|f\|^2.$$

اکنون چون $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل است، نتیجه می‌گیریم که $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب است و (۳) به دست می‌آید.

(۳) $\Leftarrow$ (۲). فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب با کران‌های $0<A_1\le A_2<\infty$ باشد و $0<C_1\le C_2<\infty$ کران‌های ریس $\{h_i\}_{i\in I}$ باشند. در این صورت، برای هر $f\in\mathcal{H}$ داریم:

$$\|M(f)\|^2=\left\|\sum_{i\in I}\langle f_i,f\rangle h_i\right\|^2\le C_2\sum_{i\in I}|\langle f_i,f\rangle|^2\le A_2C_2\|f\|^2.$$

به‌طور مشابه می‌توان به دست آورد که $\|M(f)\|^2\ge A_1C_1\|f\|^2$ و (۲) حاصل می‌شود. □

در قضیهٔ زیر، با استفاده از عملگر مزدوج-خطی M، یک ساختارسازی برای پایه‌های ریس ارائه می‌شود.

قضیه ۵.۲ فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل و $\{h_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت، عملگر مزدوج-خطی $M:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ (تعریف‌شده در (۱.۲)) وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس باشد.

اثبات. فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس باشد، لذا $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب است و بنابر قضیه ۲.۲، M یک‌به‌یک است و $R(M)$ بسته است. اکنون نشان می‌دهیم M پوشا است. چون $\{f_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس است، برای هر $i,j\in I$ داریم $\langle f_i,\widetilde{f}_j\rangle=\delta_{ij}$، لذا برای هر $j\in I$ خواهیم داشت:

$$h_j=\sum_{i\in I}\langle f_i,\widetilde{f}_j\rangle h_i=M(\widetilde{f}_j)\in R(M).$$

حال، با در نظر گرفتن این نکته که $\{h_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ است و $R(M)$ در $\mathcal{H}$ بسته است، نتیجه می‌گیریم که M پوشا است، لذا M وارون‌پذیر است.

برعکس، فرض کنیم M وارون‌پذیر و $0<A_1\le A_2<\infty$ کران‌های ریس $\{h_i\}_{i\in I}$ باشند. در این صورت، برای هر $f\in\mathcal{H}$ داریم:

$$\sum_{i\in I}|\langle f_i,f\rangle|^2\ge\frac{1}{A_2}\left\|\sum_{i\in I}\langle f_i,f\rangle h_i\right\|^2=\frac{1}{A_2}\|M(f)\|^2\ge\frac{1}{A_2}\frac{1}{\|M^{-1}\|^2}\|f\|^2.$$

بنابراین، $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ است. برای کامل‌کردن برهان، کافی است نشان دهیم که اگر $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$ به‌طوری‌که $\sum_{i\in I} c_i f_i = 0$، آن‌گاه به‌ازای هر $i \in I$ داریم $c_i = 0$. چون $M^*(f) = \sum_{j\in I}\langle h_j, f\rangle f_j$، پس به‌ازای هر $i \in I$ داریم $f_i = M^*(\widetilde{h_i})$ و چون M^* پیوسته است پس

$$\sum_{i\in I} c_i f_i = M^*\left(\sum_{i\in I}\overline{c_i}\widetilde{h_i}\right) = 0.$$

اما چون M پوشا است، M^* یک‌به‌یک است، لذا خواهیم داشت $\sum_{i\in I}\overline{c_i}\widetilde{h_i} = 0$ و چون $\{\widetilde{h_i}\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس است، به‌ازای هر $i \in I$ داریم $c_i = 0$ و حکم ثابت می‌شود. □

ملاحظه ۶.۲. فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب با عملگر S باشد. اگر $\{\omega_j^*\}_{j\in I}$ یک R-دوگان $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ نسبت به دو پایهٔ ریس $\{\widetilde{e_j}\}_{j\in I}$ و $\{\widetilde{h_i}\}_{i\in I}$ باشد، آن‌گاه برای هر $j, k \in I$ داریم:

$$\begin{aligned}
\langle \omega_j^f, \omega_k^*\rangle &= \left\langle \sum_{i\in I}\langle f_i, e_j\rangle h_i, \sum_{l\in I}\langle S^{-1}f_l, \widetilde{e_k}\rangle \widetilde{h_l}\right\rangle \\
&= \sum_{i\in I}\langle f_i, e_j\rangle\langle \widetilde{e_k}, S^{-1}f_i\rangle \\
&= \left\langle \widetilde{e_k}, \sum_{i\in I}\langle e_j, f_i\rangle S^{-1}f_i\right\rangle \\
&= \langle \widetilde{e_k}, e_j\rangle = \delta_{jk}.
\end{aligned}$$

قضیهٔ زیر را که در واقع تعمیمی از نکتهٔ فوق است، می‌توان به‌عنوان روابط دومتعامدی **وِکسلر- راز** [1] [۱۱] در نظریهٔ قاب‌های مجرد دانست.

قضیه ۷.۲. فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ و $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in I}$ دو قاب و $\{h_i\}_{i\in I}$ ، $\{e_j\}_{j\in I}$ دو پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشند. همچنین فرض می‌کنیم M_1، M_2 و $S_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ روی $\mathcal{H}$ به‌صورت زیر تعریف شوند:

$$M_1(f) = \sum_{i\in I}\langle f_i, f\rangle h_i, \qquad M_2(f) = \sum_{i\in I}\langle g_i, f\rangle \widetilde{h}_i, \qquad S_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(f) = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle g_i,$$

در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

(۱) $\mathcal{F}$ یک دوگان برای $\mathcal{G}$ است.

(۲) $S_{\mathcal{F},\mathcal{G}} = S_{\mathcal{G},\mathcal{F}} = Id_{\mathcal{H}}$.

(۳) برای هر $j, k \in I$ داریم $\langle M_1(e_j), M_2(\widetilde{e}_k)\rangle = \delta_{jk}$.

اثبات. با توجه به تعریف دوگان یک قاب، هم ارزی (۱) و (۲) واضح است.
(۲) ⇐ (۳). چون $S_{\mathcal{F},\mathcal{G}} = S_{\mathcal{G},\mathcal{F}} = Id_{\mathcal{H}}$ و با در نظر گرفتن اینکه $\{h_i\}_{i\in I}$ و $\{\widetilde{h}_i\}_{i\in I}$ دومتعامد هستند، داریم

$$\langle M_1(f), M_2(g)\rangle = \langle g, f\rangle.$$

لذا

$$\langle M_1(e_j), M_2(\widetilde{e}_k)\rangle = \langle \widetilde{e}_k, e_j\rangle = \delta_{jk}.$$

(۳) ⇐ (۲). فرض کنیم (۳) برقرار باشد. با توجه به تعریف M_1، M_2 و $S_{\mathcal{G},\mathcal{F}}$، برای هر $x, y \in \mathcal{H}$ داریم،

$$\langle M_1(x), M_2(y)\rangle = \langle S_{\mathcal{G},\mathcal{F}}(y), x\rangle.$$

[1] Wexler-Raz

اینک، با استفاده از فرض، تساوی زیر حاصل می‌شود:

$$\delta_{jk} = \langle \widetilde{e}_k, e_j \rangle = \langle e_j, \widetilde{e}_k \rangle = \langle M_1(e_j), M_2(\widetilde{e}_k) \rangle = \langle S_{\mathcal{G},\mathcal{F}}(\widetilde{e}_k), e_j \rangle.$$

پس $S_{\mathcal{G},\mathcal{F}}(\widetilde{e}_k) = \widetilde{e}_k$ (برای هر $k \in I$). حال چون $S_{\mathcal{G},\mathcal{F}}$ یک عملگر کران‌دار و $\{\widetilde{e}_j\}_{j\in I}$ یک دنبالهٔ کامل در $\mathcal{H}$ است، خواهیم داشت $S_{\mathcal{G},\mathcal{F}} = Id_{\mathcal{H}}$. با اثباتی مشابه، تساوی $S_{\mathcal{F},\mathcal{G}} = Id_{\mathcal{H}}$ نیز حاصل می‌شود. $\square$

لازم به ذکر است که قضیه ۳ در [۵] حالت خاصی از قضیهٔ فوق است.

References

[1] Casazza, P., Kutyniok, G., & Lammers, M.C. (2004). Duality principles in frame theory. *J. Fourier Anal. Appl*, 10, 383–408. DOI: https://doi.org/10.1007/s00041-004-3024-7.

[2] Casazza, P., Kutyniok, G., & Lammers, M.C. (2005). Duality principle, localization of frames, and Gabor theory, Optics and photonics. *International Society for Optics and Photonics*. DOI: https://doi.org/10.1117/12.615440.

[3] Christensen, O., Kim, H.O., & Kim, R.Y. (2011). On the duality principle by Casazza, Kutyniok, and Lammers. *J. Fourier Anal. Appl*, 17, 640–655. DOI: https://doi.org/10.1007/s00041-010-9151-4.

[4] Chuang, Z., & Zhao, J. (2015). On equivalent conditions of two sequences to be R-dual. *Journal of Inequalities and Applications*, 10, 1–8. DOI: https://doi.org/10.1186/s13660-014-0529-8.

[5] Feichtinger, H.G., & Grochenig, K. (1997). Gabor frames and Time-Frequency Analysis of Distributions. *Journal of Functional Analysis*, 146, 464–495. DOI: https://doi.org/10.1006/jfan.1996.3078.

[6] Folland, G.B. (1994). A Course in Abstract Harmonic Analysis. *CRC Press*. DOI: https://doi.org/10.1201/b19172.

[7] Gabor, D. (1946). Theory of communications. *J. Inst. Elec. Eng*, 93, 429–457.

[8] Gröchenig, K. (2001). Foundation of time-frequency analysis. *Birkhäuser, Boston*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0003-1.

[9] Ron, A., & Shen, Z. (1997). Weyl-Heisenberg frames and Riesz bases in $L_2(\mathbb{R})$. *Duke Math. J*, 89, 237–282. DOI: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-97-08913-4.

[10] Stoeva, D.T., & Christensen, O. (2015). On R-duals and the duality principle in Gabor analysis. *J. Fourier Anal. Appl*, 21, 383–400. DOI: https://doi.org/10.1007/s00041-014-9376-8.

[11] Wexler, J., & Raz, S. (1990). Discrete Gabor expansions. *Signal Proc*, 21, 207–220. DOI: https://doi.org/10.1016/0165-1684(90)90087-F.

[12] Xiao, X.M., & Zhu, Y.C. (2009). Duality principle of frames in Banach spaces. *Acta. Math. Sci. Ser. A. Chin*, 29, 94–102.

Measure Algebras and Applications

Woven frames and modular Riesz bases in Hilbert C^*-modules

Mohammad Reza Farmani[1] ✉, **Amir Khosravi**[2]

1. Corresponding Author, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Kharazmi University, 599 Taleghani Ave., Tehran 15618, Iran. Email: mr.farmanis@gmail.com
2. Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Kharazmi University, 599 Taleghani Ave., Tehran 15618, Iran. Email: khosravi@khu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 3 May 2023
Received in revised form: 19 July 2023
Accepted: 22 July 2023
Published Online: 30 September 2023

Keywords:
Frame,
Woven frame,
P-woven frame,
Hilbert C^*-module

2020 Mathematics Subject Classification:
42C15

ABSTRACT

In this paper, we investigate woven frames, P-woven and CP-woven frames in Hilbert C^*-modules. We also study frames, Riesz bases, and modular Riesz bases in Hilbert C^*-modules. We show that modular Riesz bases share some properties with Riesz bases in Hilbert spaces. We generalize some main results in Hilbert spaces to Hilbert C^*-modules and we get some results about perturbation and redundancy of woven frames.

Cite this article: Farmani, M.R., & Khosravi, A. (2023). Woven frames and modular Riesz bases in Hilbert C^*-modules. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 22–35. http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9392.1000

Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/MAA.2023.9392.1000

Extended Abstract

Introduction

Hilbert space frames were originally introduced by Duffin and Schaeffer to deal with some problems in non-harmonic Fourier analysis [8], [7]. Frames can be viewed as redundant bases which are generalizations of Riesz bases [3], [4], [5], [6], [2], [12], [13],[17]. This redundancy property sometimes is extremely important in some applications such as signal and image processing, data compression, and sampling theory.

In recent years, many mathematicians get significant results by extending the theory of frames from Hilbert spaces to Hilbert C^*-modules. Hilbert C^*-modules are generalizations of Hilbert spaces by allowing the inner product to take values in a C^*-algebra rather than in the field of real or complex numbers. They were introduced and investigated initially by Kaplansky (see also [11, 15]). Frank and Larson [9] introduced the concept of frames in finitely or countably generated Hilbert C^*-modules over a unital C^*-algebra. The second author and B. Khosravi in [12] introduced modular Riesz bases in Hilbert C^*-modules and showed that they share many properties with Riesz bases in Hilbert spaces. Frames in Hilbert C^*-modules are called Hilbert C^*-modular frames or just simply modular frames. Recently, Bemrose, Casazza, Grochenig, Lammers, and Lynch in [3] (see also [5], [14], [18]) introduced the concept of weaving frames which is motivated by a problem regarding distributed signal processing.

Let $\{f_i\}_{i\in I}$ and $\{g_i\}_{i\in I}$ be two frames for a Hilbert space H. $\{\{f_i\}_{i\in I}, \{g_i\}_{i\in I}\}$ is said to be woven if there are universal constants A and B so that for every subset σ of I, the family $\{f_i\}_{i\in\sigma}\bigcup\{g_i\}_{i\in\sigma^c}$, is a frame for H with lower and upper frame bounds A and B, respectively. The family $\{f_i\}_{i\in\sigma}\bigcup\{g_i\}_{i\in\sigma^c}$ is called a weaving, for more details see [5]. $\{\{f_i\}_{i\in I}, \{g_i\}_{i\in I}\}$ is called partition-woven, or simply P-woven, if there exists a nonempty proper subset σ of I such that $\{f_i\}_{i\in\sigma}\bigcup\{g_i\}_{i\in\sigma^c}$ is a frame (see [5]).

Conclusion

In this paper, the following definitions are stated:

***Definition* 0.1.** *A pre-Hilbert A-module is a left A-module H equipped with an A-valued inner product $\langle .,.\rangle : H\times H \longrightarrow A$, such that*
(i) $\langle x,x\rangle \geq 0$ for all $x\in H$ and $\langle x,x\rangle = 0$ if and only if $x=0$,
$(ii)\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle^*$ for all $x,y\in H$,
(iii) $\langle ax+y,z\rangle = a\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$ for all $a\in A$ and $x,y,z\in H$.

***Definition* 0.2.** *Let A be a unital C^*-algebra. A sequence $\{x_i : i\in I\}$ in H is called a frame for H, if there exist two constants $0<C\leq D<\infty$ such that*

$$C|x|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq D|x|^2,$$

for every $x\in H$, it is called a tight frame if $C=D$, is called a Parseval frame if $C=D=1$ and is called a Bessel sequence, if the right-hand side inequality is required.

***Definition* 0.3.** *(i) A frame $\{x_i : i \in I\}$ for H is called a Riesz basis if $x_i \neq 0$ for each $i \in I$ and $\sum_{i\in S} a_i x_i = 0$ for coefficients $\{a_i : i \in S\} \subseteq A, S \subseteq I$, implies that $a_i x_i = 0$ for each $i \in S$.*
(ii) Let $\{x_i : i \in I\} \subseteq H$ be a sequence in H. We say that $\{x_i : i \in I\}$ is a modular Riesz basis, if there exists an invertible $U \in B(\ell^2_I(A), H)$ such that for every $\{a_i : i \in I\}$ in $\ell^2_I(A)$, $U(\sum_{i\in I} a_i e_i) = \sum_{i\in I} a_i x_i$, where $\{e_i : i \in I\}$ is the standard orthonormal basis of $\ell^2_I(A)$.

***Definition* 0.4.** *A sequence $\{x_i : i \in I\}$ in H which is a frame for its closed A-linear hull is called a frame sequence. If every subsequence of $\{x_i : i \in I\}$ is a frame sequence, we say that the frame has the subframe property. If $\{x_i : i \in I\}$ is a frame for H with the subframe property and additionally there are uniform upper and lower frame bounds for all subsequences of the frame, then we call $\{x_i : i \in I\}$ a Riesz frame.*

***Definition* 0.5.** *A family $\{x_i^j : i \in I\}$ for $j = 1, 2, ..., m$ of frames in H is called woven, if there exist constants $C, D > 0$ such that for every partition $P = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ of I, $\{x_i^j : i \in \sigma_j, j = 1, 2, ..., m\}$ is a frame with bounds C, D. Each family $\{x_i^j : i \in \sigma_j, j = 1, 2, ..., m\}$ is called a weaving.*

***Definition* 0.6.** *(i) A family $\{x_i^j : i \in I\}$, $j = 1, 2, ..., m$ of Bessel sequences in H is called a P-woven frame, if there exists a partition $P = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ of I such that $\{x_i^j : i \in \sigma_j, j = 1, 2, ..., m\}$ is a frame for H.*
(ii) A family $\{x_i^j : i \in I\}$ for $j = 1, 2, ..., m$ of Bessel sequences in H is CP-woven, if there exists a partition $P = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ of I such that for each permutation $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ of $\{1, 2, ..., m\}$, $\{x_i^j : i \in \sigma_{\lambda_j}, j = 1, 2, ..., m\}$ is a frame for H.

Also, the next theorems and propositions are presented:

***Theorem* 0.7.** *Let $\{x_i = Ue_i : i \in I\}$ be a modular Riesz basis. Then*
(i) $\{x_i : i \in I\}$ is a frame with synthesis operator U and with a unique dual frame $\{(U^*)^{-1}(e_i) : i \in I\}$, which is a modular Riesz basis.
(ii) If $\sum_{i\in I} a_i x_i = 0$, for some $\{a_i : i \in I\} \subseteq A$, then $a_i = 0$ for each $i \in I$.
(iii) If $\sum_{i\in I} a_i x_i$ converges for some $\{a_i : i \in I\} \subseteq A$, then $\{a_i : i \in I\} \in \ell^2_I(A)$.
(iv) There exist $0 < A \leq B < \infty$ such that for every $\{a_i : i \in I\} \in \ell^2_I(A)$,

$$A \left\| \sum_{i\in I} |a_i|^2 \right\| \leq \left\| \sum_{i\in I} a_i x_i \right\|^2 \leq B \left\| \sum_{i\in I} |a_i|^2 \right\| .$$

***Theorem* 0.8.** *Let $\{x_i : i \in I\}$ be a frame for H with analysis operator $T : H \to \ell^2_I(A)$. Then the following are equivalent:*
(i) $\{x_i : i \in I\}$ is a modular Riesz basis.
(ii) $T^* : \ell^2_I(A) \to H$ is one to one.
(iii) $\{x_i : i \in I\}$ has a unique dual frame.
(iv) There exist positive constants A, B such that for every $\{a_i : i \in I\}$ in $\ell^2_I(A)$,

$$A \left\| \sum_{i\in I} |a_i|^2 \right\| \leq \left\| \sum_{i\in I} a_i x_i \right\|^2 \leq B \left\| \sum_{i\in I} |a_i|^2 \right\| .$$

***Proposition* 0.9.** *Every modular Riesz basis has the subframe property.*

***Proposition* 0.10.** *Let* $\{x_i^j : i \in I\}$ *for* $j = 1, 2, ..., m$ *be a woven frame for* H *and* $Q \in B(H)$ *be surjective. Then* $\{Qx_i^j : i \in I\}$ *for* $j = 1, 2, ..., m$ *is a woven frame.*

***Theorem* 0.11.** *Let* $\{x_i^j : i \in I\}$ *for* $j = 1, 2, ..., m$ *be a woven frame with bounds* C, D*. Suppose that* $J \subseteq I$ *for which there exist a constant* $0 < E < C$ *and a partition* $P = \{\sigma_1', \sigma_2', ..., \sigma_m'\}$ *of* J *such that for every* $x \in H$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in \sigma_j'} | \langle x, x_i^j \rangle |^2 \leq E | x |^2 .$$

Then $\{x_i^j : i \in I \setminus J\}$ *for* $j = 1, 2, ..., m$ *is a woven frame for* H*.*

***Theorem* 0.12.** *Let* $\{x_i^j : i \in I\}$ *be a frame with bounds* C_j, D_j *for each* $j = 1, 2, ..., m$ *such that there exist a constant* $0 < E < \sum_{j=1}^{m} C_j$ *and a partition* $P = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ *of* I *such that*

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in \sigma_j^c} | \langle x, x_i^j \rangle |^2 \leq E | x |^2 \qquad (x \in H).$$

Then $\{x_i^j : i \in I\}$ *for* $j = 1, 2, ..., m$ *is a P-woven frame.*

***Theorem* 0.13.** *Let* $\{x_i^j : i \in I\}$ *be a frame for* H *with frame operator* S_j *for each* $j = 1, 2, ..., m$*. Assume that there exist a constant* $0 < E < m$ *and a partition* $P = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ *of* I *such that*

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in \sigma_j^c} | \langle x, S_j^{-\frac{1}{2}} x_i^j \rangle |^2 \leq E | x |^2,$$

for every $x \in H$*. Then the family* $\{S_j^{-\frac{1}{2}} x_i^j : i \in I\}$, $j = 1, 2, ..., m$ *is a P-woven frame for* H*.*

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۳۵-۲۲

قاب‌های درهم‌تنیده و پایه‌های ریس مدولار در C^*- مدول‌های هیلبرت

محمدرضا فرمانی [۱] ✉، **امیر خسروی** [۲]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. رایانامه: mr.farmanis@gmail.com
۲. گروه ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. رایانامه: khosravi@khu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۲/۱۳
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۴/۲۸
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۴/۳۱
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
قاب،
قاب درهم‌تنیده،
$P-$ قاب درهم‌تنیده،
C^*- مدول هیلبرت

رده‌بندی ریاضی:
42C15

چکیده

در این مقاله، قاب‌ها، پایهٔ ریس و پایهٔ ریس مدولار در C^*- مدول‌های هیلبرت را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. نشان خواهیم داد که برخی از خواص پایه‌های ریس از یک فضای هیلبرت به پایه‌های ریس مدولار قابل انتقال هستند. سپس قاب‌های درهم‌تنیده، قاب‌های $P-$ درهم‌تنیده و قاب‌های CP- درهم‌تنیده در C^*- مدول‌های هیلبرت مورد مطالعه و بحث قرار خواهند گرفت. علاوه‌بر این، برخی از نتایج به‌دست‌آمده در فضاهای هیلبرت را به C^*- مدول‌های هیلبرت، تعمیم خواهیم داد و نتایجی دررابطه‌با آشفتگی و افزونگی قاب‌های درهم‌تنیده ارائه خواهیم کرد.

استناد: فرمانی، محمدرضا، خسروی، امیر. (۱۴۰۲). قاب‌های درهم‌تنیده و پایه‌های ریس مدولار در C^*- مدول‌های هیلبرت. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۳۵-۲۲.

http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9392.1000

ناشر: دانشگاه قم.

۱ تاریخچه و تعاریف

قاب‌ها در فضاهای هیلبرت برای اولین بار توسط دافین و شفر در حل برخی از مسائل آنالیز هارمونیک غیرهمساز معرفی و مورد استفاده قرار گرفتند [۸]، [۷]. قاب‌ها، در حقیقت توسیع‌یافتهٔ پایه‌های فضاهای برداری هستند که می‌توان آن‌ها را به پایه‌های ریس تعمیم داد. مراجع [۳]، [۴]، [۵]، [۶]، [۲]، [۱۲]، [۱۳]، [۱۷] را ملاحظه نمایید. از خاصیت قاب‌ها در حل برخی از مسائل کاربردی مانند پردازش سیگنال و تصویر، فشرده‌سازی داده‌ها و نظریهٔ نمونه‌گیری که دارای اهمیت بسیاری است، استفاده می‌شود.

در سال‌های اخیر، بسیاری از ریاضی‌دانان از جمله کاپلانسکی [1]، فرانک [2] و لارسون[3] [۱۱]، [۹]، [۱۰]، [۱۵] ، با تعمیم نظریهٔ قاب‌ها از فضاهای هیلبرت به C^*- مدول‌های هیلبرت به نتایج قابل توجهی دست یافته‌اند. یک C^*- مدول هیلبرت در واقع تعمیم یک فضای هیلبرت با یک ضرب داخلی است که برد آن به‌جای اینکه مقادیری از میدان اعداد حقیقی یا مختلط باشد، مقادیری از یک C^*- جبر است.

نویسندهٔ دوم مقاله و ب. خسروی در [۱۲] پایه‌های ریس مدولار در C^*- مدول‌های هیلبرت را معرفی نموده‌اند. قاب‌ها در فضاهای هیلبرت به‌طور طبیعی حالت ابتدایی یا اولیهٔ قاب‌ها در C^*- مدول‌های هیلبرت هستند. اخیراً، بمروسو، کاسازا، گراچین، لامرس و دیگران در [۳]، (مراجع [۵]، [۱۴]، [۱۸] را هم ملاحظه کنید) مفهوم جدیدی به نام قاب‌های درهم‌تنیده را مطرح و مورد بررسی قرار داده‌اند که موجب پردازش سیگنال‌های فرستاده‌شده می‌شود. برای مثال، پیام‌های ارسالی که به‌صورت چندین قاب هستند، در شبکهٔ حسگر بی‌سیم دریافت می‌شوند و مورد پردازش قرار می‌گیرند و از هم تفکیک می‌شوند و در نتیجه پیام اصلی تشخیص داده می‌شود.

$\{\{f_i\}_{i\in I}, \{g_i\}_{i\in I}\}$ را یک قاب درهم‌تنیده گویند، هرگاه ثابت‌های جهانی A و B موجود باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ σ از I، خانوادهٔ $\{f_i\}_{i\in\sigma} \cup \{g_i\}_{i\in\sigma^c}$ یک قاب در H با کران‌های پایینی و بالایی به ترتیب A و B باشد. خانوادهٔ $\{f_i\}_{i\in\sigma} \cup \{g_i\}_{i\in\sigma^c}$ را تنیدگی گویند. جزئیات بیشتر در [۵] قابل مشاهده است. $\{\{f_i\}_{i\in I}, \{g_i\}_{i\in I}\}$ را قاب افراز-درهم‌تنیده یا $P-$ درهم‌تنیده گویند، هرگاه زیرمجموعهٔ محض σ از I، موجود باشد به‌طوری‌که خانوادهٔ $\{f_i\}_{i\in\sigma} \cup \{g_i\}_{i\in\sigma^c}$ یک قاب در H باشد ([۵] را ملاحظه نمایید).

در این مقاله، ابتدا برخی از تعاریف و خواص پایه‌ای از C^*- مدول‌های هیلبرت، قاب‌های درهم‌تنیده و قاب‌های $P-$ درهم‌تنیده در C^*- مدول‌های هیلبرت را بیان خواهیم نمود. همچنین، قاب‌های درهم‌تنیده، قاب‌های $P-$ درهم‌تنیده و قاب‌های $CP-$ درهم‌تنیده روی تعداد متناهی از قاب‌ها را مورد بحث‌وبررسی قرار خواهیم داد و برخی از خواصی که در فضای هیلبرت برقرار است و به C^*- مدول‌های هیلبرت منتقل می‌شوند، را مطرح خواهیم کرد. علاوه‌بر این، پایه‌های ریس و پایه‌های ریس مدولار را در C^*- مدول‌های هیلبرت مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

در کل مقاله، I یک زیرمجموعهٔ متناهی یا نامتناهی از $\mathbb{N}$، A یک C^*- جبر یکدار و H، K_i، A- مدول‌های به‌طور متناهی یا شمارا تولیدشده هستند. به‌ازای هر $i \in I$ ، $B(H, K_i)$ نماد مجموعهٔ همهٔ عملگرهای الحاقی‌پذیر از H به K_i است. فرض کنید $\ell^2_I(A)$، A- مدول هیلبرت تعریف‌شده به‌صورت زیر باشد:

$$\ell^{2}_I(A) = \left\{ \{a_i\}_{i\in I} \subseteq A \mid \sum_{i\in I} a_i a_i^* \text{ با نرم همگرا باشد.} \right\}.$$

تعریف ۱.۱. یک پیش A- مدول هیلبرت H عبارت است از یک A- مدول چپ H با ضرب داخلی A-مقداری $\langle .,. \rangle : H \times H \longrightarrow A$، به‌طوری‌که در شرایط زیر صدق نماید:

آ) به‌ازای هر $x \in H$، $\langle x,x \rangle \geq 0$ و $\langle x,x \rangle = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

ب) به‌ازای هر $x, y \in H$، $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle^*$.

ج) برای هر $a \in A$ و $x, y, z \in H$، $\langle ax+y, z \rangle = a\langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$.

فرض می‌کنیم اعمال خطی روی A و H شرکت‌پذیر هستند. یعنی به‌ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$، $a \in A$ و $x \in H$ ، $\lambda(ax) = (\lambda a)x$.

به‌ازای هر $x \in H$، تعریف می‌کنیم:

$$\|x\| = \|\langle x,x \rangle\|^{\frac{1}{2}}, \quad |x| = \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

اگر پیش A- مدول هیلبرت H، $(H, \langle .,. \rangle)$ تحت نرم $\|.\|$ کامل باشد، آن را یک C^*- مدول هیلبرت نامند. در این مقاله بر C^*- مدول‌های هیلبرت به‌طور متناهی و شمارش‌پذیر تولیدشده روی C^*- جبر یکدار A متمرکز هستیم.

A- مدول هیلبرت H را به‌طور متناهی تولیدشده گوییم، هرگاه زیرمجموعهٔ متناهی $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ از H وجود داشته باشد، به‌طوری‌که

[1] Kaplansky
[2] Frank
[3] Larson

به‌ازای هر $x \in H$ بتوان آن را به‌وسیلهٔ پیمانهٔ $A-$ خطی با ضرایبی از جبر A بیان نمود. یعنی $x = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i, \quad a_i \in A$. برای دیدن جزئیات بیشتر [۱۵] را ملاحظه کنید.

اکنون تعاریف قاب و پایهٔ ریس در C^*- مدول‌های هیلبرت را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم A یک C^*-جبر و I مجموعهٔ اندیس‌گذار متناهی یا شمارا باشد. دنبالهٔ $\{x_i : i \in I\}$ از عناصر C^*- مدول هیلبرت H را قاب گویند، هرگاه ثابت‌های $0 < C \leq D < \infty$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in H$،

$$C\langle x, x\rangle \leq \sum_{i\in I}\langle x, x_i\rangle\langle x_i, x\rangle \leq D\langle x, x\rangle. \tag{۱.۱}$$

ثابت‌های مطلوب (یعنی، اینفیمم D و سوپریمم C) را کران‌های قاب گویند. اگر $C = D$، آنگاه قاب $\{x_i : i \in I\}$ را تنگ [۱] نامند و درصورتی‌که $C = D = 1$ قاب را پارسوال گویند. دنبالهٔ $\{x_i : i \in I\}$ را بسل گویند، هرگاه فقط نامساوی سمت راست بالا برقرار باشد. اگر سری ۲.۲ به‌ازای هر $x \in H$ در نرم همگرا باشد، آنگاه قاب را استاندارد گویند.

آرام بیسیک [۱] ثابت کرد که $\{x_i : i \in I\} \subseteq H$ یک قاب استاندارد است اگر و تنها اگر ثابت‌های $0 < C \leq D < \infty$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$C\|x\|^2 \leq \left\|\sum_{i\in I}|\langle x, x_i\rangle|^2\right\| \leq D\|x\|^2, \qquad (x \in H). \tag{۲.۱}$$

توجه داشته باشید که می‌توانیم عملگر تحلیل، عملگر ترکیب و عملگر قاب را تعریف کنیم.
به‌ازای هر دنبالهٔ بسل $H \supseteq \{x_i : i \in I\}$، عملگر تحلیل $T : H \to \ell_I^2(A)$ به‌صورت $Tx = \{\langle x, x_i\rangle\}_{i\in I}$، تعریف می‌شود که عملگر الحاقی آن به‌صورت، $T^* : \ell^2(A) \to H$، $T^*\{a_i\}_{i\in I} = \sum_{i\in I} a_i x_i$ است، درصورتی‌که این دو عملگر را ترکیب کنیم، عملگر قاب $S : H \to H$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$Sx = T^*Tx = \sum_{i\in I}\langle x, x_i\rangle x_i \qquad (x \in H). \tag{۳.۱}$$

قاب $\{S^{-1}x_i : i \in I\}$ را دوگان کانونی قاب $\{x_i : i \in I\}$ گویند.
همچنین از معادله ۱۰.۲ به‌ازای هر $x \in H$ خواهیم داشت:

$$x = SS^{-1}x = \sum_{i\in I}\langle S^{-1}x, x_i\rangle x_i = \sum_{i\in I}\langle x, S^{-1}x_i\rangle x_i. \tag{۴.۱}$$

۲ پایه‌های ریس

در این بخش پایه‌های ریس و پایه‌های ریس مدولار مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

تعریف ۱.۲. آ) قاب $\{x_i : i \in I\}$ از H را پایهٔ ریس گویند، هرگاه به‌ازای هر $i \in I$, $x_i \neq 0$ و درصورتی‌که $\sum_{i\in S} a_i x_i = 0$ که در آن $\{a_i : i \in S\} \subseteq A$ و $S \subseteq I$، بتوان نتیجه گرفت که $i \in S$، $a_i x_i = 0$.
ب) دنبالهٔ $\{x_i : i \in I\} \subseteq H$ را یک پایهٔ ریس مدولار گویند هرگاه عملگر وارون‌پذیر $U \in B(\ell_I^2(A), H)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $\{a_i : i \in I\} \in \ell_I^2(A)$، $U(\sum_{i\in S} a_i e_i) = \sum_{i\in S} a_i x_i$، که در آن $\{e_i : i \in I\}$ پایهٔ متعامد استاندارد $\ell_I^2(A)$ است، یعنی $e_j = (\delta_{ij}1_A)_{i\in I}$.

قضیه ۲.۲. فرض کنید $\{x_i = Ue_i : i \in I\}$ یک پایهٔ ریس مدولار باشد. در این صورت،
آ) $\{x_i : i \in I\} \subseteq H$ یک قاب با عملگر ترکیب U و دوگان کانونی قاب $\{(U^*)^{-1}e_i : i \in I\}$ است که یک پایهٔ ریس مدولار است.
ب) اگر $\{a_i : i \in S\} \subseteq A$ موجود باشد به‌طوری‌که $\sum_{i\in S} a_i x_i = 0$، آنگاه به‌ازای هر $i \in S$، $a_i = 0$.
ج) اگر $\{a_i : i \in I\} \subseteq A$ موجود باشد به‌طوری‌که $\sum_{i\in I} a_i x_i$ همگرا باشد، آنگاه $\{a_i : i \in I\} \in \ell_I^2(A)$.
د) ثابت‌های $0 < A \leq B < \infty$ موجود هستند به‌طوری‌که به‌ازای هر $\{a_i : i \in S\} \in \ell_I^2(A)$،

$$A\left\|\sum_{i\in I}|a_i|^2\right\| \leq \left\|\sum_{i\in I} a_i x_i\right\|^2 \leq B\|U\|^2\|x\|^2.$$

[1] tight

اثبات. آ) فرض کنید $x \in H$. آنگاه

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i\in I}|\langle x, Ue_i\rangle|^{۲}\right\| &= \left\|\sum_{i\in I}|\langle U^*(x), e_i\rangle|^{۲}\right\| \\ &= \|U^*x\|^{۲} \\ &\leq \|U\|^{۲}\|x\|^{۲}.\end{aligned}$$

همچنین

$$\left\|\sum_{i\in I}|\langle x, Ue_i\rangle|^{۲}\right\| = \|U^*x\|^{۲} \geq \frac{۱}{\|U^{-۱}\|^{۲}}\|x\|^{۲}.$$

بنابراین $\{x_i : i\in I\}$ یک قاب با کران‌های $\|U\|^{۲}, \|U^{-۱}\|^{-۲}$ است و U عمگر ترکیب است. از سوی دیگر، $U^{-۱}x \in \ell^{۲}_I(A)$ و در نتیجه $U^{-۱}x = \sum_{i\in I}\langle U^{-۱}x, e_i\rangle e_i$. پس

$$U^{-۱}x = \sum_{i\in I}\langle x, (U^{-۱})^*e_i\rangle e_i, \quad x = \sum_{i\in I}\langle x, (U^*)^{-۱}e_i\rangle x_i,$$

نشان می‌دهد که $\{(U^*)^{-۱}e_i : i \in I\}$ یک دوگان قاب برای $\{x_i : i\in I\}$ است که یک پایهٔ ریس مدولار است.

ب) اگر $\{a_i : i\in S\} \in \ell^{۲}_I(A)$ موجود باشد که $\sum_{i\in S} a_ix_i = ۰$، آنگاه $U(\sum_{i\in S}a_ie_i) = ۰$ و چون U عملگر یک‌به‌یک است $\sum_{i\in S}a_ie_i = ۰$ از سوی دیگر $\{e_i : i\in I\}$ پایهٔ متعامد است، پس به‌ازای هر $i\in S$، $a_i = ۰$، در نتیجه دوگان قاب منحصربه‌فرد است.

ج) فرض کنید $\{a_i : i\in I\} \subseteq A$ و $\sum_{i\in I}a_ix_i$ همگرا باشد. آنگاه به‌ازای هر زیرمجموعهٔ متناهی $J \subseteq I$، داریم

$$\begin{aligned}\frac{۱}{\|U^{-۱}\|^{۲}}\left\|\sum_{i\in J}a_ie_i\right\|^{۲} &\leq \left\|\sum_{i\in J}a_ix_i\right\|^{۲} \\ &= \left\|U(\sum_{i\in J}a_ie_i)\right\|^{۲} \\ &\leq \|U\|^{۲}\left\|\sum_{i\in J}a_ie_i\right\|^{۲}.\end{aligned}$$

در نتیجه $\sum_{i\in I}a_ix_i$ همگرا است اگر و تنها اگر $\sum_{i\in I}a_ie_i$ همگرا باشد، بنابراین حکم ثابت می‌شود.
قسمت (د) از (ج) نتیجه می‌شود. □

می‌دانیم که در فضاهای هیلبرت، هر پایهٔ ریس دارای یک دوگان منحصربه‌فرد است که خود نیز یک پایهٔ ریس است، ولی در C^*-مدول‌های هیلبرت به دلیل مقسم صفر بودن، یک پایهٔ ریس لزوماً دارای دوگان پایهٔ ریس منحصربه‌فردی نیست. علاوه‌بر این در فضاهای هیلبرت، اگر $\{x_i : i\in I\}$ یک پایهٔ ریس و به‌ازای هر دنبالهٔ $\{c_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{C}$، سری $\sum_{i\in I}c_ix_i$ همگرا باشد، آنگاه $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^{۲}(I)$. ولی در C^*- مدول‌های هیلبرت مثال‌هایی در [۱۰] موجود هستند که نشان می‌دهند این گزاره برقرار نیست.

مثال ۳.۲. فرض کنید $A = M_{۲\times۲}(\mathbb{C})$، C^*- جبر همهٔ ماتریس‌های ۲×۲ باشد. آنگاه $H := A$ ، A- مدول با ضرب داخلی $\langle A, B\rangle = AB^*$ است. بنابر مثال [۱۰، مثال ۴.۳]، ماتریس $E_{i,j}$ که در آن، (i,j)-درایهٔ ماتریس ۱ و سایر درایه‌ها ۰ باشند، را در نظر می‌گیریم. در این صورت، $x = \{E_{۱,۱}, E_{۲,۲}\}$ یک پایهٔ ریس با دوگان قاب $\{E_{۱,۱}+E_{۲,۱}, E_{۲,۲}\}$ است. به‌وضوح، دوگان x، پایهٔ ریس مدولار نیست.

مثال ۴.۲. فرض کنید $A = l^\infty$ مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های کران‌دار مختلط مقدار باشد. به‌ازای هر $x = \{x_i : i\in\mathbb{N}\}$ و $y = \{y_i : i\in\mathbb{N}\}$ تعریف می‌کنیم $xy = \{x_iy_i : i\in\mathbb{N}\}$، $x^* = \{\bar{x}_i : i\in\mathbb{N}\}$ و $\|x\| = \sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i|$. در نتیجه، A یک C^*- جبر است. فرض کنید $H = c_۰$ مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های همگرا به صفر باشد. آنگاه H ، A- مدول با ضرب داخلی

$\langle u, v\rangle = uv^*$ است. در [۱۰، مثال ۲.۳ و ۶.۳]، مشاهده می‌شود که اگر به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$ قرار دهیم $e_i = \{\delta_{i,j}1 : j \in \mathbb{N}\}$ و قرار دهیم $\{x_i = e_i : i \in \mathbb{N}\}$ و $\{y_i : i \in \mathbb{N}\}$، $y_1 = y_2 = e_1 + e_2$ و به‌ازای $i \geq 3$، $y_i = e_i$، آنگاه $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ یک پایهٔ ریس است و $\{y_i : i \in \mathbb{N}\}$ دوگان قاب $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ است. درحالی‌که $\{y_i : i \in \mathbb{N}\}$ پایهٔ ریس نیست؛ بنابراین $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ پایهٔ ریس مدولار نیست.

دنبالهٔ $\{x_i : i \in I\}$ در C^*-مدول هیلبرت H را دنبالهٔ قاب گویند، هرگاه یک قاب برای بستار A- خطی خود باشد. اگر هر زیردنباله از $\{x_i : i \in I\}$ یک دنبالهٔ قاب باشد، آنگاه قاب را دارای خاصیت زیرقاب گویند. درصورتی‌که $\{x_i : i \in I\}$ یک قاب H با خاصیت زیرقاب باشد، علاوه‌بر این، کران‌های یکنواخت بالایی و پایینی برای همهٔ زیردنباله‌ها از قاب وجود داشته باشند، آنگاه $\{x_i : i \in I\}$ را یک قاب ریس گویند.

قضیه ۵.۲. فرض کنید $\{x_i : i \in I\}$ یک قاب H با عملگر تحلیل $T : H \to \ell^2_I(A)$ باشد. در این صورت، احکام زیر معادل هستند:

آ) $\{x_i : i \in I\}$ یک پایهٔ ریس مدولار است.

ب) $T^* : \ell^2_I(A) \to H$ یک‌به‌یک است.

ج) $\{x_i : i \in I\}$ دارای یک دوگان قاب منحصربه‌فرد است.

د) ثابت‌های مثبت A, B موجود هستند به‌طوری‌که به‌ازای هر $\{a_i : i \in I\}$ در $\ell^2_I(A)$ رابطهٔ

$$A\left\|\sum_{i\in I}|a_i|^2\right\| \leq \left\|\sum_{i\in I}a_ix_i\right\|^2 \leq B\left\|\sum_{i\in I}|a_i|^2\right\|$$

برقرار است.

اثبات. (آ) $\Leftarrow$ (ب). بنابر قضیه ۲.۲ حکم برقرار است.

(ب) $\Leftrightarrow$ (ج). بنابر قضیه ۱۰.۳ در [۱۰] حکم ثابت می‌شود، زیرا T^* یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر

$$\sum_{i\in I}a_ix_i = T^*(\sum_{i\in I}a_ie_i) = 0$$

ایجاب کند که به‌ازای هر $i \in I$، $a_i = 0$.

(ب) $\Leftarrow$ (د). چون $\{x_i : i \in I\}$ یک قاب است، T^* پوشاست، بنابراین T^* یک عملگر وارون‌پذیر است و چون به‌ازای هر $i \in I$، $T^*(e_i) = x_i$، $\{x_i : i \in I\}$ یک پایهٔ ریس مدولار است و بنابر قسمت (د) قضیه ۲.۲، حکم به دست می‌آید.

(د) $\Leftarrow$ (آ). به‌وضوح (ب) برقرار است پس T^* یک‌به‌یک و از پایین کران‌دار است. بنابراین $\{x_i : i \in I\}$ یک پایهٔ ریس مدولار است و اثبات کامل می‌شود. $\square$

قضیه ۶.۲. هر پایهٔ ریس مدولار دارای خاصیت زیرقاب است.

اثبات. فرض کنیم $\{x_i : i \in I\}$ یک پایهٔ ریس مدولار H باشد. بنابراین عملگر وارون‌پذیر $U : \ell^2_I(A) \to H$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $i \in I$، $U(e_i) = x_i$ که در آن $\{e_i : i \in I\}$ پایهٔ متعامد $\ell^2_I(A)$ است. در نتیجه، برای هر $J \subseteq I$، $U' : \ell^2_J(A) \to H_J$ عملگری وارون‌پذیر است و به‌ازای هر $i \in J$، $U'(f_i) = U(e_i) = x_i$ که در آن H_J بستار A-خطی از $\{x_i : i \in J\}$ است و به‌ازای هر $i \in J$، $f_i = (\delta_{ik}1_A)_{k\in J}$، $\{f_i : i \in J\}$ پایهٔ متعامد $\ell^2_J(A)$ است. بنابراین $\{x_i : i \in J\}$ یک پایهٔ ریس مدولار است. در نتیجه $\{x_i : i \in I\}$ دارای خاصیت زیرقاب است. $\square$

۳ قاب درهم‌تنیده

ابتدا به‌طور مختصر، تعاریف و ویژگی‌های اساسی یک قاب درهم‌تنیده را یادآوری می‌کنیم. برای جزئیات بیشتر و مفاهیم اصلی نظریهٔ قاب درهم‌تنیده، [۳]، [۴]، [۵]، [۱۴] را ملاحظه کنید.

تعریف ۱.۳. خانوادهٔ $\{x_i^j : i \in I\}$، $j = 1, 2, ..., m$ در H را قاب درهم‌تنیده گویند، هرگاه ثابت‌های A, B موجود باشند که به‌ازای هر افراز $P = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ از I دنبالهٔ $\{x_i^j : i \in \sigma_j, j = 1, 2, ..., m\}$ یک قاب در H با کران‌های A و B باشد. هر خانوادهٔ $\{x_i^j : i \in \sigma_j, j = 1, 2, ..., m\}$ را یک تنیدگی گوییم.

تعریف ۲.۳. $\{x_i^j : i \in I\}$ ، $j = ۱, ۲, ..., m$ در H ، $P-$ درهم‌تنیده است، اگر افرازی مانند $P = \{\sigma_۱, \sigma_۲, ..., \sigma_m\}$ از I وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $\{x_i^j : i \in \sigma_j, j = ۱, ۲, ..., m\}$ یک قاب در H باشد.

تعریف ۳.۳. $\{x_i^j : i \in I\}$، $j = ۱, ۲, ..., m$ در H، $CP-$ درهم‌تنیده است، هرگاه افرازی از I مانند $P = \{\sigma_۱, \sigma_۲, ..., \sigma_m\}$ از I وجود داشته باشد، به‌طوری‌که برای هر جایگشت $(\lambda_۱, \lambda_۲, ..., \lambda_m)$ از $\{۱, ۲, ..., m\}$، $\{x_i^j : i \in \sigma_{\lambda_j}, j = ۱, ۲, ..., m\}$ یک قاب در H باشد.

قضیه ۴.۳. فرض کنیم $\{x_i : i \in I\}$ قابی در H و $Q \in B(H)$ پوشا باشد. در این صورت، $\{Qx_i : i \in I\}$ یک قاب در H است.

اثبات. چون $Q \in B(H)$ پوشاست، پس Q^* یک‌به‌یک و با برد بسته است؛ بنابراین $m > ۰$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in H$، $m\|x\| \leq \|Q^*x\|$. اکنون، اگر $\{x_i : i \in I\}$ یک قاب با کران‌های A, B باشد، آنگاه برای هر $x \in H$ داریم

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in I} |\langle x, Qx_i \rangle|^۲ \right\| &= \left\| \sum_{i \in I} |\langle Q^*x, x_i \rangle|^۲ \right\| \\ &\leq B\|Q^*x\|^۲ \\ &\leq B\|Q^*\|^۲\|x\|^۲. \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in I} |\langle x, Qx_i \rangle|^۲ \right\| &= \left\| \sum_{i \in I} |\langle Q^*x, x_i \rangle|^۲ \right\| \\ &\geq A\|Q^*x\|^۲ \\ &\geq Am^۲\|x\|^۲, \end{aligned}$$

و نتیجه به دست می‌آید. □

قضیه ۵.۳. فرض کنیم $\{x_i^j : i \in I\}$، $j = ۱, ۲, ..., m$ یک قاب درهم‌تنیده و $Q \in B(H)$ پوشا باشد. در این صورت، $\{Qx_i^j : i \in I\}$ ، $j = ۱, ۲, ..., m$ یک قاب درهم‌تنیده است.

اثبات. چون $\{x_i^j : i \in I\}$، $j = ۱, ۲, ..., m$ یک قاب درهم‌تنیده است، ثابت‌های $A, B > ۰$ وجود دارند به‌طوری‌که برای هر افراز $P = \{\sigma_۱, \sigma_۲, ..., \sigma_m\}$ از I، دنبالهٔ $\{x_i^j : i \in \sigma_j, j = ۱, ۲, ..., m\}$ یک قاب در H با کران‌های A و B باشد.
از سوی دیگر $Q \in B(H)$ پوشاست، بنابر اثبات قضیه ۴.۳، ثابت $m > ۰$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $x \in H$، $m\|x\| \leq \|Q^*x\|$.
اکنون بنابر قضیه ۴.۳، به‌ازای هر افراز $P = \{\sigma_۱, \sigma_۲, ..., \sigma_m\}$ از I، دنبالهٔ $\{Qx_i^j : i \in \sigma_j, j = ۱, ۲, ..., m\}$ یک قاب برای H با کران‌های $Am^۲, B\|Q^*\|^۲$ است و حکم ثابت می‌شود. □

نتیجه ۶.۳. فرض کنیم $\{x_i^j : i \in I\}$، $j = ۱, ۲, ..., m$ یک قاب $P-$ درهم‌تنیده ($CP-$درهم‌تنیده) و $Q \in B(H)$ پوشا باشد. در این صورت $\{Qx_i^j : i \in I\}$ ، $j = ۱, ۲, ..., m$ یک قاب $P-$ درهم‌تنیده ($CP-$درهم‌تنیده) است.

ملاحظه ۷.۳. فرض کنیم $\{a_i : i \in I\}$، $\{b_i : i \in I\}$ زیرمجموعه‌های C^*- جبر A باشند و $\sigma \subset I$. اگر

$$\sum_{i \in \sigma} [(a_i^* - b_i^*)b_i + b_i^*(a_i - b_i)] \geq ۰, \tag{۱.۳}$$

آنگاه

$$\left\| \sum_{i \in \sigma} | a_i - b_i |^۲ \right\| + \left\| \sum_{i \in \sigma} | b_i |^۲ \right\| \geq \left\| \sum_{i \in \sigma} | a_i |^۲ \right\|.$$

زیرا بنابر قضیه ۵.۲.۲ در [۱۶] خواهیم داشت:

$$\sum_{i\in\sigma}[(b_i^*-a_i^*)b_i+b_i^*(b_i-a_i)]\geq 0$$
$$\Leftrightarrow\ 2\sum_{i\in\sigma}b_i^*b_i-\sum_{i\in\sigma}(a_i^*b_i+b_i^*a_i)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow\ 2\sum_{i\in\sigma}b_i^*b_i-\sum_{i\in\sigma}(a_i^*b_i+b_i^*a_i)+\sum_{i\in\sigma}a_i^*a_i\geq\sum_{i\in\sigma}a_i^*a_i$$
$$\Leftrightarrow\ \sum_{i\in\sigma}|a_i-b_i|^2+\sum_{i\in\sigma}|b_i|^2\geq\sum_{i\in\sigma}|a_i|^2$$
$$\Rightarrow\ \left\|\sum_{i\in\sigma}|a_i-b_i|^2\right\|+\left\|\sum_{i\in\sigma}|b_i|^2\right\|\geq\left\|\sum_{i\in\sigma}|a_i|^2\right\|.$$

قضیه ۸.۳ فرض کنیم $\{\{x_i : i\in I\},\{y_i : i\in I\}\}$ یک قاب درهم‌تنیده با کران‌های C و D در C^*-مدول هیلبرت H باشد. فرض کنیم $Q_1,Q_2\in B(H)$ و Q_1 وارون‌پذیر باشد. اگر به‌ازای هر $x\in H$ دو مجموعهٔ $\{\langle Q_1^*x,y_i\rangle : i\in I\}$، و $\{\langle(Q_1^*-Q_2^*)x,y_i\rangle : i\in I\}$ در شرط (۱.۳) صدق نمایند و $\sqrt{\frac{C}{D}}>\| Q_1-Q_2\|\|\| Q_1^{-1}\|$، آنگاه $\{\{Q_1x_i : i\in I\},\{Q_2y_i : i\in I\}\}$ یک قاب درهم‌تنیده است.

اثبات. چون $\sqrt{\frac{C}{D}}<1$ $\|I-Q_1^{-1}Q_2\|<$، در نتیجه Q_2 وارون‌پذیر است. بنابراین $\{Q_2y_i : i\in I\}$ قاب است. اکنون به‌ازای هر $\sigma\subseteq I$ و به‌ازای هر $x\in H$ قرار می‌دهیم

$$M:=\left\|\sum_{i\in\sigma}|\langle x,Q_1x_i\rangle|^2+\sum_{i\in\sigma^c}|\langle x,Q_2y_i\rangle|^2\right\|.$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}M&=\left\|\sum_{i\in\sigma}|\langle Q_1^*x,x_i\rangle|^2+\sum_{i\in\sigma^c}|\langle Q_2^*x,y_i\rangle|^2\right\|\\&=\left\|\sum_{i\in\sigma}|\langle Q_1^*x,x_i\rangle|^2+\sum_{i\in\sigma^c}|\langle Q_1^*x+(Q_2^*-Q_1^*)x,y_i\rangle|^2\right\|.\end{aligned}$$

بنابر فرض و شرط (۱.۳) داریم

$$M\geq\left\|\sum_{i\in\sigma}|\langle Q_1^*x,x_i\rangle|^2+\sum_{i\in\sigma^c}|\langle Q_1^*x,y_i\rangle|^2\right\|-\left\|\sum_{i\in\sigma^c}|\langle(Q_2^*-Q_1^*)x,y_i\rangle|^2\right\|,$$

چون $\{y_i : i\in I\}$ دنبالهٔ بسل با کران D است، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}M&\geq C\|Q_1^*x\|^2-D\|Q_2^*-Q_1^*\|^2\|x\|^2\\&\geq\left(\frac{C}{\|Q_1^{*^{-1}}\|^2}-D\|Q_2^*-Q_1^*\|^2\right)\|x\|^2,\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}M&=\left\|\sum_{i\in\sigma}|\langle x,Q_1x_i\rangle|^2+\sum_{i\in\sigma^c}|\langle x,Q_2y_i\rangle|^2\right\|\\&\leq D\left(\|Q_1^*\|^2+\|Q_2^*\|^2\right)\|x\|^2.\end{aligned}$$

□

نتیجه ۹.۳. فرض کنیم $\{\{x_i : i \in I\}, \{y_i : i \in I\}\}$ یک قاب درهم‌تنیده در C^*- مدول هیلبرت H با کران‌های D, C باشد و عملگرهای قاب $\{x_i : i \in I\}$ و $\{y_i : i \in I\}$ به‌ترتیب S, S' باشند. در این صورت، $\{\{S^{-1}x_i : i \in I\}, \{S'^{-1}y_i : i \in I\}\}$ درهم‌تنیده است، وقتی که

$$\| S - S' \| < \sqrt{\frac{C}{D}} \| S^{-1} \|^{-1},$$

و به‌ازای هر $x \in H$، دو مجموعهٔ $\{\langle Sx, y_i\rangle : i \in I\}$ و $\{\langle (S - S')x, y_i\rangle : i \in I\}$ در شرط (۱.۳) صدق کنند.

قضیه ۱۰.۳. فرض کنیم $\{x_i^j : i \in I\}$، $j = 1, 2, ..., m$ یک قاب درهم‌تنیده با کران‌های C, D باشد. فرض کنیم که $J \subseteq I$، ثابت $0 < E < C$ و افراز $P = \{\sigma'_1, \sigma'_2, ..., \sigma'_m\}$ از J موجود باشند، به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in H$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in \sigma'_j} | \langle x, x_i^j\rangle |^2 \leq E | x |^2 .$$

در این صورت، $\{x_i^j : i \in I \setminus J\}$ ، $j = 1, 2, ..., m$ یک قاب درهم‌تنیده است.

اثبات. فرض کنیم $P = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ افرازی از $I \setminus J$ باشد. در این صورت، $P'' = \{\sigma''_1, \sigma''_2, ..., \sigma''_m\}$ افرازی از I است، که در آن به‌ازای هر $j = 1, 2, ..., m$ قرار می‌دهیم $\sigma''_j = \sigma_j \cup \sigma'_j$. به‌ازای هر $x \in H$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in \sigma_j} | \langle x, x_i^j\rangle |^2 \leq D | x |^2,$$

و

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in \sigma_j} | \langle x, x_i^j\rangle |^2 \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in \sigma''_j} | \langle x, x_i^j\rangle |^2 - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in \sigma'_j} | \langle x, x_i^j\rangle |^2 \right\| \\
&\geq \left\| \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in \sigma''_j} | \langle x, x_i^j\rangle |^2 \right\| - \left\| \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in \sigma'_j} | \langle x, x_i^j\rangle |^2 \right\| \\
&\geq (C - E)\|x\|^2
\end{aligned}$$

و نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

اکنون می‌توانیم قضیه ۱.۳ در [۴] را به C^*- مدول‌های هیلبرت تعمیم دهیم.

قضیه ۱۱.۳. فرض کنیم به‌ازای هر $j = 1, 2, ..., m$، $\{x_i^j : i \in I\}$ یک قاب با کران‌های C_j, D_j باشد. همچنین ثابت $0 < E < \sum_{j=1}^{m} C_j$ و افراز $P = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ از I موجود باشند به‌طوری‌که

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in \sigma_j^c} | \langle x, x_i^j\rangle |^2 \leq E | x |^2 \qquad (x \in H).$$

در این صورت، $\{x_i^j : i \in I\}$، $j = 1, 2, ..., m$، P- درهم‌تنیده است.

اثبات. فرض کنیم $x \in H$. برای هر $j = 1, 2, ..., m$ داریم

$$\sum_{i \in \sigma_j} | \langle x, x_i^j\rangle |^2 = \sum_{i \in I} | \langle x, x_i^j\rangle |^2 - \sum_{i \in \sigma_j^c} | \langle x, x_i^j\rangle |^2 .$$

در نتیجه به‌وضوح

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{m}\sum_{i\in\sigma_j}|\langle x,x_i^j\rangle|^2\right\| &\leq \left\|\sum_{j=1}^{m}\sum_{i\in I}|\langle x,x_i^j\rangle|^2\right\|\\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{m}D_j\right)\|x\|^2,\end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{m}\sum_{i\in\sigma_j}|\langle x,x_i^j\rangle|^2\right\| &= \left\|\sum_{j=1}^{m}\sum_{i\in I}|\langle x,x_i^j\rangle|^2-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i\in\sigma_j^c}|\langle x,x_i^j\rangle|^2\right\|\\ &\geq \left\|\sum_{j=1}^{m}\sum_{i\in I}|\langle x,x_i^j\rangle|^2\right\|-\left\|\sum_{j=1}^{m}\sum_{i\in\sigma_j^c}|\langle x,x_i^j\rangle|^2\right\|\\ &\geq \left[\left(\sum_{j=1}^{m}C_j\right)-E\right]\|x\|^2,\end{aligned}$$

و نتیجه به دست می‌آید. □

قضیه ۱۲.۳. فرض کنیم به‌ازای هر $j=1,2,\dots,m$، $\{x_i^j : i\in I\}$ یک قاب با عملگر قاب S_j باشد. فرض کنید ثابت $0<E<m$ و افراز $P=\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_m\}$ از I وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای $x\in H$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i\in\sigma_j^c}|\langle x,S_j^{-\frac{1}{2}}x_i^j\rangle|^2\leq E\,|\,x\,|^2 .$$

در این صورت، $j=1,2,\dots,m$، $\{S_j^{-\frac{1}{2}}x_i^j : i\in I\}$، یک قاب P- درهم‌تنیده است.

اثبات. چون به‌ازای هر $j=1,2,\dots,m$، $\{S_j^{-\frac{1}{2}}x_i^j : i\in I\}$ یک قاب پارسوال است؛ بنابراین $C_j=D_j=1$. اکنون حکم از قضیهٔ فوق نتیجه می‌شود. □

References

[1] Arambasic, L. (2007). On frames for countably generated Hilbert C^*-modules. *Proc. Amer. Math. Soc*, 135, 469–478. DOI: https://doi.org/10.1090/s0002-9939-06-08498-x.

[2] Asgari, M.S., & Khosravi, A. (2005). Frames and bases of subspaces in Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl*, 308, 541–553. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.11.036.

[3] Bemrose, T., Casazza, P.G., Grochenig, K., Lammers, M.C., & Lynch, R.G. (2016). Weaving Frames. *Operators and Matrices*, 10, 1093–1110. DOI: https://doi.org/10.7153/oam-10-61.

[4] Bibak Hafshejani, A., & Dehghan, M.A. (2019). P-woven frames. *J. Math. Anal. Appl*, 479, 673–687. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.06.044.

[5] Casazza, P.G., Freeman, D., & Lynch, R.G. (2016). Weaving Schauder frames. *J. Approx. Theory*, 211, 42–60. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jat.2016.07.001.

[6] Casazza, P.G., & Kutyniok, G. (2013). Finite Frames: Theory and Applications. *Birkhauser, New York*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8373-3.

[7] Daubechies, I., Grossmann, A., & Meyer, Y. (1986). Painless nonorthogonal expansions. *J. Math. Phys*, 27, 1271–1286. DOI: https://doi.org/10.1063/1.527388.

[8] Duffin, R.J., & Schaeffer, A.C. (1952). A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Am. Math. Soc*, 72, 341–366. DOI: https://doi.org/10.2307/1990760.

[9] Frank, M., & Larson, D.R. (2002). Frames in Hilbert C^*-modules and C^*-algebras. *J. Operator Theory*, 48, 273–314.

[10] Jing, W. (2006). Frames in Hilbert C^*-modules. *Ph.D. Thesis, University of Central Florida*.

[11] Kasparov, G. (1980). Hilbert C^*-modules: The theorem of Stinespring and Voiculescu. *J. Operator Theory*, 4, 133–150. DOI: https://www.jstor.org/stable/24713855.

[12] Khosravi, A., & Khosravi, B. (2012). G-frames and modular Riesz bases in Hilbert C^*-modules. *Int. J. Wavelets, Multiresolut. Inf. Process*, 10, 1250013 (12 pages).DOI: https://doi.org/10.1142/S0219691312500130.

[13] Khosravi, A., & Mirzaee Azandaryani, M. (2014). Approximate duality of g-frames in Hilbert spaces. *Acta Math. Sci*, 34, 639–652. DOI: https://doi.org/10.1016/S0252-9602(14)60036-9.

[14] Khosravi, A., & Sohrabi, J. (2019). Weaving g-frames and weaving fusion frames. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc*, 42, 3111–3129. DOI: https://doi.org/10.1007/s40840-018-0647-4.

[15] Lance, E.C. (1995). Hilbert C^*-modules-A toolkit for Operator Algebraists. *London Math. Soc. Lecture Note Ser*, Vol. 210, *Cambridge Univ. Press*.

[16] Murphy, G.J. (1990). C^*-Algebras and Operator Theory. *Academic Press, San Diego*. DOI: https://doi.org/10.1016/C2009-0-22289-6.

[17] Sun, W. (2006). G-frames and g-Riesz bases. *J. Math. Anal. Appl*, 322, 437–452. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.09.039.

[18] Zhao, X., & Li, P. (2021). Weaving frames in Hilbert C^*-modules. *J. Math*, 2021, 2228397 (13 pages). DOI: https://doi.org/10.1155/2021/2228397.

Measure Algebras and Applications

The stability of duals and approximate duals of frames and generalized frames under the action of bounded operators

Morteza Mirzaee Azandaryani[1]

1. Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran. Email: m.mirzaee@qom.ac.ir

Article Info	**ABSTRACT**

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 31 May 2023
Received in revised form:
21 July 2023
Accepted: 23 July 2023
Published Online:
30 September 2023

Keywords:
Hilbert space,
Measure space,
Hilbert C^*-module,
Frame,
Bounded operator

2020 Mathematics Subject Classification:
42C15

In this paper, the stability of duals and approximate duals of discrete frames, continuous frames, and generalized frames in Hilbert spaces and Hilbert C^*-modules under the action of bounded operators is considered. It is shown that under some conditions, duals and approximate duals are stable under the action of bounded operators. Especially, the stability of duals and approximate duals under the morphisms of Hilbert C^*-modules is studied.

Cite this article: Mirzaee Azandaryani, M. (2023). The stability of duals and approximate duals of frames and generalized frames under the action of bounded operators. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 36–52. http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9513.1007

Publisher: University of Qom

DOI: 10.22091/MAA.2023.9513.1007

Extended Abstract

Introduction

Let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space and let I be a finite or countable index set. A family $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ is a *discrete frame* for $\mathcal{H}$, if there exist $0 < A_{\mathcal{F}} \leq B_{\mathcal{F}} < \infty$, such that

$$A_{\mathcal{F}}\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq B_{\mathcal{F}}\|f\|^2,$$

for each $f \in \mathcal{H}$. The sequence $\mathcal{F}$ is called a *Bessel sequence* if only the second inequality is required (see [6]).

Let (Ω, μ) be a measure space and let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space. A weakly-measurable mapping $F : \Omega \to \mathcal{H}$ is called a *continuous frame* for $\mathcal{H}$ with respect to (Ω, μ) if there exist two positive constants A_F, B_F such that for each $f \in \mathcal{H}$, we have

$$A_F\|f\|^2 \leq \int_\Omega |\langle f, F(\omega)\rangle|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) \leq B_F\|f\|^2.$$

If only the second inequality is required, we say that F is a *continuous Bessel mapping*.

Suppose that $F : \Omega \to \mathcal{H}$ is a continuous Bessel mapping. Then the operator $T_F : L^2(\Omega, \mu) \to \mathcal{H}$ weakly defined by

$$\langle T_F\varphi, f\rangle = \textstyle\int_\Omega \varphi(\omega)\langle F(\omega), f\rangle \mathrm{d}\mu(\omega), \quad \varphi \in L^2(\Omega, \mu), f \in \mathcal{H},$$

is well-defined and bounded with $\|T_F\| \leq \sqrt{B_F}$. Indeed, $\int_\Omega \varphi(\omega)F(\omega)\mathrm{d}\mu(\omega)$ is an element of $\mathcal{H}$ and T_F can be written as $T_F(\varphi) = \int_\Omega \varphi(\omega)F(\omega)\mathrm{d}\mu(\omega)$.

The operator T_F is called the *synthesis operator* of F and its adjoint which is given by

$$T_F^* : \mathcal{H} \to L^2(\Omega, \mu), (T_F^* f)(\omega) = \langle f, F(\omega)\rangle, \quad \omega \in \Omega, f \in \mathcal{H},$$

is the *analysis operator* of F.

A Bessel mapping G is called a dual for F if $T_G T_F^* = Id_{\mathcal{H}}$ and if $\|T_G T_F^* - Id_{\mathcal{H}}\| < 1$, then G is called an approximate dual of F. For more results on continuous frames, see [1, 8, 10].

For each $i \in I$, let $\mathcal{H}_i$ be a Hilbert space. In this paper, $L(\mathcal{H}, \mathcal{H}_i)$ is the set of all bounded operators from $\mathcal{H}$ into $\mathcal{H}_i$ and $L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ is denoted by $L(\mathcal{H})$. We call $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}_i) : i \in I\}$ a *g-frame* for $\mathcal{H}$ with respect to $\{\mathcal{H}_i : i \in I\}$ if there exist two positive constants A and B such that

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} \|\Lambda_i f\|^2 \leq B\|f\|^2,$$

for each $f \in \mathcal{H}$. If only the second inequality is required, we call it a *g-Bessel sequence* with upper bound B. If $A = B$, Λ is called an A-tight g-frame (see [23]).

Let $\Lambda = \{\Lambda_i\}_{i\in I}$ and $\Gamma = \{\Gamma_i\}_{i\in I}$ be two g-Bessel sequences in a Hilbert space $\mathcal{H}$ and let $S_{\Gamma\Lambda} f := \sum_{i\in I} \Gamma_i^* \Lambda_i f$. We say that Λ and Γ are approximate g-duals if $\|Id_{\mathcal{H}} - S_{\Gamma\Lambda}\| < 1$. In this case, Γ is called an approximate g-dual of Λ (see [7]).

Hilbert C^*-modules are generalizations of Hilbert spaces by allowing the inner product to take values in a C^*-algebra rather than in the field of complex numbers.

Let $\mathfrak{A}$ be a unital C^*-algebra and suppose that E is a left $\mathfrak{A}$-module such that the linear structures of $\mathfrak{A}$ and E are compatible. Then E is called a pre-Hilbert $\mathfrak{A}$-module if E is equipped with an $\mathfrak{A}$-valued inner product $\langle \cdot, \cdot\rangle : E \times E \longrightarrow \mathfrak{A}$, such that

(i) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$, for each $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ and $x, y, z \in E$;

(ii) $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$, for each $a \in \mathfrak{A}$ and $x, y \in E$;

(iii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^*$, for each $x, y \in E$;

(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0$, for each $x \in E$ and if $\langle x, x\rangle = 0$, then $x = 0$.

For each $x \in E$, we define $\|x\| = \|\langle x, x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$. If E is complete with $\|.\|$, it is called a *Hilbert $\mathfrak{A}$-module* or a *Hilbert C^*-module* over $\mathfrak{A}$.

Let E be a Hilbert $\mathfrak{A}$-module. A family $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I} \subseteq E$ is a *frame* for E, if there exist real constants $0 < A_{\mathcal{F}} \leq B_{\mathcal{F}} < \infty$, such that for each $x \in E$,

$$A_{\mathcal{F}}\langle x, x\rangle \leq \sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle\langle f_i, x\rangle \leq B_{\mathcal{F}}\langle x, x\rangle.$$

If the second inequality is required, $\mathcal{F}$ is a *Bessel sequence*. If the series $\sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle\langle f_i, x\rangle$ is convergent with respect to the norm, then $\mathcal{F}$ is called a *standard frame* (see [8]).

Let $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ and $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in I}$ be standard Bessel sequences in E. Then we say that $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{F}$) is an *alternate dual* or a *dual* of $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$), if $x = \sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle g_i$ or equivalently $x = \sum_{i\in I}\langle x, g_i\rangle f_i$, for each $x \in E$.

Let $\mathfrak{L}(E, E_i)$ be the set of all adjointable operators from E into E_i. A sequence $\Lambda = \{\Lambda_i \in \mathfrak{L}(E, E_i) : i \in I\}$ is called a *g-frame* for E with respect to $\{E_i : i \in I\}$ if there exist real constants $A_\Lambda, B_\Lambda > 0$ such that

$$A_\Lambda\langle x, x\rangle \leq \sum_{i\in I}\langle \Lambda_i x, \Lambda_i x\rangle \leq B_\Lambda\langle x, x\rangle,$$

for each $x \in E$. In this case, we call it an (A_Λ, B_Λ) *g-frame*. If only the second-hand inequality is required, then Λ is called a B_Λ-*g-Bessel sequence* (see [12]).

Let E and F be Hilbert C^*-modules over C^*-algebras $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$, respectively. Let $\varphi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ be a morphism of C^*-algebras. A map $\phi : E \longrightarrow F$ is said to be a *φ-morphism* of Hilbert C^*-modules if

$$\langle \phi(x), \phi(y)\rangle = \varphi(\langle x, y\rangle),$$

for each $x, y \in E$ (see [3]).

Conclusion

The main results of this paper are:

***Theorem* 0.1.** *Let T and S be two isometric operators on Hilbert spaces $\mathcal{H}$ and $\mathcal{K}$, respectively. Then*

(i) If $\Gamma = \{\Gamma_i \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}_i)\}_{i\in I}$ is a g-dual (resp. an approximate g-dual) of $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}_i)\}_{i\in I}$, then $\Gamma_T := \{\Gamma_i T\}_{i\in I}$ is a g-dual (resp. an approximate g-dual) of $\Lambda_T := \{\Lambda_i T\}_{i\in I}$.

(ii) If $\Gamma = \{\Gamma_i \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})\}_{i\in I}$ is a g-dual (resp. an approximate g-dual) of $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})\}_{i\in I}$, then $\Gamma_S := \{S\Gamma_i\}_{i\in I}$ is a g-dual (resp. an approximate g-dual) of $\Lambda_S := \{S\Lambda_i\}_{i\in I}$.

***Theorem* 0.2.** *Let $\Gamma = \{\Gamma_i \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}_i)\}_{i\in I}$ be a g-dual of $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}_i)\}_{i\in I}$ and let T be a bounded operator on $\mathcal{H}$. Then* *(i)* $\Gamma_T := \{\Gamma_i T\}_{i\in I}$ *is a g-dual of* $\Lambda_T := \{\Lambda_i T\}_{i\in I}$ *if and only if* T *is an isometric operator.*

(ii) $\Gamma_T := \{\Gamma_i T\}_{i\in I}$ *is an approximate g-dual of* $\Lambda_T := \{\Lambda_i T\}_{i\in I}$ *if and only if* $\|T^*T - Id_{\mathcal{H}}\| < 1$.

***Theorem* 0.3.** *Let* $F, G : \Omega \longrightarrow \mathcal{H}$ *be two continuous Bessel mappings. Assume that* T *is a bounded operator on* $\mathcal{H}$ *such that* T^* *is isometric. If* G *is a dual (resp. an approximate dual) of* F*, then* $T \circ G$ *is a dual (resp. an approximate dual) of* $T \circ F$.

***Theorem* 0.4.** *Let* $G : \Omega \longrightarrow \mathcal{H}$ *be a dual of* $F : \Omega \longrightarrow \mathcal{H}$*. Assume that* T *is a bounded operator on* $\mathcal{H}$*. Then,* $T \circ G$ *is a dual (resp. an approximate dual) of* $T \circ F$ *if and only if* T^* *is an isometric operator (resp.* $\|TT^* - Id_{\mathcal{H}}\| < 1$*).*

***Theorem* 0.5.** *Let* E_1 *be a Hilbert* C^**-module and* $\Gamma = \{\Gamma_i \in \mathfrak{L}(E_1, E)\}_{i\in I}$ *be a g-dual of* $\Lambda = \{\Lambda_i \in \mathfrak{L}(E_1, E)\}_{i\in I}$*. Also, assume that* $\phi\Gamma_i$ *and* $\phi\Lambda_i$ *are adjointable, for each* $i \in I$*. Then,* $\Gamma_\phi := \{\phi\Gamma_i\}_{i\in I}$ *and* $\Lambda_\phi := \{\phi\Lambda_i\}_{i\in I}$ *are two g-Bessel sequences. If* Γ_ϕ *is a g-dual of* Λ_ϕ*, then* ϕ *is an isometric operator.*

***Theorem* 0.6.** *Suppose that* $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ *and* $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in I}$ *are two Bessel sequences in* E *such that* $\mathcal{G}$ *is a dual of* $\mathcal{F}$*. If* ϕ *is surjective, then* $\mathcal{G}_\phi := \{\phi(g_i)\}_{i\in I}$ *is a dual for* $\mathcal{F}_\phi := \{\phi(f_i)\}_{i\in I}$.

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۵۲-۳۶

پایایی دوگان‌ها و دوگان‌های تقریبی قاب‌ها و قاب‌های تعمیم‌یافته تحت عملگرهای کران‌دار

مرتضی میرزائی ازندریانی [۱]

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: m.mirzaee@qom.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۳/۱۰
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۴/۳۰
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۵/۱
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
فضای هیلبرت،
فضای اندازه،
C^*-مدول هیلبرت،
قاب،
عملگر کران‌دار

رده‌بندی ریاضی:
42C15

چکیده

در این مقاله، پایایی دوگان‌ها و دوگان‌های تقریبی قاب‌های گسسته، قاب‌های پیوسته و قاب‌های تعمیم‌یافته در فضاهای هیلبرت و C^*-مدول‌های هیلبرت تحت عملگرهای کران‌دار مورد توجه قرار می‌گیرد. نشان داده می‌شود که با برقراری برخی از شرایط، دوگان‌ها و دوگان‌های تقریبی تحت عملگرهای کران‌دار پایا هستند. به‌ویژه، پایایی دوگان‌ها و دوگان‌های تقریبی تحت ریخت‌های C^*-مدول‌های هیلبرت، مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

استناد: میرزائی ازندریانی، مرتضی. (۱۴۰۲). پایایی دوگان‌ها و دوگان‌های تقریبی قاب‌ها و قاب‌های تعمیم‌یافته تحت عملگرهای کران‌دار. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۵۲-۳۶.

http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9513.1007

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

پیش از ۱۹۴۶ میلادی، نمایش سیگنال‌ها به‌صورت سری فوریه و استفاده از ضرایب فوریه، روشی متداول در عمل پردازش سیگنال‌ها به حساب می‌آمد. اما این روش مشکلاتی داشت که بیشتر این مشکلات ناشی از منحصربه‌فرد بودن ضرایب فوریه بودند. در سال ۱۹۴۶، گابور در مرجع [۱۰] راه‌حل مناسبی برای حل این مشکل ارائه داد که بسیار مفید بود. او در روش خود، خواص اساسی یک دنباله را که بعدها یک قاب گسسته نامیده شد، به دست آورده بود. در سال ۱۹۵۲، دافین و شیفر که در حال بررسی چند مسئلهٔ اساسی در مورد سری‌های فوریهٔ غیرهارمونیک بودند، احساس نیاز به معرفی مفهومی کردند و آن را یک قاب (گسسته) فضای هیلبرت نامیدند (مرجع [۶] را ملاحظه کنید). اما ارزش قاب‌ها در فضاهای هیلبرت پس از چاپ مقالهٔ دوبچیز، گراسمان و مِیِر (مرجع [۳] را ملاحظه کنید) در سال ۱۹۸۶ بیش‌ازپیش مشخص شد. در واقع، پس از چاپ این مقاله بود که قاب‌ها و تعمیم‌های آنها به‌طور گسترده بررسی شدند و کاربردهای فراوانی از آنها نه‌فقط در پردازش سیگنال‌ها بلکه در شاخه‌های مختلف علم و صنعت ارائه شدند.

تعریف ۱.۱. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر باشد. دنبالهٔ $\mathcal{F}=\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب گسسته برای H نامیده می‌شود اگر دو عدد مثبت $A_{\mathcal{F}}$ و $B_{\mathcal{F}}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر $f\in H$ داشته باشیم:

$$A_{\mathcal{F}}\|f\|^۲\leq\sum_{i\in I}|\langle f,f_i\rangle|^۲\leq B_{\mathcal{F}}\|f\|^۲.$$

در نظریهٔ قاب‌ها، حفظ خواص یک قاب گسسته تحت عملگرهای کران‌دار از اهمیت بالایی برخوردار است. کریستنسن در کتاب خود [۴] (که یکی از مهم‌ترین منابع در مورد قاب‌های گسسته است) یک بخش را به این موضوع اختصاص می‌دهد و از نتایج به‌دست‌آمده در این بخش، در سرتاسر کتاب خود استفاده می‌کند. یکی از نتایج مهم به‌دست‌آمده در این کتاب، در مورد پایایی قاب‌ها تحت عملگرهای کران‌دار، به‌صورت زیر است:

قضیه ۲.۱. فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب گسسته در فضای هیلبرت H باشد. اگر T یک عملگر کران‌دار پوشا روی H باشد، آن‌گاه $\{Tf_i\}_{i\in I}$ نیز یک قاب گسسته برای فضای هیلبرت H است.

در ادامهٔ این مقاله، پایایی خواص قاب‌های تعمیم‌یافته و قاب‌های پیوسته در فضاهای هیلبرت و همین‌طور پایایی قاب‌ها و قاب‌های تعمیم‌یافته در C^*-مدول‌های هیلبرت تحت عملگرهای کران‌دار مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۲ قاب‌های پیوسته و g-قاب‌ها

پس از معرفی قاب‌های گسسته، قاب‌های پیوسته به‌طور جداگانه در [۱] و [۱۰] معرفی شدند (برای مطالعهٔ بیشتر در مورد قاب‌های پیوسته به مرجع [۸] مراجعه نمایید).

تعریف ۱.۲. فرض کنیم (Ω,μ) یک فضای اندازه باشد. یک تابع به‌طور ضعیف اندازه‌پذیر $F:\Omega\to H$ را یک قاب پیوسته برای H نسبت به (Ω,μ) می‌نامیم اگر دو عدد مثبت A_F و B_F موجود باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر $f\in H$ داشته باشیم:

$$A_F\|f\|^۲\leq\int_\Omega|\langle f,F(\omega)\rangle|^۲d\mu(\omega)\leq B_F\|f\|^۲.$$

اعداد A_F و B_F را به‌ترتیب یک کران پایین و یک کران بالا برای قاب F می‌نامیم. اگر نامساوی سمت راست برقرار باشد، F را یک نگاشت بسل پیوسته می‌نامیم.

تعریف ۲.۲. فرض کنیم $F:\Omega\to H$ یک نگاشت بسل پیوسته باشد. در این صورت

(الف) عملگر $T_F:L^۲(\Omega,\mu)\longrightarrow H$ که به‌صورت

$$\langle T_F\varphi,f\rangle=\int_\Omega\varphi(\omega)\langle F(\omega),f\rangle d\mu(\omega),\quad f\in H,\varphi\in L^۲(\Omega,\mu),$$

تعریف می‌شود را عملگر ترکیب F می‌نامیم (به‌آسانی ثابت می‌شود که T_F خوش‌تعریف و کران‌دار است، همچنین $\|T_F\|\leq\sqrt{B_F}$).

(ب) عملگر $T_F^*: H \longrightarrow L^2(\Omega,\mu)$ که به‌صورت $(T_F^* f)(\omega) = \langle f, F(\omega)\rangle$ به دست می‌آید را عملگر تحلیل F می‌نامیم.

(پ) عملگر $S_F = T_F T_F^*$ را عملگر F می‌نامیم.

تعریف ۳.۲. فرض کنیم $F, G : \Omega \to H$ دو نگاشت بسل پیوسته باشند. در این صورت

(الف) G را یک دوگان F می‌نامیم اگر به‌ازای هر $f, g \in H$ داشته باشیم:

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega \langle f, F(\omega)\rangle \langle G(\omega), g\rangle d\mu(\omega),$$

یا به‌طور معادل $T_G T_F^* = Id_H$.

(ب) G را یک دوگان تقریبی F می‌نامیم اگر $\|T_G T_F^* - Id_H\| < 1$.

قاب‌های تعمیم‌یافته یا g-قاب‌ها به‌عنوان یکی از تعمیم‌های مهم قاب‌ها در [23] معرفی شدند.

تعریف ۴.۲. فرض کنیم به‌ازای هر $i \in I$، H_i یک فضای هیلبرت باشد. دنبالهٔ $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$ یک g-قاب برای H نسبت به $\{H_i\}_{i\in I}$ نامیده می‌شود اگر دو عدد مثبت A و B موجود باشند به‌طوری‌که برای هر $f \in H$، نامساوی زیر برقرار باشد:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} \|\Lambda_i f\|^2 \leq B\|f\|^2.$$

در این حالت Λ را یک (A, B) g-قاب می‌نامیم.
A و B کران‌های g-قاب نامیده می‌شوند (A را یک کران پایین و B را یک کران بالا می‌نامیم). سوپریمم مجموعهٔ متشکل از تمام کران‌های پایین را کران پایین بهینه و اینفیمم مجموعهٔ متشکل از تمام کران‌های بالا را کران بالای بهینه می‌نامیم. اگر در تعریف فوق Λ در نامساوی سمت راست صدق کند، آن‌گاه Λ را یک g-دنبالهٔ بسل می‌نامیم. یک g-قاب را تنگ گوییم هرگاه $A = B$ و آن را پارسوال گوییم اگر $A = B = 1$.

تعریف ۵.۲. فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$ یک g-دنبالهٔ بسل باشد. در این صورت

(آ) عملگر ترکیب Λ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_\Lambda : \oplus_{i\in I} H_i \to H, \quad T_\Lambda(\{f_i\}_{i\in I}) = \sum_{i\in I} \Lambda_i^* f_i.$$

به‌آسانی می‌توان مشاهده نمود که T_Λ خوش‌تعریف و کران‌دار است.

(ب) الحاقی عملگر T_Λ، که $T_\Lambda^*(f) = \{\Lambda_i f\}_{i\in I}$ است، عملگر تحلیل Λ نامیده می‌شود.

(پ) $S_\Lambda = T_\Lambda T_\Lambda^*$ عملگر g-دنبالهٔ بسل Λ نامیده می‌شود و به‌ازای هر $f \in H$ داریم:

$$S_\Lambda f = \sum_{i\in I} \Lambda_i^* \Lambda_i f.$$

فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$ یک (A, B) g-قاب باشد. دنبالهٔ $\widetilde{\Lambda} = \{\widetilde{\Lambda}_i\}_{i\in I}$ که $\widetilde{\Lambda}_i = \Lambda_i S_\Lambda^{-1}$، g-دوگان کانونی Λ نامیده می‌شود. $\widetilde{\Lambda}$ یک $(\frac{1}{B}, \frac{1}{A})$ g-قاب است و به‌ازای هر $f \in H$، داریم

$$\sum_{i\in I} \Lambda_i^* \widetilde{\Lambda}_i f = f = \sum_{i\in I} \widetilde{\Lambda}_i^* \Lambda_i f.$$

g-دنبالهٔ بسل $\Gamma = \{\Gamma_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$، یک g-دوگان برای g-دنبالهٔ بسل $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$ نامیده می‌شود اگر

$$f = \sum_{i\in I} \Gamma_i^* \Lambda_i f = \sum_{i\in I} \Lambda_i^* \Gamma_i f, \quad f \in H.$$

فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای H باشد. همان‌طور که می‌دانیم، حداقل یک دوگان برای $\{f_i\}_{i\in I}$ موجود است. متأسفانه، به دست آوردن این دوگان معمولاً دشوار است. در اینجا دوگان‌های تقریبی می‌توانند مفید واقع شوند. دوگان تقریبی در نظریهٔ قاب‌ها و مخصوصاً در دستگاه‌های گابور و موجک‌ها، کاربردهای مهمی دارد.

یک دوگان تقریبی $\{g_i\}_{i\in I}$، برای $\{f_i\}_{i\in I}$، به‌ازای یک $\varepsilon < ۱$، در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$\left\| f - \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle g_i \right\| \leq \varepsilon \|f\|, \quad \forall f \in H.$$

(هرچه ε کوچک‌تر باشد، دوگان تقریبی مطلوب‌تر است).

دوگان‌های تقریبی قاب‌ها اخیراً توسط کریستِنسِن و لوِگِسِن در [۲] معرفی شدند. آنها نشان دادند که هر دوگان تقریبی خود باعث ایجاد یک دوگان می‌شود. بعضی از اوقات به دست آوردن یک دوگان برای یک قاب مانند $\{f_i\}_{i\in I}$ دشوار است اما می‌توان یک قاب مانند $\{h_i\}_{i\in I}$ که نزدیک به $\{f_i\}_{i\in I}$ باشد پیدا کرد که یک دوگان آن مانند $\{g_i\}_{i\in I}$ شناخته‌شده باشد و یا به‌راحتی به دست آید. آنها نشان دادند تحت برخی از شرایط $\{g_i\}_{i\in I}$ یک دوگان تقریبی برای $\{f_i\}_{i\in I}$ است. پس از چاپ این مقاله، دوگان‌های تقریبی برای قاب‌ها و تعمیم‌های آنها هم در حالت گسسته و هم پیوسته مورد توجه قرار گرفتند (مقالات [۷، ۹، ۱۵، ۱۶] و [۸، ۱۱–۱۳] را مشاهده کنید).

تعریف ۶.۲. فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ و $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in I}$ دو دنبالهٔ بسل برای H باشند و $R_{\mathcal{G}\mathcal{F}} := T_{\mathcal{G}}T^*_{\mathcal{F}}$. می‌گوییم $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ دوگان‌های تقریبی هستند اگر $\|Id_H - R_{\mathcal{G}\mathcal{F}}\| < ۱$ یا $\|Id_H - R_{\mathcal{F}\mathcal{G}}\| < ۱$. در این حالت $\mathcal{G}$ را یک دوگان تقریبی $\mathcal{F}$ می‌نامیم.

توجه کنید که چون $R^*_{\mathcal{F}\mathcal{G}} = R_{\mathcal{G}\mathcal{F}}$، پس شرایط بالا هم‌ارزند. به‌راحتی به دست می‌آید که به‌ازای هر $f \in H$،

$$R_{\mathcal{G}\mathcal{F}}(f) = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle g_i, \quad R_{\mathcal{F}\mathcal{G}}(f) = \sum_{i\in I}\langle f, g_i\rangle f_i.$$

همچنین فرمول‌های بازسازی زیر برقرارند:

$$R_{\mathcal{G}\mathcal{F}}(R^{-۱}_{\mathcal{G}\mathcal{F}}f) = \sum_{n=۰}^{\infty} R_{\mathcal{G}\mathcal{F}}(Id_H - R_{\mathcal{G}\mathcal{F}})^n f = f = R^{-۱}_{\mathcal{G}\mathcal{F}}R_{\mathcal{G}\mathcal{F}}f = \sum_{n=۰}^{\infty}(Id_H - R_{\mathcal{G}\mathcal{F}})^n R_{\mathcal{G}\mathcal{F}}(f).$$

اگر $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ دوگان‌های تقریبی باشند، آن‌گاه هر دوی آنها قاب هستند.

فرض کنیم Λ و Γ دو g-دنبالهٔ بسل و T_Λ و T_Γ به‌ترتیب عملگرهای ترکیب Λ و Γ باشند. قرار می‌دهیم $S_{\Gamma\Lambda} := T_\Gamma T^*_\Lambda$. به‌راحتی مشاهده می‌شود که به‌ازای هر $f \in H$، $S_{\Gamma\Lambda}(f) = \sum_{i\in I}\Gamma^*_i\Lambda_i f$، $S^*_{\Gamma\Lambda} = S_{\Lambda\Gamma}$ و $S_{\Lambda\Lambda} = S_\Lambda$.

تعریف ۷.۲. دو g-دنبالهٔ بسل Λ و Γ را g-دوگان‌های تقریبی می‌نامیم هرگاه داشته باشیم $\|Id_H - S_{\Gamma\Lambda}\| < ۱$ یا $\|Id_H - S_{\Lambda\Gamma}\| < ۱$. در این حالت، Γ را یک g-دوگان تقریبی Λ می‌نامیم.

واضح است که هر g-دوگان Λ، یک دوگان تقریبی برای آن است. دقت کنید که شرایط ذکرشده در تعریف ۷.۲ هم‌ارز هستند، کافی است توجه کنیم که

$$\|Id_H - S_{\Gamma\Lambda}\| = \|(Id_H - S_{\Gamma\Lambda})^*\| = \|Id_H - S_{\Lambda\Gamma}\|.$$

چون $\|Id_H - S_{\Gamma\Lambda}\| < ۱$ و $\|Id_H - S_{\Lambda\Gamma}\| < ۱$، پس $S_{\Gamma\Lambda}$ و $S_{\Lambda\Gamma}$ وارون‌پذیر هستند و $S^{-۱}_{\Lambda\Gamma} = \sum_{n=۰}^{\infty}(Id_H - S_{\Lambda\Gamma})^n$. اکنون برای هر $f \in H$، فرمول‌های بازسازی زیر را به دست می‌آوریم:

$$f = S_{\Lambda\Gamma}S^{-۱}_{\Lambda\Gamma}f = \sum_{n=۰}^{\infty} S_{\Lambda\Gamma}(Id_H - S_{\Lambda\Gamma})^n f, \quad f = S^{-۱}_{\Lambda\Gamma}S_{\Lambda\Gamma}f = \sum_{n=۰}^{\infty}(Id_H - S_{\Lambda\Gamma})^n S_{\Lambda\Gamma}f.$$

به‌راحتی می‌توان مشاهده کرد که $\{\Gamma_i S^{-۱}_{\Lambda\Gamma} = \Gamma_i + \sum_{n=۱}^{\infty}\Gamma_i(Id_H - S_{\Lambda\Gamma})^n\}_{i\in I}$ و $\{\Lambda_i S^{-۱}_{\Gamma\Lambda} = \Lambda_i + \sum_{n=۱}^{\infty}\Lambda_i(Id_H - S_{\Gamma\Lambda})^n\}_{i\in I}$ به‌ترتیب g-دوگان‌هایی برای Λ و Γ هستند.

قضیه ۸.۲. فرض کنیم H و K دو فضای هیلبرت باشند. همچنین فرض می‌کنیم T و S دو عملگر طول‌پا به‌ترتیب روی H و K باشند. در این صورت

(الف) اگر $\Gamma = \{\Gamma_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$ یک g-دوگان (g-دوگان تقریبی) برای $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$ باشد، آن‌گاه $\Gamma_T := \{\Gamma_i T\}_{i\in I}$ یک g-دوگان (g-دوگان تقریبی) برای $\Lambda_T := \{\Lambda_i T\}_{i\in I}$ است.

(ب) اگر $\Gamma = \{\Gamma_i \in L(H, K) : i \in I\}$ یک g-دوگان (g-دوگان تقریبی) برای $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(H, K) : i \in I\}$ باشد، آن‌گاه $\Gamma_S := \{S\Gamma_i\}_{i\in I}$ یک g-دوگان (g-دوگان تقریبی) برای $\Lambda_S := \{S\Lambda_i\}_{i\in I}$ است.

اثبات. (الف) ابتدا دقت کنید که Λ_T و Γ_T هر دو g-دنبالهٔ بسل هستند، زیرا به‌ازای هر $f \in H$ داریم

$$\sum_{i\in I} \|\Lambda_i T f\|^{۲} \leq B_\Lambda \|Tf\|^{۲} \leq B_\Lambda \|T\|^{۲} \|f\|^{۲}$$

همین‌طور $\sum_{i\in I} \|\Gamma_i T f\|^{۲} \leq B_\Gamma \|T\|^{۲} \|f\|^{۲}$. اینک داریم

$$S_{\Gamma_T \Lambda_T} f = \sum_{i\in I} (\Gamma_i T)^* (\Lambda_i T) f = T^* (\sum_{i\in I} \Gamma_i^* \Lambda_i (Tf)) = T^* S_{\Gamma\Lambda} T f.$$

اگر Γ یک g-دوگان Λ باشد، آن‌گاه $S_{\Gamma\Lambda} = Id_H$، لذا $S_{\Gamma_T \Lambda_T} = T^* T = Id_H$ بنابراین Γ_T یک g-دوگان Λ_T است. اگر Γ یک g-دوگان تقریبی Λ باشد، آن‌گاه $\|S_{\Gamma\Lambda} - Id_H\| < ۱$، لذا

$$\begin{aligned} \|S_{\Gamma_T \Lambda_T} - Id_H\| &= \|T^* S_{\Gamma\Lambda} T - T^* T\| \\ &\leq \|T^*\| \|S_{\Gamma\Lambda} - Id_H\| \|T\| \\ &= \|S_{\Gamma\Lambda} - Id_H\| < ۱. \end{aligned}$$

نامساوی فوق ایجاب می‌کند که Γ_T یک g-دوگان تقریبی Λ_T باشد.

(ب) اثبات قسمت (ب) همانند (الف) و با استفاده از رابطهٔ

$$\sum_{i\in I} (S\Gamma_i)^* (S\Lambda_i) f = \sum_{i\in I} \Gamma_i^* S^* S \Lambda_i f = \sum_{i\in I} \Gamma_i^* \Lambda_i f$$

به دست می‌آید.

□

قضیه ۹.۲. فرض کنیم $\Gamma = \{\Gamma_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$ یک g-دوگان برای $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$ باشد. همچنین T را یک عملگر کران‌دار روی H در نظر می‌گیریم. در این صورت

(الف) $\Gamma_T := \{\Gamma_i T\}_{i\in I}$ یک g-دوگان $\Lambda_T := \{\Lambda_i T\}_{i\in I}$ است اگر و فقط اگر T یک عملگر طول‌پا باشد.

(ب) $\Gamma_T := \{\Gamma_i T\}_{i\in I}$ یک g-دوگان تقریبی $\Lambda_T := \{\Lambda_i T\}_{i\in I}$ است اگر و فقط اگر $\|T^* T - Id_H\| < ۱$.

اثبات. چون Γ یک g-دوگان Λ است، داریم $S_{\Gamma\Lambda} = Id_H$. اکنون به‌ازای هر $f \in H$ داریم

$$S_{\Gamma_T \Lambda_T} f = T^* \sum_{i\in I} \Gamma_i^* \Lambda_i (Tf) = T^* S_{\Gamma\Lambda} T f = T^* T f.$$

اینک (الف) و (ب) از رابطهٔ فوق به دست می‌آیند. □

قضیه ۱۰.۲. فرض کنیم $F, G : \Omega \longrightarrow H$ دو نگاشت بسل پیوسته باشند. همچنین فرض می‌کنیم T یک عملگر کران‌دار روی H باشد به‌طوری‌که T^* طول‌پا باشد. در این صورت اگر G یک دوگان (دوگان تقریبی) F باشد، آن‌گاه $T \circ G$ یک دوگان (دوگان تقریبی) $T \circ F$ است.

اثبات. به‌سادگی می‌توان نشان داد که تابع $T \circ F : \Omega \longrightarrow H$ به‌طور ضعیف اندازه‌پذیر است. همچنین به‌ازای هر $f \in H$ داریم:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\langle f, (T \circ F)(\omega)\rangle|^۲ d\mu(\omega) &= \int_\Omega |\langle T^* f, F(\omega)\rangle|^۲ d\mu(\omega) \\ &\leq B_F \|T^* f\|^۲ \\ &\leq B_F \|T^*\|^۲ \|f\|^۲.\end{aligned}$$

نامساوی فوق نشان می‌دهد که $T \circ F$ یک نگاشت بسل پیوسته است. به همین شکل، می‌توان نشان داد که $T \circ G$ نیز یک نگاشت بسل پیوسته است. همچنین به‌ازای هر $f, g \in H$ داریم:

$$\begin{aligned}\langle T_{(T\circ G)} T^*_{(T\circ F)} f, g\rangle &= \int_\Omega \langle f, (T \circ F)(\omega)\rangle \langle (T \circ G)(\omega), g\rangle d\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega \langle T^* f, F(\omega)\rangle \langle G(\omega), T^* g\rangle d\mu(\omega) \\ &= \langle T_G T^*_F (T^* f), T^* g\rangle.\end{aligned}$$

بنابراین $T_{(T\circ G)} T^*_{(T\circ F)} = T T_G T^*_F T^*$. حال اگر G یک دوگان F باشد، آن‌گاه داریم $T_G T^*_F = Id_H$، لذا $T_{(T\circ G)} T^*_{(T\circ F)} = TT^* = Id_H$ و اگر G یک دوگان تقریبی F باشد، آن‌گاه $\|T_G T^*_F - Id_H\| < ۱$، لذا

$$\begin{aligned}\|T_{(T\circ G)} T^*_{(T\circ F)} - Id_H\| &\leq \|T\| \|T_G T^*_F - Id_H\| \|T^*\| \\ &= \|T_G T^*_F - Id_H\| < ۱\end{aligned}$$

و قضیه اثبات می‌شود. □

مشابه اثبات قضیه ۲.۲، نتیجه‌ای مشابه قضیه ۹.۲ برای قاب‌های پیوسته به‌شکل زیر به دست می‌آید.

قضیه ۱۱.۲. فرض کنیم $G : \Omega \longrightarrow H$ یک دوگان $F : \Omega \longrightarrow H$ باشد. همچنین T را یک عملگر کران‌دار روی H در نظر می‌گیریم. در این صورت $T \circ G$ یک دوگان (دوگان تقریبی) $T \circ F$ است اگر و فقط اگر T^* طول‌پا باشد ($\|TT^* - Id_H\| < ۱$).

مشخص است که اگر Ω را مجموعهٔ اعداد طبیعی و μ را اندازهٔ شمارشی در نظر بگیریم، یک قاب پیوسته، تبدیل به یک قاب گسسته می‌شود.

نتیجه ۱۲.۲. فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ و $\{g_i\}_{i\in I}$ دو دنبالهٔ بسل برای فضای هیلبرت H باشند. همچنین فرض می‌کنیم T یک عملگر کران‌دار روی H باشد به‌طوری‌که T^* طول‌پا باشد. در این صورت، اگر $\{g_i\}_{i\in I}$ یک دوگان (دوگان تقریبی) $\{f_i\}_{i\in I}$ باشد، آن‌گاه $\{Tg_i\}_{i\in I}$ یک دوگان (دوگان تقریبی) $\{Tf_i\}_{i\in I}$ است.

نتیجه ۱۳.۲. فرض کنیم $\{g_i\}_{i\in I}$ یک دوگان $\{f_i\}_{i\in I}$ باشد. همچنین T را یک عملگر کران‌دار روی H در نظر می‌گیریم. در این صورت، $\{T(g_i)\}_{i\in I}$ یک دوگان (دوگان تقریبی) $\{Tf_i\}_{i\in I}$ است اگر و فقط اگر T^* طول‌پا باشد ($\|TT^* - Id_H\| < ۱$).

۳ قاب‌ها در C^*-مدول‌های هیلبرت

C^*-مدول‌های هیلبرت، تعمیم‌هایی از فضاهای هیلبرت هستند که همانند فضاهای هیلبرت دارای یک ضرب داخلی هستند با این تفاوت که ضرب داخلی دو عضو از یک C^*-مدول هیلبرت عضوی از یک C^*-جبر است و اگر این C^*-جبر میدان اعداد مختلط باشد، آن‌گاه این C^*-مدول هیلبرت، یک فضای هیلبرت خواهد بود.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک C^*-جبر و E یک $\mathfrak{A}$-مدول چپ باشد. E را یک پیش C^*-مدول هیلبرت گوییم اگر ضرب داخلی $\mathfrak{A}$-مقدار $\langle .,. \rangle : E \times E \to \mathfrak{A}$ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x, y, z \in E$ ، $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ و $a \in \mathfrak{A}$ داشته باشیم:

(آ) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$؛

(ب) $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$؛

(پ) $\langle x,y\rangle^* = \langle y,x\rangle$؛

(ت) $\langle x,x\rangle \geq 0$ و اگر $\langle x,x\rangle = 0$، آن‌گاه $x = 0$.

برای هر $x \in E$، تعریف می‌کنیم $\|x\| := \|\langle x,x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$. اگر E با این نرم کامل باشد، آن‌گاه E را یک $\mathfrak{A}$-مدول هیلبرت یا یک C^*-مدول هیلبرت روی $\mathfrak{A}$ می‌نامیم.
برای هر $a \in \mathfrak{A}$، داریم $|a| = (a^*a)^{\frac{1}{2}}$ و اینک برای هر $x \in E$ تعریف می‌کنیم $|x| := \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$.

مثال ۲.۳. (۱) فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک C^*-جبر باشد. خود $\mathfrak{A}$ با ضرب داخلی زیر یک C^*-مدول هیلبرت است.

$$\langle a,b\rangle = ab^* \quad (a,b \in \mathfrak{A}).$$

(۲) $\ell^2(I,\mathfrak{A})$ که به‌صورت

$$\ell^2(I,\mathfrak{A}) = \left\{ \{a_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{A} \mid \ \text{با نرم همگرا باشد.} \sum_{i\in I} a_i a_i^* \right\}$$

تعریف می‌شود با ضرب داخلی $\langle \{a_i\}_{i\in I}, \{b_i\}_{i\in I}\rangle = \sum_{i\in I} a_i b_i^*$ یک $\mathfrak{A}$-مدول هیلبرت است.

(۳) اگر $\{E_i : i \in I\}$ دنباله‌ای از $\mathfrak{A}$-مدول‌های هیلبرت باشد، آن‌گاه

$$\oplus_{i\in I} E_i = \left\{ \{x_i\}_{i\in I} \middle| \ \text{همگرا باشد.} \ \mathfrak{A} \ \text{با نرم در} \sum_{i\in I} \langle x_i, x_i\rangle \ \text{و} \ x_i \in E_i \right\}$$

با اعمال نقطه‌به‌نقطه و ضرب داخلی

$$\langle \{x_i\}_{i\in I}, \{y_i\}_{i\in I}\rangle = \sum_{i\in I} \langle x_i, y_i\rangle,$$

یک $\mathfrak{A}$-مدول هیلبرت است.

تعریف ۳.۳. فرض کنیم E و F دو C^*-مدول هیلبرت باشند. عملگر $T : E \to F$ را الحاقی‌پذیر گوییم اگر یک عملگر $T^* : F \to E$ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in E$ و $y \in F$ تساوی زیر برقرار باشد

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle.$$

عملگر T^* را الحاقی T می‌نامیم.

هر عملگر الحاقی‌پذیر مانند T کران‌دار و خطی است (یعنی به‌ازای هر $a \in \mathfrak{A}$ و $x \in E$ داریم $T(ax) = aT(x)$). مجموعهٔ تمام عملگرهای الحاقی‌پذیر از E به F را با $\mathfrak{L}(E,F)$ نمایش می‌دهیم. دقت شود که $\mathfrak{L}(E,E)$ یک C^*-جبر است که آن را با $\mathfrak{L}(E)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۳. فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک C^*-جبر باشد.

(آ) $\mathfrak{A}$-مدول هیلبرت E را به‌طور متناهی تولیدشده گوییم اگر زیرمجموعهٔ متناهی $\{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq E$ موجود باشد به‌طوری‌که هر $x \in E$ را بتوان به‌صورت یک ترکیب $\mathfrak{A}$-خطی مانند $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ ، $a_i \in \mathfrak{A}$ نوشت.

(ب) $\mathfrak{A}$-مدول هیلبرت E را به‌طور شمارا تولیدشده گوییم اگر زیرمجموعهٔ شمارایی مانند $\{x_i\}_{i\in I}$ موجود باشد به‌طوری‌که هر $x \in E$، در بستار غلاف $\mathfrak{A}$-خطی $\{x_i\}_{i\in I}$ باشد.

برای مطالعهٔ بیشتر در مورد C^*-مدول‌های هیلبرت به [۱۴] رجوع کنید.
قاب‌ها و g-قاب‌ها در C^*-مدول‌های هیلبرت به‌ترتیب در [۸] و [۱۲] معرفی شدند.

تعریف ۵.۳. فرض کنیم E یک C^*-مدول هیلبرت باشد. دنبالهٔ $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq E$ را یک قاب برای E گوییم اگر دو عدد مثبت A و B موجود باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in E$، نامساوی زیر برقرار باشد:

$$A\langle x, x\rangle \leq \sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle\langle f_i, x\rangle \leq B\langle x, x\rangle.$$

در این حالت $\{f_i\}_{i\in I}$ را یک (A, B)-قاب می‌نامیم.

A و B را کران‌های قاب می‌نامیم (A را یک کران پایین و B را یک کران بالا گوییم). اگر نامساوی سمت راست برقرار باشد $\{f_i\}_{i\in I}$ را یک دنبالهٔ بسل می‌نامیم. اگر به‌ازای هر $x \in E$، سری $\sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle\langle f_i, x\rangle$ با نرم همگرا باشد، آن‌گاه قاب را استاندارد گوییم.
اکنون قضیهٔ مهم زیر را از [۲] ذکر می‌کنیم.

قضیه ۶.۳. فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک C^*-جبر و E یک $\mathfrak{A}$-مدول هیلبرت به‌طور شمارا تولیدشده باشد. همچنین فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنباله در E باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in E$، $\sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle\langle f_i, x\rangle$ با نرم همگرا باشد. در این صورت، $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب استاندارد برای E است اگر و فقط اگر دو عدد مثبت A و B موجود باشند به‌طوری‌که

$$A\|x\|^۲ \leq \left\|\sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle\langle f_i, x\rangle\right\| \leq B\|x\|^۲, \quad \forall x \in E.$$

تعریف ۷.۳. فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل استاندارد باشد. در این صورت

(آ) عملگر تحلیل $\mathcal{F}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$D_{\mathcal{F}} : E \to \ell^۲(I, \mathfrak{A}), \quad D_{\mathcal{F}}(x) = \{\langle x, f_i\rangle\}_{i\in I}.$$

به‌آسانی می‌توان مشاهده نمود که $D_{\mathcal{F}}$ الحاقی‌پذیر است.

(ب) الحاقی عملگر $D_{\mathcal{F}}$، که $D^*_{\mathcal{F}}(\{a_i\}_{i\in I}) = \sum_{i\in I} a_i f_i$ است، عملگر ترکیب $\mathcal{F}$ نامیده می‌شود.

(پ) $S_{\mathcal{F}} = D^*_{\mathcal{F}}D_{\mathcal{F}}$ عملگر بسل $\mathcal{F}$ نامیده می‌شود و به‌ازای هر $x \in E$ داریم

$$S_{\mathcal{F}}x := \sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle f_i.$$

اگر B یک کران بالا برای $\mathcal{F}$ باشد، آن‌گاه $\|D_{\mathcal{F}}\| \leq \sqrt{B}$.

اگر $\mathcal{F}$ یک (A, B)-قاب استاندارد باشد، آن‌گاه $A \cdot Id_E \leq S_{\mathcal{F}} \leq B \cdot Id_E$. حال تعریف می‌کنیم $\widetilde{f_i} = S^{-۱}_{\mathcal{F}} f_i$. اکنون برای هر $x \in E$ ، خواهیم داشت

$$\sum_{i\in I}\langle x, \widetilde{f_i}\rangle f_i = x = \sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle \widetilde{f_i}.$$

دنبالهٔ $\widetilde{\mathcal{F}} = \{\widetilde{f_i}\}_{i\in I}$ یک $(\frac{۱}{B}, \frac{۱}{A})$-قاب استاندارد برای E است که آن را دوگان کانونی $\mathcal{F}$ می‌نامیم. دنبالهٔ بسل استاندارد $\{g_i\}_{i\in I}$ یک دوگان برای دنبالهٔ بسل $\{f_i\}_{i\in I}$ نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in E$، داشته باشیم

$$x = \sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle g_i.$$

قضیهٔ زیر را از [۸] یادآوری می‌کنیم.

قضیه ۸.۳. فرض کنیم E یک C^*-مدول هیلبرت به‌طور شمارا تولیدشده باشد و $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ و $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in I}$ دو دنبالهٔ بسل استاندارد در E باشند. اگر برای هر $x \in E$ داشته باشیم $x = \sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle g_i$، آن‌گاه $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ قاب‌های استاندارد هستند و برای هر $x \in E$، خواهیم داشت $x = \sum_{i\in I}\langle x, g_i\rangle f_i$.

تعریف ۹.۳. فرض کنیم $\{E_i\}_{i\in I}$ دنباله‌ای از C^*-مدول‌های هیلبرت باشد. دنبالهٔ $\Lambda = \{\Lambda_i \in \mathfrak{L}(E, E_i) : i \in I\}$ یک g-قاب برای E نسبت به $\{E_i\}_{i\in I}$ نامیده می‌شود اگر دو عدد مثبت A و B موجود باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in E$، نامساوی زیر برقرار باشد

$$A\langle x, x\rangle \leq \sum_{i\in I} \langle \Lambda_i x, \Lambda_i x\rangle \leq B\langle x, x\rangle.$$

در این حالت Λ را یک (A, B) g-قاب می‌نامیم. A و B را کران‌های g-قاب می‌نامیم. g-قاب Λ را استاندارد گوییم اگر برای هر $x \in E$، سری $\sum_{i\in I}\langle \Lambda_i x, \Lambda_i x\rangle$ با نرم همگرا باشد. همچنین اگر نامساوی سمت راست برقرار باشد، آن‌گاه Λ را یک g-دنبالهٔ بسل می‌نامیم.

اکنون قضیهٔ مهم زیر را از [۲۴] ذکر می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۳. فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_i \in \mathfrak{L}(E, E_i) : i \in I\}$ و به‌ازای هر $x \in E$، $\sum_{i\in I}\langle \Lambda_i x, \Lambda_i x\rangle$ با نرم همگرا باشد. در این صورت، Λ یک g-قاب استاندارد است اگر و فقط اگر دو عدد مثبت A و B موجود باشند به‌طوری‌که

$$A\|x\|^۲ \leq \left\|\sum_{i\in I}\langle \Lambda_i x, \Lambda_i x\rangle\right\| \leq B\|x\|^۲ \quad \forall x \in E.$$

تمام نتایجی که در بخش قبل برای پایایی g-قاب‌ها و قاب‌ها تحت عملگرهای کران‌دار به دست آمدند را می‌توان با برهان مشابه برای پایایی g-قاب‌ها و قاب‌ها در C^*-مدول‌های هیلبرت تحت عملگرهای الحاقی‌پذیر بیان نمود.
اکنون دسته‌ای از عملگرها روی C^*-مدول‌های هیلبرت را در نظر می‌گیریم که در [۳] معرفی شدند. این عملگرها کران‌دار هستند؛ اما لزوماً الحاقی‌پذیر نیستند.

تعریف ۱۱.۳. فرض کنیم $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ دو C^*-جبر و E و F به‌ترتیب دو $\mathfrak{A}$-مدول هیلبرت و $\mathfrak{B}$-مدول هیلبرت باشند. همچنین φ را یک $*$-هم‌ریختی از $\mathfrak{A}$ به $\mathfrak{B}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت، عملگر $\phi : E \longrightarrow F$ را یک φ-ریخت می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $x, y \in E$ داشته باشیم

$$\langle \phi(x), \phi(y)\rangle_{\mathfrak{B}} = \varphi(\langle x, y\rangle_{\mathfrak{A}}).$$

تعریف فوق نشان می‌دهد که به‌ازای هر $x \in E$ داریم

$$\begin{aligned}\|\phi(x)\|^۲ &= \|\langle \phi(x), \phi(x)\rangle_{\mathfrak{B}}\| = \|\varphi(\langle x, x\rangle_{\mathfrak{A}})\| \\ &\leq \|\langle x, x\rangle_{\mathfrak{A}}\| = \|x\|^۲\end{aligned}$$

لذا ϕ یک عملگر کران‌دار با $\|\phi\| \leq ۱$ است.
در [۱۸] نتایجی در مورد پایایی قاب‌ها تحت φ-ریخت‌ها به دست آمده‌اند، همچنین مثالی از یک φ-ریخت که الحاقی‌پذیر نیست ارائه شده است. اکنون پایایی دوگان‌ها و g-دوگان‌ها تحت این عملگرها را مورد توجه قرار می‌دهیم. دقت شود که در مورد این عملگرها، طول‌پا بودن یعنی برقراری تساوی $\|\phi(x)\|^۲ = \|x\|^۲$ (به‌ازای هر $x \in E$). چون ϕ لزوماً الحاقی‌پذیر نیست، نمی‌توان از تساوی $\phi^*\phi = Id_E$ استفاده نمود. از تعریف دوگان یک g-قاب برمی‌آید که $\Gamma = \{\Gamma_i\}_{i\in I}$ یک g-دوگان $\Lambda = \{\Lambda_i\}_{i\in I}$ است اگر و فقط اگر به‌ازای هر $x, y \in E$ داشته باشیم

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle \Lambda_i x, \Gamma_i y\rangle.$$

قضیه ۱۲.۳. فرض کنیم $E_۱$ یک C^*-مدول هیلبرت و $\Gamma = \{\Gamma_i \in \mathfrak{L}(E_۱, E) : i \in I\}$ یک g-دوگان برای $\Lambda = \{\Lambda_i \in \mathfrak{L}(E_۱, E) : i \in I\}$ باشد. همچنین فرض می‌کنیم به‌ازای هر $i \in I$، $\phi\Gamma_i$ و $\phi\Lambda_i$ الحاقی‌پذیر باشند. در این صورت $\Gamma_\phi := \{\phi\Gamma_i\}_{i\in I}$ و $\Lambda_\phi := \{\phi\Lambda_i\}_{i\in I}$ دو g-دنبالهٔ بسل هستند. اگر Γ_ϕ یک g-دوگان Λ_ϕ باشد، آن‌گاه ϕ طول‌پا است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم Λ_ϕ و Γ_ϕ دو g-دنبالهٔ بسل هستند. فرض کنیم $f \in E_1$ چون $\{\Lambda_i\}_{i\in I}$ یک g-دنبالهٔ بسل است، پس $\sum_{i\in I}\langle \Lambda_i f, \Lambda_i f\rangle$ با نرم همگراست، لذا تساوی

$$\sum_{i\in I}\langle \phi\Lambda_i f, \phi\Lambda_i f\rangle = \varphi\left(\sum_{i\in I}\langle \Lambda_i f, \Lambda_i f\rangle\right)$$

ایجاب می‌کند که $\sum_{i\in I}\langle \phi\Lambda_i f, \phi\Lambda_i f\rangle$ با نرم همگرا باشد. همچنین

$$\left\|\sum_{i\in I}\langle \phi\Lambda_i f, \phi\Lambda_i f\rangle\right\| = \left\|\varphi\left(\sum_{i\in I}\langle \Lambda_i f, \Lambda_i f\rangle\right)\right\| \leq \left\|\sum_{i\in I}\langle \Lambda_i f, \Lambda_i f\rangle\right\| \leq B_\Lambda \|f\|^2.$$

اکنون از قضیه ۱۰.۳ نتیجه می‌شود که $\{\phi\Lambda_i\}_{i\in I}$ یک g-دنبالهٔ بسل است. به همین شکل می‌توان نشان داد که Γ_ϕ هم یک g-دنبالهٔ بسل است. به‌ازای هر $f, g \in E_1$ داریم

$$\left\|\sum_{i\in I}\langle \phi\Lambda_i f, \phi\Gamma_i g\rangle\right\| = \left\|\varphi\left(\sum_{i\in I}\langle \Lambda_i f, \Gamma_i g\rangle\right)\right\| = \|\varphi(\langle f, g\rangle)\| = \|\langle \phi(f), \phi(g)\rangle\|.$$

اینک اگر Γ_ϕ یک g-دوگان Λ_ϕ باشد، داریم $\|\langle f, g\rangle\| = \|\sum_{i\in I}\langle \phi\Lambda_i f, \phi\Gamma_i g\rangle\|$ لذا $\|\langle \phi(f), \phi(g)\rangle\| = \|\langle f, g\rangle\|$ و این تساوی ایجاب می‌کند که ϕ طول‌پا باشد. $\square$

ملاحظه ۱۳.۳. فرض کنیم $\phi : E \longrightarrow F$ پوشا باشد. در این صورت اگر $y \in F$، آن‌گاه $p \in E$ موجود است به‌طوری‌که $\phi(p) = y$. اکنون به‌ازای هر $a \in \mathfrak{A}$ و $x \in E$ داریم:

$$\begin{aligned}
\langle \phi(ax), y\rangle &= \langle \phi(ax), \phi(p)\rangle \\
&= \varphi(\langle ax, p\rangle) \\
&= \varphi(a\langle x, p\rangle) \\
&= \varphi(a)\varphi(\langle x, p\rangle) \\
&= \varphi(a)\langle \phi(x), \phi(p)\rangle \\
&= \langle \varphi(a)\phi(x), y\rangle.
\end{aligned}$$

چون تساوی فوق به‌ازای هر $a \in \mathfrak{A}$، $x \in E$ و $y \in F$ برقرار است، داریم

$$\phi(ax) = \varphi(a)\phi(x).$$

قضیه ۱۴.۳. فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ و $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in I}$ دو دنبالهٔ بسل در E باشند به‌طوری‌که $\mathcal{G}$ یک دوگان $\mathcal{F}$ است. در این صورت اگر ϕ پوشا باشد، آن‌گاه $\mathcal{G}_\phi := \{\phi g_i\}_{i\in I}$ نیز یک دوگان برای $\mathcal{F}_\phi := \{\phi f_i\}_{i\in I}$ است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $\mathcal{G}_\phi$ و $\mathcal{F}_\phi$ دنباله‌های بسل هستند. فرض کنیم $h \in F$. چون ϕ پوشا است، پس یک $f \in E$ موجود است به‌طوری‌که $\phi(f) = h$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I}\langle h, \phi(f_i)\rangle\langle \phi(f_i), h\rangle &= \sum_{i\in I}\langle \phi(f), \phi(f_i)\rangle\langle \phi(f_i), \phi(f)\rangle \\
&= \sum_{i\in I}\varphi(\langle f, f_i\rangle)\varphi(\langle f_i, f\rangle) = \varphi\left(\sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle\langle f_i, f\rangle\right).
\end{aligned}$$

چون $\mathcal{F}$ یک دنبالهٔ بسل است، سری $\sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle\langle f_i, f\rangle$ با نرم همگرا است، لذا $\sum_{i\in I}\langle h, \phi(f_i)\rangle\langle \phi(f_i), h\rangle$ نیز عضوی از C^*-جبر است. همچنین

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i\in I}\langle h,\phi(f_i)\rangle\langle\phi(f_i),h\rangle\right\| &= \left\|\left\langle\sum_{i\in I}\langle h,\phi(f_i)\rangle\phi(f_i),h\right\rangle\right\| \\
&= \left\|\left\langle\phi\left(\sum_{i\in I}\langle f,f_i\rangle f_i\right),\phi(f)\right\rangle\right\| \\
&= \left\|\varphi\left(\sum_{i\in I}\langle f,f_i\rangle\langle f_i,f\rangle\right)\right\| \\
&\leq \|B_{\mathcal{F}}\varphi(\langle f,f\rangle)\| \\
&= B_{\mathcal{F}}\|\phi(f)\|^۲ = B_{\mathcal{F}}\|h\|^۲.
\end{aligned}$$

لذا بنا بر قضیه ۶.۳، $\mathcal{F}_\phi$ یک دنبالهٔ بسل است. به همین ترتیب، می‌توان نشان داد $\mathcal{G}_\phi$ نیز دنبالهٔ بسل است. اکنون نشان می‌دهیم $\mathcal{G}_\phi$ یک دوگان برای $\mathcal{F}_\phi$ است. فرض کنیم $h\in F$. چون ϕ پوشا است، پس یک $f\in E$ موجود است به‌طوری‌که $\phi(f)=h$. اکنون داریم

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I}\langle h,\phi(f_i)\rangle\phi(g_i) &= \sum_{i\in I}\langle\phi(f),\phi(f_i)\rangle\phi(g_i) \\
&= \sum_{i\in I}\varphi(\langle f,f_i\rangle)\phi(g_i) \\
&= \sum_{i\in I}\phi(\langle f,f_i\rangle g_i) \\
&= \phi\left(\sum_{i\in I}\langle f,f_i\rangle g_i\right) = \phi(f) = h.
\end{aligned}$$

رابطهٔ فوق بدین معنی است که $\mathcal{G}_\phi$ یک دوگان برای $\mathcal{F}_\phi$ است. $\square$

دقت کنید که قضیهٔ قبل لزوماً برای هر عملگر الحاقی‌پذیر حتی اگر وارون‌پذیر باشد، صحیح نیست.

مثال ۱۵.۳. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت با پایهٔ متعامدیکه $\mathcal{F}=\{e_n\}_{n=۱}^{\infty}$ باشد. همچنین فرض می‌کنیم α یک عدد مختلط غیرصفر با خاصیت $|\alpha|\neq ۱$ باشد و $T=\alpha\cdot Id_H$. در این صورت $\mathcal{F}$ یک دوگان خودش است؛ اما به‌ازای هر $f\in H$ داریم

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\langle f,Te_n\rangle Te_n = |\alpha|^۲\sum_{n=۱}^{\infty}\langle f,e_n\rangle e_n = |\alpha|^۲ f.$$

چون $|\alpha|\neq ۱$، به‌ازای هر $f\in H$، تساوی $\sum_{n=۱}^{\infty}\langle f,Te_n\rangle Te_n = f$ حاصل نمی‌شود، لذا $\{Te_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دوگان خودش نیست. دقت شود که T یک عملگر کران‌دار، الحاقی‌پذیر و وارون‌پذیر است.

References

[1] Ali, S.T., Antoine, J.P., & Gazeau, J.P. (1993). Continuous frames in Hilbert spaces. *Ann. Physics*, 222, 1–37. DOI: https://doi.org/10.1006/aphy.1993.1016.

[2] Arambasic, L. (2007). On frames for countably generated Hilbert C^*-modules. *Proc. Amer. Math. Soc*, 135, 469–478. DOI: https://doi.org/10.1090/s0002-9939-06-08498-x.

[3] Bakic, D., & Guljas, B. (2002). On a class of module maps of Hilbert C^*-modules. *Mathematical Communications*, 7, 177–192.

[4] Christensen, O. (2008). Frames and Bases. *Birkhauser, Boston*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4678-3.

[5] Christensen, O., & Laugesen, R.S. (2011). Approximate dual frames in Hilbert spaces and applications to Gabor frames. *Sampl Theory Signal Image Process*, 9, 77–90. DOI: https://doi.org/10.1007/BF03549525.

[6] Daubechies, I., Grossmann, A., & Meyer, Y. (1986). Painless nonorthogonal expansions. *J. Math. Phys*, 27, 1271–1283. DOI: https://doi.org/10.1063/1.527388.

[7] Duffin, R.J., & Schaeffer, A.C. (1952). A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc*, 72, 341–366. DOI: https://doi.org/10.2307/1990760.

[8] Frank, M., & Larson, D.R. (2002). Frames in Hilbert C^*-modules and C^*-algebras. *J. Operator Theory*, 48, 273–314.

[9] Gabardo, J.P., & Han, D. (2003). Frame associated with measurable spaces. *Adv. Comp. Math*, 18, 127–147. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1021312429186.

[10] Gabor, D. (1946). Theory of communications. *J. Inst. Electr. Eng*, 93, 429–457.

[11] Kaiser, G. (1994). A Friendly Guide to Wavelets. *Birkhauser, Boston*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8111-1.

[12] Khosravi, A., & Khosravi, B. (2008). Fusion frames and g-frames in Hilbert C^*-modules. *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process*, 6, 433–446. DOI: https://doi.org/10.1142/S0219691308002458.

[13] Khosravi, A., & Mirzaee Azandaryani, M. (2014). Approximate duality of g-frames in Hilbert spaces. *Acta. Math. Sci*, 34, 639–652. DOI: https://doi.org/10.1016/S0252-9602(14)60036-9.

[14] Lance, E.C. (1995). Hilbert C^*-modules: A Toolkit for Operator Algebraists. *Cambridge University Press, Cambridge*.

[15] Mirzaee Azandaryani, M. (2015). Approximate duals and nearly Parseval frames. *Turk. J. Math*, 39, 515–526. DOI: https://doi.org/10.3906/mat-1408-37.

[16] Mirzaee Azandaryani, M. (2017). Bessel multipliers and approximate duals in Hilbert C^*-modules. *J. Korean Math. Soc*, 54, 1063–1079. DOI: https://doi.org/10.4134/JKMS.j150701.

[17] Mirzaee Azandaryani, M. (2017). On the approximate duality of g-frames and fusion frames. *U. P. B. Sci. Bull. Ser A*, 79, 83–94.

[18] Mirzaee Azandaryani, M. (2019). Approximate duals and morphisms of Hilbert C^*-modules. *Ann Funct Anal*, 10, 525–536. DOI: https://doi.org/10.1215/20088752-2019-0011.

[19] Mirzaee Azandaryani, M. (2020). An operator theory approach to the approximate duality of Hilbert space frames. *J. Math. Anal. Appl*, 489, 1–13 (124177). DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124177.

[20] Mirzaee Azandaryani, M., & Javadi, Z. (2022). Pseudo-duals of continuous frames in Hilbert spaces. *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl*, 13, 1–16. DOI: https://doi.org/10.1007/s11868-022-00486-3.

[21] Rahimi, A., Darvishi, Z., & Daraby, B. (2019). Dual pair and approximate dual for continuous frames in Hilbert spaces. *Math. Rep*, 21, 173–191.

[22] Razghandi, A., & Arefijamaal, A.A. (2020). On the characterization of generalized dual frames. *U. P. B. Sci. Bull. Ser A*, 82, 161–170.

[23] Sun, W. (2006). G-frames and g-Riesz bases. *J. Math. Anal. Appl*, 322, 437–452. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.09.039.

[24] Xiao, X., & Zeng, X. (2010). Some properties of g-frames in Hilbert C^*-modules. *J. Math. Anal. Appl*, 363, 399–408. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.08.043.

[25] Yousefzadeheyni, A., & Abdollahpour, M.R. (2020). Some properties of approximately dual continuous g-frames in Hilbert spaces. *U. P. B. Sci. Bull. Ser A*, 82, 183–194.

Measure Algebras and Applications

Diagonal measure and entropy of dynamical systems

Mehdi Rahimi[1] ✉, **Nahid Bidabadi**[2]

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran.
   Email: m.rahimi@qom.ac.ir
2. Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran. Email: n_bidabadi90@yahoo.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 27 May 2023
Received in revised form:
27 July 2023
Accepted: 30 July 2023
Published Online:
30 September 2023

Keywords:
Metric entropy,
Information function,
Invariant measure,
Ergodic measure,
Diagonal measure

2020 Mathematics Subject Classification:
28D20, 37A35

ABSTRACT

In this paper, we first define the concept of diagonal measure corresponding to an invariant measure of a compact dynamical system and will investigate some of its properties. Finally, we show that, integrating a suitable function with respect to the diagonal measure results in the metric entropy of a compact dynamical system.

Cite this article: Rahimi, M., & Bidabadi, N. (2023). Diagonal measure and entropy of dynamical systems. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 53–62. http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9496.1005

Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/MAA.2023.9496.1005

Extended Abstract

Introduction

The concept of entropy of a dynamical system is introduced by Kolmogorov [6] and Sinai [15], in ergodic theory and dynamical systems. The topological versions of entropy are also defined by Adler [1]. Using some equivalent definitions by Dinabourg [5] and Bowen [2], the two previous versions of the concept of entropy are connected via the variational principle [5].

Shannon [14], McMillan [8] and Brieman [3] presented local approaches to entropy. The topological version of these local approaches is introduced by Brin and Katok [4]. Then, other approaches to the entropy of dynamical systems, with local nature, are introduced [11, 12].

This paper is also assisted by a new approach to the local entropy of dynamical systems. We first introduce the concept of diagonal measure corresponding to an invariant measure, and then we define the information function corresponding to a compact dynamical system.

Finally, we show that the introduced information function is a type of local entropy. More precisely, we prove that the integral of the introduced information function on the product space, with respect to the diagonal measure, results in the entropy of dynamical systems.

In Section 2, we present some required preliminaries. In Section 3, we define the diagonal measure and in Section 4, we introduce the information function and will prove our main theorem. Section 5 is a conclusion.

Conclusion

In this paper, the following definitions and results are given:

***Definition* 0.1.** *Let $f : X \to X$ be a continuous map on a compact metric space and μ be an f-invariant probability measure. Let also $\mu = \int_{E(X,f)} m\, d\tau(m)$ be the ergodic decomposition of μ. The diagonal measure of μ is defined as follows:*

$$\tilde{\mu} := \int_{E(X,f)} m \times m\, d\tau(m).$$

***Theorem* 0.2.** *For any f-invariant measure μ, the diagonal measure $\tilde{\mu}$ is absolutely continuous with respect to μ.*

***Definition* 0.3.** *The information function $I_f : X \times X \to [0, \infty]$ corresponding to a compact dynamical system (X, f) is defined by*

$$I_f(x, y) := \lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} j_n^*(x, y; \xi_k) \tag{0.1}$$

where $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ is an increasing sequence of measurable partitions of X such that $\lim_{k\to+\infty} \mathrm{diam}(\xi_k) \to 0$ and

$$j_n^*(x, y; \xi_k) := \begin{cases} -\frac{1}{n} \log j_n(x, y; \xi_k) & j_n(x, y; \xi_k) \neq 0 \\ 0 & j_n(x, y; \xi_k) = 0 \end{cases}$$

and

$$j_n(x, y; \xi_k) = \limsup_{l\to\infty} \frac{1}{l} \sum_{t=0}^{l-1} \chi_{\xi_k^n(x)}(f^t(y)).$$

The next theorem is the main result of this paper.

***Theorem* 0.4.** *Let (X, f) be a compact dynamical system. Then, for every f-invariant measure μ we have*

$$\int_{X\times X} I_f \, d\tilde{\mu} = h_\mu(f),$$

where $h_\mu(f)$ is the entropy of f with respect to μ.

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۶۲-۵۳

اندازه قطری و آنتروپی دستگاه‌های دینامیکی

مهدی رحیمی [۱] ✉، **ناهید بیدآبادی** [۲]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: m.rahimi@qom.ac.ir
۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: n_bidabadi90@yahoo.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۳/۶
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۵/۵
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۵/۸
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
آنتروپی متریک،
تابع اطلاعات،
اندازهٔ پایا،
اندازهٔ ارگودیک،
اندازهٔ قطری

رده‌بندی ریاضی:
28D20, 37A35

چکیده

در این مقاله، ابتدا مفهوم اندازهٔ قطری متناظر با یک اندازهٔ پایا تحت یک دستگاه دینامیکی فشرده را تعریف کرده و به بررسی برخی از خواص آن می‌پردازیم. در نهایت، نشان می‌دهیم که انتگرال‌گیری از یک تابع مناسب، نسبت به اندازهٔ قطری، منجر به آنتروپی متریک یک دستگاه دینامیکی فشرده می‌شود.

استناد: رحیمی، مهدی.، بیدآبادی، ناهید. (۱۴۰۲). اندازه قطری و آنتروپی دستگاه‌های دینامیکی. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۶۲-۵۳.

http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9496.1005

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

مفهوم آنتروپی یک دستگاه دینامیکی، توسط کولموگوروف [۶] و سینای [۱۵] وارد نظریهٔ ارگودیک و دستگاه‌های دینامیکی شد. نسخهٔ توپولوژیک آنتروپی نیز توسط آدلر [۱] تعریف شد. به کمک تعاریف معادل ارائه‌شده توسط دینابورگ [۵] و بوون [۲]، دو نسخهٔ فوق از مفهوم آنتروپی، توسط اصل وردش به یکدیگر متصل شدند. شانون [۱۴]، مک میلان [۸] و بریمن [۳]، رویکردهای موضعی به مفهوم آنتروپی را ارائه نمودند. نسخهٔ توپولوژیک این رویکردهای موضعی، توسط برین و کاتوک [۴] معرفی شدند. پس از آن، رویکردهای دیگری نیز با سرشت موضعی، برای دستگاه‌های دینامیکی و تعمیم‌های آن ارائه شدند [۱۱، ۱۲]. این مقاله نیز اختصاص به معرفی یک رویکرد موضعی جدید به مفهوم آنتروپی دستگاه‌های دینامیکی دارد. در این مقاله، ابتدا مفهوم اندازهٔ قطری متناظر با یک اندازهٔ پایا را معرفی نموده و سپس به تعریف تابع اطلاعات متناظر با یک دستگاه دینامیکی فشرده می‌پردازیم. درنهایت نشان می‌دهیم که تابع اطلاعات تعریف‌شده در این مقاله، نوعی آنتروپی موضعی را مشخص می‌کند. به بیان دقیق‌تر، ثابت می‌کنیم که انتگرال تابع اطلاعات تعریف‌شده بر فضای حاصل‌ضربی، نسبت به اندازهٔ قطری، برابر آنتروپی دستگاه دینامیکی است.

در بخش دوم این مقاله، ابتدا به مفاهیم مقدماتی مورد نیاز می‌پردازیم. در بخش سوم اندازهٔ قطری را تعریف کرده و در بخش چهارم به معرفی تابع اطلاعات پرداخته و قضیهٔ اصلی مقاله را ثابت می‌کنیم. بخش پنجم نیز به نتیجه‌گیری اختصاص یافته است.

۲ مفاهیم مقدماتی

در این بخش مفاهیم مقدماتی و پیش‌نیازهای مورد استفاده در بخش بعدی این مقاله را از نظر می‌گذرانیم. در سرتاسر این مقاله، X یک فضای متریک فشرده و $f : X \to X$ یک تابع پیوسته است. تحت این شرایط، زوج (X, f) را یک دستگاه دینامیکی فشرده می‌نامیم. روشن است که X به‌طور طبیعی به σ -جبر بورل $\mathcal{B}_X$ مجهز است.

۱.۲ اندازه‌های پایا و تجزیهٔ ارگودیک

اندازهٔ بورل μ بر X را یک اندازهٔ احتمال نامیم، هرگاه $\mu(X) = 1$. مجموعهٔ همهٔ اندازه‌های بورل احتمال بر X را با $M(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. اندازهٔ بورل احتمال μ را f -پایا نامیم هرگاه داشته باشیم:

$$\forall B \in \mathcal{B}_X \quad \mu(f^{-1}(B)) = \mu(B).$$

مجموعهٔ کلیهٔ اندازه‌های f -پایا را با نماد $M(X, f)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۲. اندازهٔ f -پایای μ را ارگودیک نامیم، هرگاه برای هر مجموعهٔ بورل B، رابطه $f^{-1}(B) = B$ نتیجه دهد $\mu(B) = 0$ یا $\mu(B) = 1$.

به عبارت دیگر، اندازهٔ f -پایای μ، ارگودیک است، هرگاه تنها مجموعه‌های پایا تحت f، مجموعه‌های پوچ یا از اندازهٔ کامل باشند. مجموعهٔ کلیهٔ اندازه‌های ارگودیک f را با $E(X, f)$ نمایش می‌دهیم.

قضیهٔ زیر وجود اندازه‌های پایا را برای دستگاه‌های دینامیکی فشرده، تضمین می‌کند.

قضیه ۳.۲. (کریلوف)[۱۶] اگر (X, f) یک دستگاه دینامیکی فشرده باشد، آنگاه $M(X, f) \neq \emptyset$.

بر فضای $M(X)$، توپولوژی ضعیف-ستاره به‌عنوان کوچک‌ترین (ضعیف‌ترین) توپولوژی که نسبت به آن کلیهٔ توابع $\mu \longmapsto \int_X \phi d\mu$ $(\phi \in C(X))$ پیوسته‌اند، تعریف می‌شود. توجه کنید که تحت این توپولوژی، همگرایی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mu_n \to \mu \iff \forall \phi \in C(X) \quad : \quad \int \phi \, d\mu_n \to \int \phi \, d\mu.$$

قضیهٔ بعدی، مهم‌ترین خواص توپولوژی ضعیف-ستاره بر $M(X)$ را بیان می‌دارد [۱۶].

قضیه ۴.۲.

۱. $M(X)$ نسبت به توپولوژی ضعیف- ستاره، فشرده است.

۲. $M(X, f)$ یک زیرمجموعهٔ ناتهی، محدب و فشرده از $M(X)$ است.

۳. مجموعهٔ نقاط گوشه‌ای $M(X,f)$ برابر $E(X,f)$ است.

با توجه به قضیهٔ قبل، اگر $E(X,f)$ متناهی باشد، آنگاه هر عضو $M(X,f)$ را می‌توان به‌صورت ترکیب محدب از اعضای $E(X,f)$ نمایش داد. به عبارت دیگر، اگر $E(X,f)=\{\mu_۱,\mu_۲,\cdots,\mu_k\}$، آنگاه، برای هر $\mu\in M(X,f)$، اعداد $۰\leq\lambda_۱,\cdots,\lambda_n\leq ۱$ موجودند به‌گونه‌ای که $\sum_{i=۱}^k\lambda_i=۱$ و $\mu=\sum_{i=۱}^k\lambda_i\mu_i$. به‌طور مثال اگر $X\subseteq\mathbb{R}^۲$ دایرهٔ واحد به مرکز $(۰,۱)$ بوده، $N=(۰,۲)$ و $S=(۰,۰)$، نگاشت شمال-جنوب $f:X\to X$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases}\phi^{-۱}(\frac{۱}{۲}\phi(x)) & x\in X-\{N\}\\ N & x=N\end{cases}$$

که در آن، برای $x\in X-\{N\}$، $\phi(x)$ محل برخورد خط واصل N و x با محور طول‌ها است. در این صورت، به‌سادگی دیده می‌شود که $E(X,f)=\{\delta_N,\delta_S\}$ که در آن δ_x اندازهٔ دیراک متمرکز بر x است. در نتیجه

$$M(X,f)=\{\lambda\delta_N+(۱-\lambda)\delta_S\ :\ \lambda\in[۰,۱]\}.$$

قضیهٔ زیر تعمیم مطلب فوق برای حالتی است که $E(X,f)$ نامتناهی است.

قضیه ۵.۲. فرض کنید (X,f) یک دستگاه دینامیکی فشرده باشد. برای هر $\mu\in M(X,f)$، اندازهٔ احتمال یکتای $\tau=\tau_\mu$ بر زیرمجموعه‌های بورل $M(X,f)$ موجود است به‌گونه‌ای که $\tau(E(X,f))=۱$ و برای هر $\phi\in C(X)$:

$$\int_X\phi\,d\mu=\int_{E(X,f)}\left(\int_X\phi\,dm\right)d\tau(m).$$

تحت شرایط فوق می‌نویسیم $\mu=\int_{E(X,f)}m\,d\tau(m)$ و آن را تجزیهٔ ارگودیک μ می‌نامیم.

۲.۲ آنتروپی متریک

مفهوم آنتروپی یک دستگاه دینامیکی نخستین بار توسط کولموگروف [۶] و سینای [۱۵] معرفی شد. این تعریف بر اساس تعریف آنتروپی در نظریهٔ اطلاعات است که توسط یک مهندس آمریکایی به نام کلود شانون [۱۴] ارائه شد. فرض کنید $\xi=\{A_۱,\cdots,A_k\}$ افرازی بورل از فضای X باشد. به‌علاوه، فرض کنید $\mu\in M(X,f)$. آنتروپی افراز ξ نسبت به μ عبارت است از

$$H_\mu(\xi)=-\sum_{i=۱}^k\mu(A_i)\log\mu(A_i).$$

توجه کنید که در اینجا لگاریتم در مبنای عدد نپر است. سپس آنتروپی دستگاه دینامیکی f نسبت به افراز ξ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h_\mu(f,\xi):=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}H_\mu(\bigvee_{i=۰}^{n-۱}f^{-i}\xi)$$

که در آن

$$f^{-i}\xi=\{f^{-i}(A_۱),\cdots,f^{-i}(A_k)\}$$

و

$$\bigvee_{i=۰}^{n-۱}f^{-i}\xi=\{C=\bigcap_{l=۰}^{k-۱}T^{-l}(A_{i_l})\ :\ A_{i_j}\in\xi\ \ ,j=۱,۲,\cdots,l\}$$

در نهایت، آنتروپی(متریک) f نسبت به μ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$h_\mu(f)=\sup_\xi h_\mu(f,\xi),$$

که در آن سوپریمم بر کلیهٔ افرازهای اندازه‌پذیر X گرفته می‌شود.

رویکردهای مختلفی به آنتروپی دستگاه‌های دینامیکی وجود دارد. یکی از مهم‌ترین رویکردها، رویکرد موضعی به آنتروپی دستگاه‌های دینامیکی

است. شانون [۱۴]، مک میلان [۸] و بریمن [۳] رویکردهای موضعی مهمی به مفهوم آنتروپی دستگاه دینامیکی ارائه دادند. سپس برین و کاتوک [۴] نسخهٔ توپولوژیک این رویکرد را معرفی نمودند. رویکردهای موضعی دیگری به آنتروپی دستگاه‌های هموار توسط پسین [۹] و رله [۱۳] ارائه شدند. خواننده می‌تواند رویکردهای موضعی دیگری را در [۱۱، ۱۲] مشاهده نماید. فرض کنید ξ افرازی اندازه‌پذیر از X باشد. قرار دهید $\xi^n := \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\xi$ و فرض کنید $\xi^n(x)$ عضوی از ξ^n باشد که شامل x است. فرض کنید $\mu \in M(X,f)$. قضیهٔ زیر، مهم‌ترین حکم در مورد رویکرد موضعی به آنتروپی است [۷].

قضیه ۶.۲. (شانون-مک میلان-بریمن) برای هر افراز ξ با آنتروپی متناهی، حد

$$h_\mu(f,\xi,x) := \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mu(\xi^n(x))$$

برای تقریباً هر x در X موجود است. به‌علاوه، تابع $x \mapsto h_\mu(f,\xi,x)$، μ-انتگرال‌پذیر است و داریم:

$$\int_X h_\mu(f,\xi,x)\,d\mu(x) = h_\mu(f,\xi).$$

اگر μ، f-ارگودیک باشد، آنگاه $h_\mu(f,\xi,x) = h_\mu(f,\xi)$، برای تقریباً هر $x \in X$.

قضیهٔ زیر بیان می‌کند که آنتروپی، نسبت به اندازهٔ μ آفین است [۱۶].

قضیه ۷.۲. (ژاکوب) فرض کنید $\mu = \int_{E(X,f)} m\,d\tau(m)$ تجزیهٔ ارگودیک برای اندازهٔ f پایای μ باشد. در این صورت:

۱. برای هر افراز متناهی ξ داریم: $h_\mu(f,\xi) = \int_{E(X,f)} h_m(f,\xi)\,d\tau(m)$.

۲. $h_\mu(f) = \int_{E(X,f)} h_m(f)\,d\tau(m)$.

۳ اندازهٔ قطری متناظر با اندازه‌های پایا

در این بخش به معرفی اندازهٔ قطری متناظر با یک اندازهٔ f-پایا می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنید $\mu \in M(X,f)$. به‌علاوه، فرض کنید:

$$\mu = \int_{E(X,f)} m\,d\tau(m)$$

تجزیهٔ ارگودیک μ باشد. اندازهٔ قطری μ که آن را با $\tilde{\mu}$ نمایش می‌دهیم، بر فضای حاصل‌ضربی $(X\times X, \mathcal{B}_X \bigotimes \mathcal{B}_X)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\mu} := \int_{E(X,f)} m\times m\,d\tau(m).$$

ملاحظه ۲.۳. توجه کنید که اگر $E(X,f) = \{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k\}$ متناهی باشد، آنگاه برای $\mu \in M(X,f)$ داریم

$$\mu = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i\mu_i \qquad (\lambda_i \in [0,1]).$$

در نتیجه، اندازهٔ قطری متناظر با μ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{\mu} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\ \mu_i\times\mu_i.$$

توجه کنید که به‌سادگی دیده می‌شود که اگر $\mu = \int_{E(X,f)} m\,d\tau(m)$ آنگاه،

$$\mu\times\mu = \int_{E(X,f)}\int_{E(X,f)} m\times\nu\,d\tau(m)d\tau(\nu).$$

اکنون قضیهٔ زیر را داریم.

قضیه ۳.۳. برای هر $\mu \in M(X,f)$ داریم $\tilde{\mu} << \mu \times \mu$ ، یعنی $\tilde{\mu}$ نسبت به $\mu \times \mu$ به‌طور مطلق پیوسته است.

اثبات. فرض کنید که $D \subseteq X \times X$ اندازه‌پذیر باشد و به‌علاوه $\mu \times \mu(D) = ۰$. پس

$$\int_{E(X,f)} \int_{E(X,f)} m \times \nu(D)\, d\tau(m)\, d\tau(\nu) = ۰.$$

در نتیجه $m \times \nu(D) = ۰$ برای تقریباً هر ν و m در $E(X,f)$. به‌طور خاص، برای تقریباً هر m در $E(X,f)$ داریم $m \times m(D) = ۰$ و در نتیجه

$$\tilde{\mu}(D) = \int_{E(X,f)} m \times m(D)\, d\tau(m) = ۰$$

پس $\tilde{\mu} << \mu \times \mu$. □

قضیهٔ بعد در [۱۰] ثابت شده است.

قضیه ۴.۳. فرض کنید $f_i : X_i \to X_i$ $(i = ۱, ۲)$ دو دستگاه دینامیکی مزدوج توپولوژیک باشند، یعنی همئومرفیسم $\phi : X_۱ \to X_۲$ موجود باشد به‌گونه‌ای که $\phi \circ f_۱ = f_۲ \circ \phi$. اگر $\mu_۱ \in M(X_۱, f_۱)$ و $\mu_۲ = \phi_* \mu_۱$، آنگاه $\tilde{\mu_۲} = (\phi \times \phi)_* \tilde{\mu_۱}$.

۴ تابع اطلاعات و آنتروپی

در این بخش به معرفی تابع اطلاعات موضعی پرداخته و نشان می‌دهیم که این تابع، در واقع نوعی آنتروپی موضعی است.

تعریف ۱.۴. دستگاه دینامیکی فشردهٔ (X,f) را در نظر بگیرید. نگاشت اطلاعات f ، $I_f : X \times X \to [۰, \infty]$ به‌صورت

$$I_f(x,y) := \lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} j_n^*(x,y;\xi_k) \qquad (۱.۴)$$

تعریف می‌شود که در آن $\{\xi_k\}_{k\geq ۱}$ دنباله‌ای صعودی از افرازهای اندازه‌پذیر X با شرط $\lim_{k\to+\infty} \operatorname{diam}(\xi_k) \to ۰$ است و

$$j_n^*(x,y;\xi_k) := \begin{cases} -\frac{۱}{n} \log j_n(x,y;\xi_k) & j_n(x,y;\xi_k) \neq ۰ \\ ۰ & j_n(x,y;\xi_k) = ۰ \end{cases}$$

و

$$j_n(x,y;\xi_k) = \limsup_{l\to\infty} \frac{۱}{l} \sum_{t=۰}^{l-۱} \chi_{\xi_k^n(x)}(f^t(y)).$$

توجه کنید که $\xi^n(x)$ عنصری از $\vee_{i=۰}^{n-۱} f^{-i}\xi$ است که شامل x است. به‌علاوه، توجه کنید که I_f اندازه‌پذیر است و حد موجود در تعریف ۱.۱ موجود است، چراکه دنبالهٔ $\{j_n^*(x,y;\xi_k)\}_{k\geq ۱}$ صعودی است.
قضیهٔ بعد، نتیجهٔ اصلی این مقاله است.

قضیه ۲.۴. فرض کنید (X,f) یک دستگاه دینامیکی فشرده باشد. برای هر $\mu \in M(X,f)$ داریم:

$$\int_{X\times X} I_f\, d\tilde{\mu} = h_\mu(f).$$

اثبات. ابتدا فرض کنید $\nu \in E(X,f)$. در این صورت $\tilde{\nu} = \nu \times \nu$. برای $x \in X$، با توجه به قضیهٔ ارگودیک بیرخوف، زیرمجموعهٔ بورل $B_{kn}^x \subseteq X$ موجود است به‌گونه‌ای که $\nu(B_{kn}^x) = ۱$ و

$$\forall y \in B_{kn}^x \quad : \quad j_n(x,y;\xi_k) = \nu(\xi_k^n(x)).$$

قرار دهید $B^x = \bigcap_{k,n\geq ۱} B_{kn}^x$. آنگاه $\nu(B^x) = ۱$ و برای هر $y \in B^x$:

$$j_n(x,y;\xi_n) = \nu(\xi_k^n(x)) \quad \forall k,n \geq ۱.$$

از طرف دیگر، طبق قضیهٔ شانون-مک میلان-بریمن، مجموعهٔ بورل A موجود است به‌گونه‌ای که $\nu(A) = ۱$ و برای هر $x \in A$:

$$\limsup_{n\to\infty} j_n^*(x, y; \xi_k) = h_\nu(f, \xi_k, x) \quad (k \geq ۱, y \in B^x)$$

پس برای $x \in A$ و $y \in B^x$،

$$\limsup_{n\to\infty} j_n^*(x, y; \xi_k) = h_\nu(f, \xi_k, x) \quad (k \geq ۱).$$

اکنون، به کمک قضیهٔ همگرایی یکنوا و قضیهٔ ۳ ۰ ۸ در [۱۶] و با توجه به این‌که $\tilde{\nu} = \nu \times \nu$، داریم

$$\begin{aligned}
\int_{X\times X} I_f \, d\tilde{\nu} &= \int_{X\times X} I_f \, d\nu \times \nu \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{X\times X} \limsup_{n\to\infty} j_n^*(x, y; \xi_k) d\nu \times \nu(x, y) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_X \left(\int_X \limsup_{n\to\infty} j_n^*(x, y; \xi_k) d\nu(y) \right) d\nu(x) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_X \left(\int_{B^x} \limsup_{n\to\infty} j_n^*(x, y; \xi_k) d\nu(y) \right) d\nu(x) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_X h_\nu(f, \xi_k, x) d\nu(x) \\
&= \lim_{k\to\infty} h_\nu(f, \xi_k) \\
&= h_\nu(f). \qquad (۲.۴)
\end{aligned}$$

در نهایت، فرض کنید $\mu \in M(X, f)$. آنگاه $\tilde{\mu} = \int_{E(X,f)} \nu \times \nu d\tau(\nu)$، در نتیجه، در پرتوی رابطهٔ قبل و قضیهٔ ژاکوب، داریم:

$$\begin{aligned}
\int_{X\times X} I_f \, d\tilde{\mu} &= \int_{E(X,f)} \left(\int_{X\times X} I_f(x, y) d\nu \times \nu(x, y) \right) d\tau(\nu) \qquad (۳.۴) \\
&= \int_{E(X,f)} h_\nu(f) d\tau(\nu) \qquad (۴.۴) \\
&= h_\mu(f). \qquad (۵.۴)
\end{aligned}$$

□

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، تابع اطلاعات را بر فضای حاصل‌ضربی تعریف کرده و در پرتوی مفهوم اندازهٔ قطری متناظر با اندازه‌های پایا، نشان دادیم که این تابع، نوعی آنتروپی موضعی است، بدین معنی که انتگرال‌گیری از تابع اطلاعات نسبت به اندازهٔ قطری منجر به آنتروپی متریک یک دستگاه دینامیکی می‌شود. نکتهٔ قابل توجه این است که برخلاف آنتروپی‌های موضعی برین-کاتوک [۴] و شانون-مک-میلان-بریمن [۳، ۸، ۱۴] تابع اطلاعات تعریف‌شده در این مقاله، مستقل از اندازه بوده و آنتروپی متریک نسبت به کلیهٔ اندازه‌های پایا را به دست می‌دهد.

References

[1] Adler, R.L., Konheim, A.G., & McAndrew, M.H. (1965). Topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc*, 114, 309–319. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1965-0175106-9.

[2] Bowen, R. (1976). Invariant measures for Markov maps of the interval. *Comm. Math. Physics*, 69, 1–17. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01941319.

[3] Breiman, L. (1957). The individual theorem of information theory. *Ann of Math Stat*, 28, 809–811; errata, 31 (1960), 809–810. DOI: https://doi.org/10.1214/aoms/1177706899.

[4] Brin, M., & Katok, A. (1983). On local entropy in geometric dynamics. 30–38, *New York, Springer-Verlag*, (Lecture Notes in Mathematics 1007). DOI: https://doi.org/10.1007/bfb0061408.

[5] Dinaburg, E.I. (1970). The relation between topological entropy and metric entropy. *Soviet Math*, 11, 13–16.

[6] Kolmogorov, A.N. (1958). New metric invariant of transitive dynamical systems and endomorphisms of Lebesgue spaces. *Doklady of Russian Academy of Sciences*, 119, 861–864.

[7] Mañé, R. (1987). Ergodic theory and differentiable dynamics. *Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-70335-5.

[8] McMillan, B. (1953). The basic theorems of information theory. *Ann. of Math. Statistics*, 24, 196–219. DOI: https://doi.org/10.1214/aoms/1177729028.

[9] Pesin, Ya. (1977). Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. *Russian Math. Surveys*, 32, 54–114. DOI: https://doi.org/10.1070/RM1977v032n04ABEH001639.

[10] Rahimi, M. (2021). A Spectral Representation for the Entropy of Topological Dynamical Systems. *J Dyn Control Syst*, 27, 573–584. DOI: https://doi.org/10.1007/s10883-020-09519-w.

[11] Rahimi, M., & Riazi, A. (2012). Entropy operator for continuous dynamical systems of finite topological entropy. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 38, 883–892.

[12] Rahimi, M., & Riazi, A. (2012). Entropy functional for continuous systems of finite entropy. *Acta Mathematica Scientia*, 32B, 775–782. DOI: https://doi.org/10.1016/S0252-9602(12)60057-5.

[13] Ruelle, D. (1987). An inequality for the entropy of differential maps. *Bol. Soc. Bras. de Mat*, 9, 83–87. DOI: https://doi.org/10.1007/bf02584795.

[14] Shannon, C. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell Syst. Tech. Journal*, 27, 379–423. DOI: https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x.

[15] Sinai, Ya.G. (1959). On the notion of entropy of a dynamical system. *Doklady of Russian Academy of Sciences*, 124, 768–771. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-87870-6_1.

[16] Walters, P. (1982). An introduction to ergodic theory. *Springer-Verlag*. DOI: https://doi.org/10.1007/springerreference_60354.

Measure Algebras and Applications

Some results on pseudo-duals of frames in Hilbert spaces

Zeinab Javadi[1]

1. Shahab Danesh University, Qom, Iran. Email: z.javadi@shdu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 11 June 2023
Received in revised form:
25 July 2023
Accepted: 30 July 2023
Published Online:
30 September 2023

Keywords:
Hilbert space,
Frame,
Dual,
Pseudo-dual,
Approximate dual

2020 Mathematics Subject Classification:
42C15

ABSTRACT

In this paper, we obtain some results for pseudo-duals, approximate duals, and duals of continuous and discrete frames in Hilbert spaces. In particular, the ones constructed by bounded operators inserted between the synthesis and analysis operators of a frame are considered. We show that under some conditions, they are stable under the action of bounded operators and small perturbations.

Cite this article: Javadi, Z. (2023). Some results on pseudo-duals of frames in Hilbert spaces. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 63–73. http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9555.1009

Publisher: University of Qom

DOI: 10.22091/MAA.2023.9555.1009

Extended Abstract

Introduction

Frames for Hilbert spaces were introduced in [6]. Let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space and let $\mathbb{I}$ be a finite or countable index set. A family $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}} \subseteq \mathcal{H}$ is a *discrete frame* for $\mathcal{H}$, if there exist $0 < A_{\mathcal{F}} \leq B_{\mathcal{F}} < \infty$, such that

$$A_{\mathcal{F}}\|f\|^2 \leq \sum_{i\in\mathbb{I}} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq B_{\mathcal{F}}\|f\|^2,$$

for each $f \in \mathcal{H}$. The sequence $\mathcal{F}$ is called a *Bessel sequence* if only the second inequality is required.

Continuous frames were introduced in [1, 10]. Let (Ω, μ) be a measure space and let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space. A weakly-measurable mapping $F : \Omega \to \mathcal{H}$ is called a *continuous frame* for $\mathcal{H}$ with respect to (Ω, μ) if there exist two positive constants A_F, B_F such that for each $f \in \mathcal{H}$, we have

$$A_F\|f\|^2 \leq \int_\Omega |\langle f, F(\omega)\rangle|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) \leq B_F\|f\|^2.$$

The positive numbers A_F and B_F are called the *lower and upper bounds* of the frame, respectively. The mapping F is called *tight* if $A_F = B_F$ and if $A_F = B_F = 1$, it is called a *Parseval frame*. If only the second inequality is required, we say that F is a *continuous Bessel mapping*. Suppose that $F : \Omega \to \mathcal{H}$ is a continuous Bessel mapping. Then the operator $T_F : L^2(\Omega, \mu) \to \mathcal{H}$ weakly defined by

$$\langle T_F\varphi, f\rangle = \textstyle\int_\Omega \varphi(\omega)\langle F(\omega), f\rangle \mathrm{d}\mu(\omega), \quad \varphi \in L^2(\Omega, \mu), f \in \mathcal{H},$$

is well-defined and bounded with $\|T_F\| \leq \sqrt{B_F}$. Indeed, $\int_\Omega \varphi(\omega)F(\omega)\mathrm{d}\mu(\omega)$ is an element of $\mathcal{H}$ and T_F can be written as $T_F(\varphi) = \int_\Omega \varphi(\omega)F(\omega)\mathrm{d}\mu(\omega)$. The operator T_F is called the *synthesis operator* of F and its adjoint which is given by

$$T_F^* : \mathcal{H} \to L^2(\Omega, \mu), (T_F^* f)(\omega) = \langle f, F(\omega)\rangle, \quad \omega \in \Omega, f \in \mathcal{H},$$

is the *analysis operator* of F. The operator $S_F = T_F T_F^*$ is a positive operator and if F is a continuous frame, then S_F is also an invertible operator and called the *frame operator* of F. In fact, for each $f, g \in \mathcal{H}$, we have

$$\langle S_F f, g\rangle = \textstyle\int_\Omega \langle f, F(\omega)\rangle\langle F(\omega), g\rangle \mathrm{d}\mu(\omega).$$

A Bessel mapping G such that $T_G T_F^*$ is equal to the identity operator on $\mathcal{H}$ is called a dual for F. A Bessel mapping G is a pseudo-dual for F if $T_G T_F^*$ is invertible. If the distance (with respect to the norm) between $T_G T_F^*$ and the identity operator on $\mathcal{H}$ is less than one, then G is called an approximate dual of F. Let F and G be two Bessel mappings and let $Q \in B(L^2(\Omega, \mu))$. The function G is said to be a *Q-pseudo-dual* (resp. *Q-dual*, *Q-approximate dual*) for F if the operator $S_{G,Q,F}$ defined by $S_{G,Q,F} := T_G Q T_F^*$ is invertible (resp. $S_{G,Q,F} = Id_{\mathcal{H}}$, $\|S_{G,Q,F} - Id_{\mathcal{H}}\| < 1$). For more results about pseudo-duals and approximate duals of continuous frames, see [13].

Conclusion

The main results of the paper are:

***Theorem* 0.1.** *Let F, G be two Bessel mappings and let $T \in B(\mathcal{H})$. In this case, $TF : \Omega \to \mathcal{H}$ and $TG : \Omega \to \mathcal{H}$ defined by $TF(x) = T(F(x))$ and $TG(x) = T(G(x))$ are Bessel mappings. Moreover, if TG is a Q-pseudo-dual of TF, then T is right-invertible.*

***Theorem* 0.2.** *Let G be a Q-pseudo-dual of F and $T \in B(\mathcal{H})$. If T is invertible, then TG is a Q-pseudo-dual of TF.*

***Theorem* 0.3.** *Let $F, G, M : \Omega \to \mathcal{H}$ be three Bessel mappings. Then $F - M : \Omega \to \mathcal{H}$ and $G - M : \Omega \to \mathcal{H}$ defined by $(F-M)(x) = F(x)-M(x)$ and $(G-M)(x) = G(x)-M(x)$ are Bessel mappings. Moreover, if $\|S_{G,Q,M}\| < 1$ and G is a Q-dual of F, then G is a Q-approximate dual of $F - M$. Also, if $\|S_{M,Q,F}\| < 1$ and G is a Q-dual of F, then $G - M$ is a Q-approximate dual of F.*

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۷۳-۶۳

برخی نتایج در مورد شبه‌دوگان‌های قاب‌ها در فضاهای هیلبرت

زینب جوادی [۱]

۱. دانشگاه شهاب دانش، قم، ایران. رایانامه: z.javadi@shdu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۳/۲۱
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۵/۳
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۵/۸
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
فضای هیلبرت،
قاب،
دوگان،
شبه‌دوگان،
دوگان تقریبی

رده‌بندی ریاضی:
42C15

چکیده

در این مقاله، نتایجی در مورد شبه‌دوگان‌ها، دوگان‌های تقریبی و دوگان‌های قاب‌های پیوسته و قاب‌های گسسته در فضاهای هیلبرت به دست می‌آیند. به‌ویژه، شبه‌دوگان‌ها، دوگان‌های تقریبی و دوگان‌هایی که با قرار گرفتن یک عملگر کران‌دار بین عملگر ترکیب و تحلیل قاب ساخته می‌شوند، مورد توجه قرار می‌گیرند. نشان داده می‌شود که درصورت برقراری برخی از شرایط، آنها تحت عملگرهای کران‌دار و اختلال‌های کوچک پایا هستند.

استناد: جوادی، زینب. (۱۴۰۲). برخی نتایج در مورد شبه‌دوگان‌های قاب‌ها در فضاهای هیلبرت. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۷۳-۶۳.

http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9555.1009

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه و پیش‌نیازها

مفهوم قاب‌ها در فضاهای هیلبرت برای اولین بار در سال ۱۹۵۲، توسط دافین [1] و شیفر [2] در [۶] معرفی شد و در سال ۱۹۸۶ توسط دوبچیز [3]، گراسمان [4] و میر [5] در [۳] مورد بازنگری قرار گرفت. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر و I یک مجموعهٔ متناهی یا شمارای نامتناهی باشد. یک خانواده مانند $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ یک **قاب** (قاب گسسته) برای $\mathcal{H}$ است هرگاه $0 < A_{\mathcal{F}} \leq B_{\mathcal{F}} < \infty$ موجود باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$A_{\mathcal{F}}\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq B_{\mathcal{F}}\|f\|^2,$$

چنانچه نامساوی سمت راست برقرار باشد $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ را یک **دنبالهٔ بسل** می‌نامیم. $A_{\mathcal{F}}$ و $B_{\mathcal{F}}$ را به ترتیب **کران پایین** و **کران بالای** قاب می‌نامیم (که یکتا نیستند). سوپریمم مجموعهٔ متشکل از تمام کران‌های پایین را کران پایین بهینه و اینفیمم مجموعهٔ متشکل از تمام کران‌های بالا را کران بالای بهینه می‌نامیم. یک قاب را **تنگ** می‌گوییم هرگاه $A_{\mathcal{F}} = B_{\mathcal{F}}$ و آن را **پارسوال** می‌نامیم هرگاه $A_{\mathcal{F}} = B_{\mathcal{F}} = 1$.

تعریف ۱.۱. فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل باشد. در این صورت

(۱) عملگر ترکیب $\mathcal{F}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_{\mathcal{F}} : \ell^2(I) \longrightarrow \mathcal{H}, \quad T_{\mathcal{F}}(\{c_i\}_{i\in I}) = \textstyle\sum_{i\in I} c_i f_i.$$

$T_{\mathcal{F}}$ خوش‌تعریف، خطی و کران‌دار است و به‌سادگی دیده می‌شود $\|T_{\mathcal{F}}\| \leq \sqrt{B_{\mathcal{F}}}$.

(۲) الحاقی عملگر $T_{\mathcal{F}}$، که به‌صورت زیر به دست می‌آید را عملگر تحلیل $\mathcal{F}$ می‌نامیم.

$$T^*_{\mathcal{F}} : \mathcal{H} \longrightarrow \ell^2(I), \quad T^*_{\mathcal{F}}(f) = \{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I}.$$

(۳) $S_{\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}T^*_{\mathcal{F}}$ عملگر بسل $\mathcal{F}$ نامیده می‌شود و به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم:

$$S_{\mathcal{F}}f = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle f_i.$$

عملگر $S_{\mathcal{F}}$، عملگری مثبت است. اگر $\mathcal{F}$ یک قاب باشد، آن‌گاه نامساوی عملگری

$$A_{\mathcal{F}} \cdot Id_{\mathcal{H}} \leq S_{\mathcal{F}} \leq B_{\mathcal{F}} \cdot Id_{\mathcal{H}}$$

برقرار است. اگر $\mathcal{F}$ یک قاب باشد، $S_{\mathcal{F}}$ را عملگر قاب $\mathcal{F}$ می‌نامیم که در این حالت، عملگری وارون‌پذیر است.

فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب گسسته در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. اگر T یک عملگر کران‌دار و پوشا روی $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه $\{Tf_i\}_{i\in I}$ نیز یک قاب گسسته برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است. با توجه به مطالب فوق، اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب گسسته در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه $\{S^{-1}_{\mathcal{F}} f_i\}_{i\in I}$ نیز یک قاب با کران‌های $B^{-1}_{\mathcal{F}}$ و $A^{-1}_{\mathcal{F}}$ است. چنانچه قرار دهیم $\widetilde{f}_i := S^{-1}_{\mathcal{F}} f_i$، در این صورت هر $f \in \mathcal{H}$ را می‌توان به شکلی که در زیر بیان شده نمایش داد. فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم:

$$f = \sum_{i\in I}\langle f, \widetilde{f}_i\rangle f_i = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle \widetilde{f}_i.$$

فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت، قاب $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in I}$ در $\mathcal{H}$ را یک دوگان برای $\{f_i\}_{i\in I}$ گوییم هرگاه به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$f = \sum_{i\in I}\langle f, g_i\rangle f_i.$$

دوگان $\widetilde{\mathcal{F}} = \{S^{-1}_{\mathcal{F}} f_i\}_{i\in I}$ را دوگان کانونی (استاندارد) متناظر با قاب $\{f_i\}_{i\in I}$ می‌نامیم.

[1] Duffin
[2] Schaefer
[3] Daubechies
[4] Grossmann
[5] Meyer

قضیه ۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ و $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in I}$ دو دنبالهٔ بسل در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند. در این صورت، گزاره‌های زیر معادل هستند:

(۱) برای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم $f = \sum_{i\in I}\langle f, g_i\rangle f_i$.

(۲) برای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم $f = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle g_i$.

(۳) برای هر $f, g \in \mathcal{H}$ داریم $\langle f, g\rangle = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle\langle g_i, g\rangle$.

قاب‌های پیوسته در یک فضای هیلبرت، تعمیم قاب‌های گسسته هستند که در ادامه به معرفی آنها می‌پردازیم. تعریف قاب‌های پیوسته توسط کایزر [1] در [۱۰] و به‌طور مستقل توسط علی [2]، آنتوآین [3] و گازییو [4] در [۱] صورت گرفت. گاباردو [5] و هان [6] در [۸] این قاب‌ها را «قاب‌های وابسته به فضاهای اندازه» نامیده‌اند. در سراسر این بخش، $\mathcal{H}$ را یک فضای هیلبرت مختلط جدایی‌پذیر و (Ω, μ) را یک فضای اندازه با اندازهٔ مثبت در نظر می‌گیریم. نگاشت $F : \Omega \longrightarrow \mathcal{H}$ را یک **قاب پیوسته** برای $\mathcal{H}$ نسبت به (Ω, μ) می‌نامیم، هرگاه

(۱) برای هر $f \in \mathcal{H}$، تابع $\omega \mapsto \langle f, F(\omega)\rangle$ روی Ω اندازه‌پذیر باشد یعنی F به‌طور ضعیف اندازه‌پذیر باشد.

(۲) ثابت‌های $0 < A_F \leq B_F < \infty$ چنان موجود باشند که برای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$A_F\|f\|^2 \leq \int_\Omega |\langle f, F(\omega)\rangle|^2 d\mu(\omega) \leq B_F\|f\|^2.$$

اعداد ثابت A_F و B_F کران‌های قاب پیوسته F نام دارند. اگر $A_F = B_F$، آن‌گاه F را یک قاب پیوستهٔ تنگ و اگر $A_F = B_F = 1$، آن‌گاه آن را یک قاب پیوستهٔ پارسوال می‌نامیم. نگاشت F را یک نگاشت بسل پیوسته از Ω به توی $\mathcal{H}$ گوییم هرگاه نامساوی سمت راست برقرار باشد. در این حالت B_F را یک کران بسل می‌نامیم. (دقت کنیم که اگر μ اندازهٔ شمارشی باشد و $\Omega = \mathbb{N}$ ، آن‌گاه F یک قاب گسسته خواهد بود).

تعریف ۳.۱. فرض کنیم $F : \Omega \to \mathcal{H}$ یک نگاشت بسل پیوسته باشد. در این صورت

(الف) عملگر $T_F : L^2(\Omega, \mu) \longrightarrow \mathcal{H}$ که به‌صورت

$$\langle T_F g, f\rangle = \int_\Omega g(\omega)\langle F(\omega), f\rangle d\mu(\omega), \quad f \in \mathcal{H}, g \in L^2(\Omega, \mu),$$

تعریف می‌شود را **عملگر ترکیب** F می‌نامیم (به‌آسانی ثابت می‌شود که T_F خوش‌تعریف، خطی و کران‌دار است و داریم $\|T_F\| \leq \sqrt{B_F}$).

(ب) عملگر $T_F^* : \mathcal{H} \longrightarrow L^2(\Omega, \mu)$ با ضابطهٔ $(T_F^* f)(\omega) = \langle f, F(\omega)\rangle$ را **عملگر تحلیل** F می‌نامیم.

(پ) عملگر $S_F = T_F T_F^*$ را عملگر F می‌نامیم.

فرض کنیم F یک قاب پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به (Ω, μ) باشد. در این صورت T_F عملگری پوشا است. اگر F یک قاب پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به (Ω, μ) باشد، آن‌گاه عملگر S_F که به‌صورت زیر تعریف می‌شود را **عملگر قاب** پیوسته می‌گوییم که یک عملگر مثبت و وارون‌پذیر است:

$$S_F : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \quad S_F(f) = \int_\Omega \langle f, F(\omega)\rangle F(\omega) d\mu(\omega), \qquad f \in \mathcal{H}.$$

[1] G. Kaiser
[2] S. T. Ali
[3] J. P. Antoine
[4] J. P. Gazeau
[5] Gabardo
[6] Han

فرض کنیم F و G دو نگاشت بسل از Ω به توی $\mathcal{H}$ باشند. در این صورت زوج (F,G) را یک زوج **دوگان** برای $\mathcal{H}$ می‌نامیم هرگاه برای هر $f,g\in\mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$\langle f,g\rangle=\int_\Omega\langle f,F(\omega)\rangle\langle G(\omega),g\rangle d\mu(\omega).$$

مشخص است که اگر نگاشت‌های T_F و T_G به‌ترتیب عملگرهای ترکیب برای نگاشت‌های بسل F و G باشند، آن‌گاه برای هر $f,g\in\mathcal{H}$ داریم:

$$\langle T_GT_F^*f,g\rangle=\langle T_F^*f,T_G^*g\rangle=\int_\Omega\langle f,F(\omega)\rangle\langle G(\omega),g\rangle d\mu(\omega).$$

بنابراین (F,G) یک زوج دوگان برای $\mathcal{H}$ است اگر و تنها اگر $T_GT_F^*=Id_{\mathcal{H}}$. علاوه‌بر دوگان‌ها، دوگان‌های تقریبی [۲، ۷، ۱۱، ۱۲] و شبه‌دوگان‌ها [۱۳] هم در نظریهٔ قاب‌ها حائز اهمیت هستند. در ادامه، نتایج جدیدی در مورد این مفاهیم به دست می‌آوریم.

۲ نتایج اصلی

این بخش را با تعریف زیر، برگرفته از [۸، ۹] و [۱۳] آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم F و G دو نگاشت بسل پیوسته باشند و $Q\in B(L^۲(\Omega,\mu))$.

(الف) تابع G را یک Q- شبه‌دوگان F می‌نامیم اگر عملگر $S_{G,Q,F}$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$S_{G,Q,F}:=T_GQT_F^*,$$

وارون‌پذیر باشد.

(ب) تابع G را یک Q-دوگان تقریبی F می‌نامیم اگر $\|S_{G,Q,F}-Id_{\mathcal{H}}\|<۱$.

(پ) تابع G را یک Q-دوگان F می‌نامیم اگر $S_{G,Q,F}=Id_{\mathcal{H}}$.

از تعریف فوق، مشخص است که یک Q-دوگان F یک Q-دوگان تقریبی F و یک Q-دوگان تقریبی F یک Q- شبه‌دوگان F است.

قضیه ۲.۲. فرض کنیم F و G دو نگاشت بسل باشند و $T\in B(\mathcal{H})$. در این صورت نگاشت‌های $TF:\Omega\longrightarrow\mathcal{H}$ و $TG:\Omega\longrightarrow\mathcal{H}$ که به‌صورت $TF(x)=T(F(x))$ و $TG(x)=T(G(x))$ تعریف می‌شوند، نگاشت‌های بسل هستند. علاوه بر این، اگر TG یک Q- شبه‌دوگان TF باشد، آن‌گاه T وارون‌پذیر راست است.

اثبات. چون به‌ازای هر $f\in\mathcal{H}$، نگاشت

$$x\mapsto\langle F(x),f\rangle$$

از Ω به $\mathbb{C}$ اندازه‌پذیر است، پس به‌ازای هر $f\in\mathcal{H}$، نگاشت

$$x\mapsto\langle TF(x),f\rangle=\langle F(x),T^*f\rangle$$

از Ω به $\mathbb{C}$ اندازه‌پذیر است. اینک، به‌ازای هر $f\in\mathcal{H}$، داریم:

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\langle f,TF(x)\rangle|^۲d\mu(x)&=\int_\Omega|\langle T^*f,F(x)\rangle|^۲d\mu(x)\\&\leqslant B_F\|T^*f\|^۲\leqslant B_F\|T^*\|^۲\|f\|^۲\end{aligned}$$

پس TF یک نگاشت بسل است. به‌طور مشابه، می‌توان نشان داد که TG نیز یک نگاشت بسل است. اکنون فرض می‌کنیم TG یک Q-شبه‌دوگان TF باشد؛ بنابراین عملگر $S_{TG,Q,TF}$ وارون‌پذیر است. از طرفی برای هر $\varphi \in L^2(\Omega, \mu)$ و $f \in \mathcal{H}$ داریم:

$$\begin{aligned}\langle T_{TF}\varphi, f\rangle &= \int_\Omega \varphi(\omega)\langle TF(\omega), f\rangle d\mu(\omega)\\ &= \int_\Omega \varphi(\omega)\langle F(\omega), T^*f\rangle d\mu(\omega)\\ &= \langle T_F\varphi, T^*f\rangle = \langle TT_F\varphi, f\rangle,\end{aligned}$$

پس $T_{TF} = TT_F$. به‌طور مشابه داریم $T_{TG} = TT_G$. لذا

$$S_{TG,Q,TF}(f) = T_{TG}QT^*_{TF}(f) = T(T_GQT^*_F)T^*(f)$$

چون $S_{TG,Q,TF}$ وارون‌پذیر است، پس T وارون‌پذیر راست است. $\square$

قضیه ۳.۲. فرض کنیم نگاشت بسل G یک Q- شبه‌دوگان برای نگاشت بسل F باشد و $T \in B(\mathcal{H})$. اگر T وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه TG یک Q- شبه‌دوگان برای TF است.

اثبات. در برهان قضیه ۲.۲، تساوی زیر حاصل شد:

$$S_{TG,Q,TF} = T(T_GQT^*_F)T^*.$$

اکنون فرض کنیم T وارون‌پذیر باشد، داریم:

$$((T^*)^{-1}S^{-1}_{G,Q,F}T^{-1})S_{TG,Q,TF} = (T^*)^{-1}S^{-1}_{G,Q,F}T^{-1}TT_GQT^*_FT^* = Id_{\mathcal{H}}.$$

به‌طور مشابه داریم

$$S_{TG,Q,TF}(T^*)^{-1}S^{-1}_{G,Q,F}T^{-1} = Id_{\mathcal{H}}.$$

پس $S_{TG,Q,TF}$ وارون‌پذیر است، لذا TG یک Q- شبه‌دوگان برای TF است. $\square$

نتیجه ۴.۲. فرض کنیم نگاشت بسل G یک Q- شبه‌دوگان برای نگاشت بسل F باشد و اگر T یک عملگر یکانی روی $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه TG یک Q- شبه‌دوگان برای TF است.

اثبات. با توجه به اینکه هر عملگر یکانی، وارون‌پذیر است، حکم از قضیه ۳.۲ به دست می‌آید. $\square$

اگر اندازهٔ شمارشی در نظر بگیریم، احکام فوق برای قاب‌های گسسته نیز به دست می‌آیند:

قضیه ۵.۲. فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ و $\{g_i\}_{i\in I}$ دو دنبالهٔ بسل باشند و $T \in B(\mathcal{H})$. در این صورت، $\{Tf_i\}_{i\in I}$ و $\{Tg_i\}_{i\in I}$ دنباله‌های بسل هستند. علاوه‌بر این، اگر $\{Tg_i\}_{i\in I}$ یک Q- شبه‌دوگان $\{Tf_i\}_{i\in I}$ باشد، آن‌گاه T وارون‌پذیر راست است.

قضیه ۶.۲. فرض کنیم دنبالهٔ بسل $\{g_i\}_{i\in I}$ یک Q- شبه‌دوگان برای $\{f_i\}_{i\in I}$ باشد و $T \in B(\mathcal{H})$. اگر T وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $\{Tg_i\}_{i\in I}$ یک Q- شبه‌دوگان برای $\{Tf_i\}_{i\in I}$ است.

نتیجه ۷.۲. فرض کنیم دنبالهٔ بسل $\{g_i\}_{i\in I}$ یک Q- شبه‌دوگان برای دنبالهٔ بسل $\{f_i\}_{i\in I}$ باشد. اگر T یک عملگر یکانی روی $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه $\{Tg_i\}_{i\in I}$ یک Q- شبه‌دوگان برای $\{Tf_i\}_{i\in I}$ است.

قضیه ۸.۲. فرض کنیم $F, G, M : \Omega \to \mathcal{H}$ سه نگاشت بسل باشند. در این صورت، $F - M : \Omega \to \mathcal{H}$ و $G - M : \Omega \to \mathcal{H}$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند، نگاشت‌های بسل هستند

$$F - M(x) = F(x) - M(x), \quad G - M(x) = G(x) - M(x).$$

علاوه‌بر این، اگر $\|S_{G,Q,M}\| < 1$ و G یک Q-دوگان F باشد، آن‌گاه G یک Q-دوگان تقریبی $F - M$ است. همچنین اگر $\|S_{M,Q,F}\| < 1$ و G یک Q-دوگان F باشد، آن‌گاه $G - M$ یک Q-دوگان تقریبی F است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $F - M$ یک نگاشت بسل است. فرض کنیم $f \in \mathcal{H}$ و $x \in \Omega$. داریم:

$$\langle f, F(x) - M(x)\rangle = \langle f, F(x)\rangle - \langle f, M(x)\rangle$$

چون نگاشت‌های $x \mapsto \langle f, F(x)\rangle$ و $x \mapsto \langle f, M(x)\rangle$ اندازه‌پذیر هستند، نگاشت $x \mapsto \langle f, F(x) - M(x)\rangle$ نیز اندازه‌پذیر است. همچنین

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\langle f, F(x) - M(x)\rangle|^۲ d\mu(x) &= \int_\Omega |\langle f, F(x)\rangle - \langle f, M(x)\rangle|^۲ d\mu(x) \\
&\leqslant \int_\Omega (|\langle f, F(x)\rangle| + |\langle f, M(x)\rangle|)^۲ d\mu(x) \\
&= \int_\Omega |\langle f, F(x)\rangle|^۲ d\mu(x) + \int_\Omega |\langle f, M(x)\rangle|^۲ d\mu(x) \\
&\quad + ۲\int_\Omega |\langle f, F(x)\rangle||\langle f, M(x)\rangle| d\mu(x) \\
&\leqslant \int_\Omega |\langle f, F(x)\rangle|^۲ d\mu(x) + \int_\Omega |\langle f, M(x)\rangle|^۲ d\mu(x) \\
&\quad + ۲\left(\int_\Omega |\langle f, F(x)\rangle|^۲ d\mu(x)\right)^{\frac{۱}{۲}} \left(\int_\Omega |\langle f, M(x)\rangle|^۲ d\mu(x)\right)^{\frac{۱}{۲}} \\
&\leqslant B_F\|f\|^۲ + B_M\|f\|^۲ + ۲\sqrt{B_F B_M}\|f\|^۲ \\
&= (\sqrt{B_F} + \sqrt{B_M})^۲\|f\|^۲,
\end{aligned}$$

پس $F - M$ یک نگاشت بسل است. به‌طور مشابه، ثابت می‌شود که $G - M$ نیز یک نگاشت بسل است. حال، فرض می‌کنیم G یک Q-دوگان F باشد و $\|S_{G,Q,M}\| < ۱$. به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ و $x \in \Omega$ داریم:

$$\begin{aligned}
(T^*_{F-M} f)(x) = \langle f, (F - M)(x)\rangle &= \langle f, F(x)\rangle - \langle f, M(x)\rangle \\
&= (T^*_F f)(x) - (T^*_M f)(x) \\
&= ((T^*_F - T^*_M) f) x
\end{aligned}$$

پس $T^*_{F-M} = T^*_F - T^*_M$. لذا

$$\begin{aligned}
S_{G,Q,F-M} = T_G Q T^*_{F-M} &= T_G Q (T^*_F - T^*_M) \\
&= T_G Q T^*_F - T_G Q T^*_M \\
&= Id_{\mathcal{H}} - S_{G,Q,M}
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\|Id_{\mathcal{H}} - S_{G,Q,F-M}\| = \|S_{G,Q,M}\| < ۱$$

و این یعنی G یک Q-دوگان تقریبی $F - M$ است. اینک فرض کنیم G یک Q-دوگان F باشد و $\|S_{M,Q,F}\| < ۱$. برای هر $\varphi \in L^۲(\Omega, \mu)$ و $f \in \mathcal{H}$ داریم:

$$\begin{aligned}
\langle T_{G-M}\varphi, f\rangle &= \int_\Omega \varphi(x)\langle (G - M)(x), f\rangle d\mu(x) \\
&= \int_\Omega \varphi(x)\langle G(x), f\rangle d\mu(x) - \int_\Omega \varphi(x)\langle M(x), f\rangle d\mu(x) \\
&= \langle T_G\varphi, f\rangle - \langle T_M\varphi, f\rangle \\
&= \langle (T_G - T_M)\varphi, f\rangle
\end{aligned}$$

پس $T_{G-M} = T_G - T_M$. بنابراین

$$\begin{aligned} S_{G-M,Q,F} = T_{G-M}QT_F^* &= (T_G - T_M)QT_F^* \\ &= T_G QT_F^* - T_M QT_F^* \\ &= Id_{\mathcal{H}} - S_{M,Q,F}. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\|Id_{\mathcal{H}} - S_{G-M,Q,F}\| = \|S_{M,Q,F}\| < ۱$$

و این نامساوی، بدین معنی است که $G-M$ یک Q-دوگان تقریبی F است. □

نتیجه ۹.۲. فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$، $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in I}$ و $\mathcal{Z} = \{h_i\}_{i\in I}$ سه دنبالهٔ بسل در یک فضای هیلبرت باشند. در این صورت، $\mathcal{F} - \mathcal{Z} := \{f_i - h_i\}_{i\in I}$ و $\mathcal{G} - \mathcal{Z} := \{g_i - h_i\}_{i\in I}$ دنباله‌های بسل هستند. علاوه‌بر این، اگر $\|S_{\mathcal{G},Q,\mathcal{Z}}\| < ۱$ و $\mathcal{G}$ یک Q-دوگان $\mathcal{F}$ باشد، آن‌گاه $\mathcal{G}$ یک Q-دوگان تقریبی $\mathcal{F} - \mathcal{Z}$ است. همچنین اگر $\|S_{\mathcal{Z},Q,\mathcal{F}}\| < ۱$ و $\mathcal{G}$ یک Q-دوگان $\mathcal{F}$ باشد، آن‌گاه $\mathcal{G} - \mathcal{Z}$ یک Q-دوگان تقریبی $\mathcal{F}$ است.

References

[1] Ali, S.T., Antoine, J.P., & Gazeau, J.P. (1993). Continuous frames in Hilbert spaces. *Ann. Physics*, 222, 1–37. DOI: https://doi.org/10.1006/aphy.1993.1016.

[2] Christensen, O., & Laugesen, R.S. (2011). Approximate dual frames in Hilbert spaces and applications to Gabor frames. *Sampl Theory Signal Image Process*, 9, 77–90. DOI: https://doi.org/10.1007/BF03549525.

[3] Daubechies, I., Grossmann, A., & Meyer, Y. (1986). Painless nonorthogonal expansions. *J. Math. Phys*, 27, 1271–1283. DOI: https://doi.org/10.1063/1.527388.

[4] Duffin, R.J., & Schaeffer, A.C. (1952). A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc*, 72, 341–366. DOI: https://doi.org/10.2307/1990760.

[5] Gabardo, J.P., & Han, D. (2003). Frame associated with measurable spaces. *Adv. Comp. Math*, 18, 127–147. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1021312429186.

[6] Kaiser, G. (1994). A Friendly Guide to Wavelets. *Birkhauser, Boston*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8111-1.

[7] Khosravi, A., & Mirzaee Azandaryani, M. (2014). Approximate duality of g-frames in Hilbert spaces. *Acta. Math. Sci*, 34, 639–652. DOI: https://doi.org/10.1016/S0252-9602(14)60036-9.

[8] Mirzaee Azandaryani, M. (2017). On the approximate duality of g-frames and fusion frames. *U. P. B. Sci. Bull. Ser A*, 79, 83–94.

[9] Mirzaee Azandaryani, M. (2020). An operator theory approach to the approximate duality of Hilbert space frames. *J. Math. Anal. Appl*, 489, 1–13 (124177). DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124177.

[10] Mirzaee Azandaryani, M., & Javadi, Z. (2022). Pseudo-duals of continuous frames in Hilbert spaces. *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl*, 13, 1–16. DOI: https://doi.org/10.1007/s11868-022-00486-3.

[11] Rahimi, A., Darvishi, Z., & Daraby, B. (2019). Dual pair and approximate dual for continuous frames in Hilbert spaces. *Math. Rep*, 21, 173–191.

[12] Yousefzadeheyni, A., & Abdollahpour, M.R. (2020). Some properties of approximately dual continuous g-frames in Hilbert spaces. *U. P. B. Sci. Bull. Ser A*, 82, 183–194.

Measure Algebras and Applications

Some notes about Orlicz spaces related to a Banach function space

Alireza Bagheri Salec[1]

1. Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran. Email: r-bagheri@qom.ac.ir

Article Info	**ABSTRACT**

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 10 May 2023
Received in revised form:
1 August 2023
Accepted: 2 August 2023
Published Online:
30 September 2023

Keywords:
Orlicz spaces,
Function spaces,
Lebesgue spaces,
The space of almost
everywhere bounded function

2020 Mathematics Subject Classification:
46E30, 47L10

In this paper, some results on Orlicz spaces associated with a functional Banach space are obtained.

Cite this article: Bagheri Salec, A. (2023). Some notes about Orlicz spaces related to a Banach function space. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 74–82. http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9422.1001

Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/MAA.2023.9422.1001

Extended Abstract

Orlicz spaces, as a very important generalization of Lebesgue spaces, were proposed more than 100 years ago and were first introduced by Z. W. Birnbaum and W. Orlicz. After that, another generalization of Lebesgue spaces with symbols X^p instead of L^p was introduced in which X is a Banach function space. In this article, another generalization of Lebesgue spaces is investigated, which includes both previous generalizations. Although this generalization and preliminary studies of it were published in a scientific report in 1988, effective research on this generalization was done 15 years ago. Due to the fact that in this generalization a convex and Young function Φ is placed instead of function $|\cdot|^p$ and a Banach function space X is placed instead of space L^1, in this article, taking into account the conditions of the function Φ we will check properties of generalized Orlicz space X^Φ. More precisely, if we put

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_0 &= \{f : \Omega \to [-\infty, +\infty] : \text{f is } \mu - \text{measurable}\},\\
X^\Phi &= \{f \in \mathcal{M}_0 : \exists \alpha > 0, \Phi(\frac{|f|}{\alpha}) \in X\},\\
\mathcal{E}^\Phi &= \{f \in X^\Phi : \forall \alpha > 0, \Phi(\frac{|f|}{\alpha}) \in X\},\\
\mathcal{S}^\Phi &= \{f \in X^\Phi : f \text{ is a step function}\},\\
\mathcal{M}^\Phi &= \bar{\mathcal{S}^\Phi}^{\|\cdot\|_\Phi},
\end{aligned}$$

considering the conditions on the function Φ, we examine the relationship between the above spaces. Generalized Orlich spaces X^Φ associated with a functional Banach space like X, considering properties such as solidity of X, have important and well-known properties in Orlicz spaces and Lebesgue spaces. By using these properties, many results can be obtained in these spaces. Considering that an Orlicz space is generalized by X^Φ and by replacing the space L^1 with Banach function space X, we can reach new Banach spaces by placing different spaces in place X. Studying these spaces and examining their properties, such as conditions of being algebra, the existence of a bounded approximate identity element, spaceability, and many other cases can be done in the continuation of this research.

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۸۲-۷۴

نکاتی در مورد فضاهای اورلیش مرتبط با یک فضای باناخ تابعی

علیرضا باقری ثالث [۱]

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: r-bagheri@qom.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۲/۲۰
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۵/۱۰
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۵/۱۱
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
فضاهای اورلیش،
فضاهای تابعی،
فضاهای لبگ،
فضای توابع تقریباً همه‌جا کران‌دار

رده‌بندی ریاضی:
46E30, 47L10

چکیده

فضاهای اورلیش به‌عنوان تعمیم بسیار بااهمیتی از فضاهای لبگ، بیش از ۱۰۰ سال پیش مطرح و اولین بار توسط بیربام و اورلیش معرفی شدند. در سال‌های بعد تعمیم دیگری از فضاهای لبگ با نماد X^p به‌جای L^p معرفی شد که در آن X یک فضای باناخ تابعی است. در این مقاله، تعمیم دیگری از فضاهای لبگ مورد بررسی قرار می‌گیرد که هر دو تعمیم قبلی را در بر می‌گیرد. هرچند این تعمیم و مطالعات مقدماتی از آن، در یک گزارش علمی در سال ۱۹۸۸ منتشر شده است، اما تحقیقات مؤثر روی این تعمیم در ۱۵ سال قبل انجام شده است. با توجه به اینکه در این تعمیم، یک تابع محدب و یانگ Φ به‌جای تابع $|\cdot|^p$ و یک فضای باناخ تابعی X به‌جای فضای L^1 قرار می‌گیرد، در این مقاله با در نظر گرفتن شرایط تابع Φ خواص فضای اورلیش تعمیم‌یافتهٔ X^Φ را بررسی می‌کنیم.

استناد: باقری ثالث، علیرضا. (۱۴۰۲). نکاتی در مورد فضاهای اورلیش مرتبط با یک فضای باناخ تابعی. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۸۲-۷۴.

http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9422.1001

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمات و تعاریف

در تمام این مقاله $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ را یک فضای اندازه در نظر می‌گیریم که در آن μ یک اندازهٔ نامنفی است. همچنین قرار می‌دهیم،

$$\mathcal{M}_\circ(\Omega) = \{f : \Omega \to [-\infty, +\infty] : \text{اندازه‌پذیر است } \mu - \text{، } f\}.$$

توابع $\mu-$ تقریباً همه‌جا برابر در $\mathcal{M}_\circ(\Omega)$ را همواره یکی در نظر می‌گیریم. برای هر $p \in [۱, \infty)$ فضای لبگ $L^p(\Omega)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L^p = L^p(\Omega) = \{f \in \mathcal{M}_\circ(\Omega) : \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{۱}{p}} < \infty\}.$$

در این صورت می‌دانیم فضای لبگ $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ یک فضای باناخ است. نظر به اهمیت فضاهای لبگ، تعمیم‌های مفیدی از آن مرتبط با فضاهای تابعی نیز ارائه شده‌اند.

فرض کنید $\|\cdot\|_X : \mathcal{M}_\circ(\Omega) \to [\circ, \infty]$ تابعی باشد که در خواص نرم به‌جز متناهی بودن صدق کند، و

$$X = \{f \in \mathcal{M}_\circ(\Omega) : \|f\|_X < \infty\}.$$

بنابراین X یک فضای خطی حقیقی نرمدار است که در خواص زیر صدق می‌کند:

۱- $\|f\|_X$ برای هر $f \in \mathcal{M}_\circ(\Omega)$ تعریف شده است و $\|f\|_X < \infty$ اگر و تنها اگر $f \in X$.

۲- $\|f\|_X = \circ$ اگر و تنها اگر $f = \circ, a.e.$.

اگر X در شرایط زیر نیز صدق کند، آنگاه یک فضای باناخ تابعی نامیده می‌شود،

۳- $\circ \leq f \leq g \ a.e. \Rightarrow \|f\|_X \leq \|g\|_X$،

۴- $f_n \uparrow f \ a.e. \Rightarrow \|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$،

۵- $\mu(E) < \infty \Rightarrow \chi_E \in X$.

یادآوری می‌کنیم که برای هر $E \in \mathcal{A}$، χ_E تابع مشخصهٔ E است و هر ترکیب خطی از توابع مشخصه با اندازهٔ متناهی را یک تابع پله‌ای می‌نامیم.

با توجه به اینکه $f \in L^p(\Omega)$ اگر و تنها اگر $|f|^p \in L^۱(\Omega)$، یک تعمیم از فضاهای لبگ که آن را با $X^p(\Omega)$ نمایش می‌دهند به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X^p = X^p(\Omega) = \{f \in \mathcal{M}_\circ(\Omega) : |f|^p \in X\}.$$

همچنین اگر Φ تابعی یانگ باشد، یعنی $\Phi : \mathbb{R} \to [\circ, +\infty]$ تابعی محدب و زوج باشد که $\Phi(\circ) = \circ$ و $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = +\infty$، آنگاه فضای اورلیش $L^\Phi(\Omega)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$L^\Phi(\Omega) = \left\{f \in \mathcal{M}_\circ(\Omega) : \exists\alpha > \circ, \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) d\mu < \infty\right\}.$$

توجه نمایید توابع محدب صعودی هستند و اگر یک تابع محدب روی بازهٔ (a, b) حقیقی مقدار باشد، آنگاه روی این فاصله پیوسته است. برای خواص فضاهای اورلیش [۴] را ملاحظه فرمایید. حال با در نظر گرفتن فضای باناخ تابعی X و تابع یانگ Φ قرار می‌دهیم،

$$X^\Phi = X^\Phi(\Omega) = \left\{f \in \mathcal{M}_\circ(\Omega) : \exists\alpha > \circ, \Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) \in X\right\}.$$

این مجموعه یک فضای برداری است و با نرم لکزومبورگ زیر یک فضای باناخ تابعی است ([۳] قضیه ۲.۵)،

$$\|f\|_\Phi = \|f\|_{X,\Phi} = \inf\left\{\alpha > \circ : \left\|\Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right)\right\|_X \leq ۱\right\}.$$

این فضا را فضای اورلیش تعمیم‌یافته مرتبط با فضای باناخ تابعی X می‌نامیم. با توجه به اینکه شرط $\int_\Omega \Phi(\frac{|f|}{\alpha}) d\mu < \infty$ در تعریف فضاهای اورلیش به این معنا است که $\Phi(\frac{|f|}{\alpha}) \in L^۱(\Omega)$، فضاهای اورلیش مرتبط با فضای باناخ تابعی X تعمیم فضاهای اورلیش هستند، و در واقع داریم $L^\Phi(\Omega) = (L^۱(\Omega))^\Phi$. همچنین اگر قرار دهیم $\Phi_{(p)}(x) = |x|^p$ داریم، $X^p = X^{\Phi_{(p)}}$. بنابراین تعمیم ارائه‌شده بسیار گسترده‌تر از تعمیم‌های قبلی است.

در ادامه، همواره X یک فضای باناخ تابعی و Φ یک تابع یانگ است و

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{\Phi} &= \left\{ f \in X^{\Phi} : \forall \alpha > ۰, \Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) \in X \right\},\\ \mathcal{S}^{\Phi} &= \{ f \in X^{\Phi} : \text{تابعی پله‌ای باشد } f \},\\ \mathcal{M}^{\Phi} &= \overline{\mathcal{S}^{\Phi}}^{\|\cdot\|_{\Phi}}.\end{aligned}$$

توجه نمایید که خواص (۱) و(۳) در تعریف فضاهای باناخ تابعی خاصیت زیر را برای فضای X به ارمغان می‌آورد،

$$[f \in \mathcal{M}_{۰}(\Omega), f \in X, |f| \leq |g|] \Rightarrow [g \in X, \|f\|_X \leq \|g\|_X].$$

این خاصیت را خاصیت جامد بودن X می‌نامیم.

ملاحظه می‌کنیم که $\mathcal{E}^{\Phi}$ نیز یک فضای برداری است زیرا برای هر $f, g \in \mathcal{E}^{\Phi}$ و هر $\beta \in \mathbb{R}$، برای هر $\alpha > ۰$ اگر t را عددی دلخواه در فاصله $(۰, ۱)$ در نظر بگیریم، چون X فضای برداری و Φ محدب است داریم،

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{|\beta f + g|}{\alpha}\right) &\leq \Phi\left(\frac{t|\beta||f|}{t\alpha} + \frac{(۱-t)|g|}{(۱-t)\alpha}\right)\\ &\leq t\Phi\left(\frac{|\beta||f|}{t\alpha}) + (۱-t)\Phi(\frac{|g|}{(۱-t)\alpha}\right)\\ &\in X.\end{aligned}$$

دو مرجع [۲] و [۳] در سال‌های اخیر مراجع مناسبی در مورد فضاهای اورلیش تعمیم‌یافته هستند. تحقیقات متنوعی در سال‌های اخیر در این زمینه انجام شده است. برای نمونه مراجع [۱] و [۵] را ببینید.

۲ نتایج اصلی

در این بخش با استفاده از تعاریف و نمادهای بخش قبل، نتایجی در مورد فضاهای اورلیش مرتبط با یک فضای باناخ تابعی بیان می‌کنیم. در ابتدا تعریف زیر را ارائه می‌نماییم. در این مقاله بیشتر تمرکز روی تابع یانگ Φ است و تأثیر خواص این تابع روی فضای اورلیش ساخته‌شده از آن بررسی می‌شود.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم X یک فضای باناخ تابعی باشد که برای هر دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در X که برای μ-تقریباً هر $x \in \Omega$ داشته باشیم، $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = ۰$، و تابع $f \in X$ موجود باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $|f_n| \leq |f|$ $\mu-$ تقریباً همه‌جا، آنگاه $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_X = ۰$. در این صورت می‌گوییم X در خاصیت DCT صدق می‌کند.

قضیه ۲.۲. با نمادهای بخش قبل داریم:

۱-اگر $X \subseteq L^{\infty}$، آنگاه $X \subseteq \mathcal{E}^{\Phi}$.

۲- $\mathcal{M}^{\Phi} \subseteq \mathcal{E}^{\Phi}$.

۳- اگر X دارای خاصیت DCT باشد، آنگاه $\mathcal{E}^{\Phi} \subseteq \mathcal{M}^{\Phi}$.

اثبات. (۱) فرض کنید $X \subseteq L^{\infty}$ و $f \in X$. در این صورت اگر برای هر $\alpha > ۰$ قرار دهیم $A_\alpha = \{x \in \Omega : \frac{|f(x)|}{\alpha} \leq ۱\}$، آنگاه

$$\Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right)\chi_{A_\alpha} \leq \Phi(۱)\frac{|f|}{\alpha} \in X.$$

بنابراین با توجه به جامد بودن X داریم

$$\Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right)\chi_{A_\alpha} \in X. \qquad (۱.۲)$$

ازطرفی به‌وضوح داریم $\chi_{(X-A_\alpha)} \leq \frac{|f|}{\alpha}$. بنابراین طبق جامد بودن X داریم، $\chi_{(X-A_\alpha)} \in X$. همچنین چون $f \in L^\infty$ عدد $M > ۰$ موجود است که $|f| \leq M$، $\mu-$ تقریباً همه‌جا. بنابراین چون X یک فضای خطی است،

$$\Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right)\chi_{(X-A_\alpha)} \leq \Phi\left(\frac{M}{\alpha}\right)\chi_{(X-A_\alpha)} \in X.$$

بنابراین با توجه به جامد بودن X داریم،

$$\Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right)\chi_{(X-A_\alpha)} \in X. \tag{۲.۲}$$

بنابراین از (۲.۲) و (۴.۲) داریم $\Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) \in X$. چون α دلخواه انتخاب شده بود، داریم $f \in \mathcal{E}^\Phi$.

(۲) فرض کنیم $f \in \mathcal{M}^\Phi$. در این صورت داریم،

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists f_k \in \mathcal{S}^\Phi : \|f - f_k\|_\Phi < \frac{۱}{۲k}.$$

با توجه به (۱) داریم $۲kf_k \in \mathcal{E}^\Phi$ و در نتیجه $\Phi(۲kf_k) \in X$. از طرفی با توجه به اینکه $\|۲k(f-f_k)\|_\Phi < ۱$، طبق تعریف نرم لکزومبورگ داریم،

$$\exists ۰ < \alpha \leq ۱,\ \Phi\left(\frac{۲k(f-f_k)}{\alpha}\right) \in X.$$

در نتیجه طبق جامد بودن X داریم $\Phi(۲k(f-f_k)) \in X$. از اینجا با توجه به اینکه Φ محدب است،

$$\begin{aligned}\Phi(kf) &= \Phi\left(\frac{۱}{۲}۲k(f-f_k) + \frac{۱}{۲}۲kf_k\right)\\ &\leq \frac{۱}{۲}\Phi(۲k(f-f_k)) + \frac{۱}{۲}\Phi(۲kf_k)\\ &\in X.\end{aligned}$$

حال برای هر $\alpha > ۰$ اگر عدد طبیعی k را طوری در نظر بگیریم که $k > \frac{۱}{\alpha}$، آنگاه با توجه به صعودی بودن تابع محدب Φ رابطهٔ زیر برقرار است،

$$\Phi\left(\frac{f}{\alpha}\right) \leq \Phi(kf) \in X$$

بنابراین با استفادهٔ مجدد از جامد بودن X داریم $f \in \mathcal{E}^\Phi$.

(۳) فرض کنید X دارای خاصیت DCT باشد و $f \in \mathcal{E}^\Phi$. در این صورت برای هر $\alpha > ۰$ داریم $\Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) \in X$. چون $f \in \mathcal{M}^\Phi_۰$، دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=۱}^\infty$ از توابع پله‌ای چنان موجود است که $|s_۱| \leq |s_۲| \leq \ldots \leq |f|$، در نتیجه با توجه به جامد بودن X داریم، $\{s_n\}_{n=۱}^\infty \subseteq X^\Phi$ و در نتیجه $\{s_n\}_{n=۱}^\infty \subseteq \mathcal{S}^\Phi$. حال توجه می‌کنیم که

$$۰ \leq \Phi\left(\frac{|s_n - f|}{\alpha}\right) \leq \Phi\left(\frac{|۲f|}{\alpha}\right) \in X,$$

و

$$\lim_{n\to\infty} \Phi\left(\frac{|s_n - f|}{\alpha}\right) = ۰.\ \text{،}\ \mu - \text{تقریباً همه‌جا}$$

از اینجا با توجه به اینکه X در خاصیت DCT صدق می‌کند، داریم

$$\forall \alpha > ۰,\ \lim_{n\to\infty} \left\|\Phi\left(\frac{|s_n - f|}{\alpha}\right)\right\|_X = ۰.$$

بنابراین دنبالهٔ $N_۱ \leq N_۲ \leq \ldots$ در اعداد طبیعی چنان موجود است که

$$\forall n \geq N_k,\ \left\|\Phi\left(\frac{|s_n - f|}{\frac{۱}{k}}\right)\right\|_X \leq ۱.$$

بنابراین زیردنبالهٔ $\{s_{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ از $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای این خاصیت است که،

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \|s_{N_k} - f\|_\Phi \leq \frac{1}{k}.$$

این نشان می‌دهد $s_{N_k} \xrightarrow{\|\cdot\|_\Phi} f$ و در نتیجه داریم $f \in \mathcal{M}^\Phi(\Omega)$. □

با توجه به تعاریف ارائه‌شده در بخش قبل ملاحظه می‌کنیم که عناصر فضای باناخ تابعی X می‌توانند مقادیر $\pm\infty$ را نیز داشته باشند. همچنین مقادیر تابع یانگ Φ نیز می‌توانند $+\infty$ شوند. در ادامه، فرض می‌کنیم توابع عضو X. $\mu-$ تقریباً همه‌جا حقیقی مقدار باشند، یعنی

$$f \in X \Rightarrow \mu(\{x \in X : f(x) = \pm\infty\}) = 0.$$

لم ۳.۲. فرض کنید $\Phi(x) = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.
(۱) اگر $E_1, E_2, ..., E_n \in \mathcal{A}$، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} \in X^\Phi \Rightarrow \chi_{E_1}, \chi_{E_2}, ..., \chi_{E_n} \in X.$$

(۲) $\mathcal{S}^\Phi \subseteq \mathcal{E}^\Phi$.

اثبات. (۱) فرض کنیم $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$. بدون از دست رفتن کلیت قضیه، می‌توانیم فرض کنیم مجموعه‌های $E_n, ..., E_2, E_1$ دوبه‌دو جدا از هم هستند. زیرا برای نمونه $\chi_{E_1 \cup E_2} = \chi_{(E_1 - E_2) \cup (E_1 \cap E_2) \cup (E_2 - E_1)}$. اگر $f \in X^\Phi$، آنگاه

$$\exists \alpha > 0, \Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) = \Phi\left(\frac{|\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}|}{\alpha}\right) \in X.$$

بنابراین،

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi\left(\frac{|a_i|}{\alpha}\right) \chi_{E_i} \in X.$$

در نتیجه با توجه به جامد بودن X برای هر $i = 1, 2, ..., n$ داریم، $\Phi\left(\frac{|a_i|}{\alpha}\right) \chi_{E_i} \in X$. از اینجا و با استفادهٔ مجدد از جامد بودن و نیز شرط $\Phi(x) = 0 \iff x = 0$ داریم، $\chi_{E_1}, \chi_{E_2}, ..., \chi_{E_n} \in X$.
(۲) با توجه به (۱) واضح است. □

گزاره ۴.۲. (۱) $\exists x_1 : \Phi(x_1) = +\infty \Rightarrow X^\Phi \subseteq L^\infty$.
(۲) $\exists x_0, \forall 0 \leq x < x_0, \Phi(x) = 0 \Rightarrow L^\infty \subseteq X^\Phi$.
(۳) $\exists x_0, x_1 : \Phi([0, x_0]) = \{0\} \wedge \Phi(x_1) = +\infty \Rightarrow X^\Phi = L^\infty$.

اثبات. (۱) با توجه به اینکه عناصر X تقریباً همه‌جا حقیقی در نظر گرفته شده‌اند،

$$\begin{aligned} f \in X^\Phi &\Longrightarrow \exists \alpha > 0, \Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) \in X \\ &\Longrightarrow \mu(\{x \in \Omega : \Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) = +\infty\}) = 0 \\ &\Longrightarrow \mu(\{x \in \Omega : \Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) \geq x_0\}) = 0) \\ &\Longrightarrow |f| \leq \alpha \Phi^{-1}(x_0), \mu - a.e. \\ &\Longrightarrow f \in L^\infty. \end{aligned}$$

(۲) فرض کنیم Φ روی بازهٔ $[\circ, x_1)$ برابر صفر باشد. در این صورت داریم،

$$\begin{aligned} f \in L^\infty &\Longrightarrow \exists k > \circ, |f| < k, \mu - a.e. \\ &\Longrightarrow \exists \alpha (= \frac{k}{x_1}) > \circ, \frac{|f|}{\alpha} < x_1 \\ &\Longrightarrow \exists \alpha > \circ, \Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) (= \circ) \in X \\ &\Longrightarrow f \in X^\Phi. \end{aligned}$$

(۳) از (۱) و (۲) به‌راحتی به دست می‌آید. $\square$

قضیه ۵.۲. فرض کنیم $\mu(\Omega) < \infty$ ، $x_\circ \in (\circ, \infty)$ و Φ تابعی پیوسته و محدب روی $(\circ, x_1)$ باشد. اگر

$$\Phi(x) := \begin{cases} \circ, & x = \circ \\ \Phi_1(x), & \circ < x < x_\circ \\ +\infty, & x \geq x_\circ \end{cases},$$

آنگاه،

(۱) $X^\Phi = L^\infty$.

(۲) $\mathcal{M}^\Phi = L^\infty$.

اثبات. (۱) با توجه به قسمت (۱) گزاره ۴.۲ داریم، $X^\Phi \subseteq L^\infty$. ازطرفی اگر $f \in L^\infty$، آنگاه

$$\forall \circ < \epsilon < x_\circ, \exists k > \circ, \frac{|f|}{k} < x_\circ - \epsilon, \ \mu - a.e.$$

بنابراین

$$\frac{|f|}{k} < (x_\circ - \epsilon)\chi_\Omega, \ \mu - a.e. \tag{۳.۲}$$

بنابراین اگر $\circ < \epsilon < x_\circ$ را طوری انتخاب کنیم که، $x_\circ - \epsilon < ۱$، آنگاه با توجه به نامساوی (۳.۲) به‌ازای یک $k_\circ > \circ$ داریم، $\frac{|f|}{k_\circ} < \chi_\Omega$، $\mu-$ تقریباً همه‌جا. بنابراین،

$$\Phi\left(\frac{|f|}{k_\circ}\right) \leq \Phi(\chi_\Omega). \tag{۴.۲}$$

حال با فرض $X \ni \chi_\Omega = ۱$ ملاحظه می‌کنیم که برای هر $\alpha > \circ$ داریم، $\alpha \in X$. با توجه به این موضوع، جامد بودن X و رابطه (۴.۲) داریم، $\Phi\left(\frac{|f|}{k_\circ}\right) \in X$. بنابراین $f \in X^\Phi$ و در نتیجه $L^\infty \subseteq X^\Phi$ و حکم (۱) ثابت شده است.

(۲) با توجه به اینکه طبق فرض قضیه $X \ni \chi_\Omega = ۱$ و نیز رابطهٔ $\Phi(\circ) = \circ$ ایجاب می‌کند که $\Phi^{-1}\left(\frac{۱}{\|۱\|_X}\right) \neq \circ$، برای هر $\circ \neq f \in L^\infty$ داریم،

$$\begin{aligned} |f| \leq \|f\|_\infty, \ \mu - a.e. &\Longrightarrow \frac{|f|}{\|f\|_\infty} \leq ۱, \ \mu - a.e. \\ &\Longrightarrow \frac{|f|}{\|f\|_\infty / \Phi^{-1}\left(\frac{۱}{\|۱\|_X}\right)} \leq \Phi^{-1}\left(\frac{۱}{\|۱\|_X}\right), \ \mu - a.e. \\ &\Longrightarrow \Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_\infty / \Phi^{-1}\left(\frac{۱}{\|۱\|_X}\right)}\right) \leq \Phi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{۱}{\|۱\|_X}\right)\right) \leq \frac{۱}{\|۱\|_X}. \end{aligned}$$

اِین رابطه با توجه به جامد بودن X نشان می‌دهد که اگر قرار دهیم، $\alpha = \frac{\|f\|_\infty}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\|1\|_X}\right)}$، آنگاه $\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right)\right\|_X \leq 1$ و در نتیجه با توجه به تعریف نرم لگزومبورگ داریم،

$$\|f\|_\Phi \leq \frac{1}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\|1\|_X}\right)} \cdot \|f\|_\infty. \tag{۵.۲}$$

از رابطه (۵.۲) و قضیهٔ گراف بسته نتیجه می‌شود که دو نرم $\|\cdot\|_\infty$ و $\|\cdot\|_\Phi$ روی فضای $X^\Phi(=L^\infty)$ معادل هستند. از طرفی شرط $\chi_\Omega \in X$ باعث می‌شود که $\mathcal{S}^\Phi$ برابر کل فضای توابع پله‌ای در فضای $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ باشد. حال، چون مجموعهٔ توابع پله‌ای در فضای $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ چگال هستند، داریم

$$\mathcal{M}^\Phi = \overline{\mathcal{S}^\Phi}^{\|\cdot\|_{Phi}} = \overline{\mathcal{S}^\Phi}^{\|\cdot\|_\infty} = L^\infty.$$

□

۳ نتیجه‌گیری

فضاهای اورلیش تعمیم‌یافتهٔ X^Φ مرتبط با فضای باناخ تابعی X، با در نظر گرفتن مفروضاتی مانند جامد بودن رویِ X خواصِی بااهمیت و شناخته‌شده در فضاهای اورلیش و فضاهای لبگ را خواهند داشت. با استفاده از این خواص، نتایج بسیاری را می‌توان در این فضاها به دست آورد. مطالعه روی این فضاها و بررسی خواص آنها مانند شرایط جبر بودن، وجود عنصر همانی تقریبی کران‌دار، فضاپذیر بودن و موارد بسیار دیگر در ادامهٔ این تحقیقات قابل انجام هستند ([۱] و [۵] را ببینید). با توجه به اینکه فضای اورلیش تعمیم‌یافتهٔ X^Φ با جایگزین نمودن فضای L^1 با فضای باناخ تابعی X به دست می‌آید، با قرار دادن فضاهای مختلف به‌جای X می‌توان به فضاهای باناخ جدیدی دست یافت.

References

[1] Bagheri Salec, A., Ivković, S., & Tabatabaie, S.M. (2022). Spaceability on some classes of Banach spaces. *Mathematical Inequalities and Applications*, 25(3), 659–672. DOI: https://doi.org/10.7153/mia-2022-25-41.

[2] Campo, R.del., Fernández, A., Mayoral, F., & Naranjo, F. (2020). Orlicz spaces associated to a quasi-Banach function space. Applications to vector measures and interpolation. *Collect. Math*. DOI: https://doi.org/10.1007/s13348-020-00295-1.

[3] Jain, P., Persson, L.E., & Upreti, P. (2007). Inequalities and properties of some generalized Orlicz classes and spaces. *Acta Math. Hungar*, 117, 161–174. DOI: https://doi.org/10.1007/s10474-007-6083-9.

[4] Rao, M.M., & Ren, Z.D. (1991). Theory of Orlicz Spaces. *Marcel Dekker, New York*.

[5] Tabatabaie, S.M., & Bagheri Salec, A.R. (2023). On The Inclusions Of X^Φ Spaces. *Mathematica Bohemica*, 148, 65–72. DOI: https://doi.org/https://doi.org/10.21136/MB.2022.0064-21.

Measure Algebras and Applications

On Rado's theorem and its related problems

Mahmoud Mohammadzadeh Jafarabadi[1] , **Mohammad Akbari Tootkaboni**[2]✉

1. Department of Mathematics, University of Guilan, Rasht, Guilan, Iran.
   Email: mohammadzadeh.j.m@gmail.com
2. Corresponding Author, Department of Mathematics, University of Guilan, Rasht, Guilan, Iran.
   Email: tootkaboni@guilan.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 15 May 2023
Received in revised form:
10 August 2023
Accepted: 13 August 2023
Published Online:
30 September 2023

Keywords:
Rado's theorem,
Partition regular,
Ramsey theory,
Stone-Čech compactification,
Upper density

2020 Mathematics Subject Classification:
20F05, 05C05

ABSTRACT

In this paper, we state Rado's theorem, Ramsey families, and their connections with ergodic theory and combinatorial problems. We discuss the historical development of these concepts since their inception to how some problems in the fields of combinatorics and number theory were formulated and solved, particularly through the lens of dynamical systems. We also address some open questions in this field.

Cite this article: Mohammadzadeh Jafarabadi, M., & Akbari Tootkaboni, M. (2023). On Rado's theorem and its related problems. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 83–96. http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9445.1002

Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/MAA.2023.9445.1002

Extended Abstract

Introduction

In Ramsey theory, Schur's theorem holds significant importance [19]. The simplicity of the problem, as well as its connection with various areas of mathematics, increases its significance. This theorem states that in any finite partition of natural numbers, there exist $a, b \in \mathbb{N}$ such that one of the cells contains $\{a, b, a + b\}$, in the other words, this structure is monochromatic.

In [22], Van der Waerden proved that in any finite partition of natural numbers, one of the cells contains arbitrarily long arithmetic progressions. In the other words, for any $k \in \mathbb{N}$, there exist $a, b \in \mathbb{N}$ such that the structure $\{a, a + b, a + 2b, \ldots, a + kb\}$ is monochromatic. This proof provided an answer to a long-standing open question.

The theorems of Schur and Van der Waerden encouraged researchers to study monochromatic linear patterns. In 1943, Rado classified all linear structures in the set of natural numbers, leading to significant results in this field, which we will elaborate on in the following sections. Erdös and Turán, after the proof of Van der Waerden's theorem, posed the question of whether every subset of natural numbers with a positive upper density contains an arbitrarily long arithmetic progression? This question was answered by Szemerédi in 1974, but in 1977, Furstenberg provided another solution to this problem using dynamical systems, leading to the creation of a theory known as Ergodic-Ramsey theory, [10]; [11].

The general idea behind Erdös and Turán's solution to the open problem is as follows: a subset E of natural numbers contains an arithmetic progression of length k, i.e., $\{a, a + d, \ldots, a + kd\} \subset E$, for some a, b in natural numbers if and only if $a \in E \cap (E - d) \cap \ldots \cap (E - kd)$. Furthermore, it shows that if E has positive upper density, then

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \bar{d}(E \cap (E - n) \cap \cdots \cap (E - kn)) > 0. \tag{0.1}$$

Thus, E contains an arithmetic sequence of length $k + 1$.

To establish the relation (0.1), Furstenberg introduced the notion of a correspondence between a measure-preserving dynamical system and a set with upper density. To delve further into this process, we need to familiarize ourselves with certain concepts.

Assume that $(X, \mathcal{B}, \mu)$ is a probability space, where $\mathcal{B}$ is a σ-algebra on the set X and $\mu : \mathcal{B} \to [0, 1]$ is a countably additive probability measure. A measurable map $T : X \to X$ is measure preserving if for every $B \in \mathcal{B}$, we have $\mu(T^{-1}B) = \mu(B)$, where $T^{-1}B := \{x \in X \ : \ Tx \in B\}$. A quadruple $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, where $(X, \mathcal{B}, \mu)$ is a measure space and T is a measure-preserving map, is called a measure-preserving system. A system $(X, \mathcal{B}, \mu, \{T_g\}_{g \in G})$, where G is a commutative semigroup, $T_g : X \to X$ is a function, and $(X, \mathcal{B}, \mu)$ is a probability space, is called a dynamical system over G.

In general, for a given semigroup G and $\{T_g\}_{g \in G}$ on the probability space $(X, \mathcal{B}, \mu)$ (i.e., for every $g, h \in G, T_{gh} = T_g T_h$), together with measure-preserving maps, $(X, \mathcal{B}, \mu, \{T_g\}_{g \in G})$ is called a measure-preserving system or a G-measure-preserving system. Let E be a subset of natural numbers. For the additive semigroup $\mathbb{N}$, $\{m \in \mathbb{N} : n + m \in E\}$ denoted by $E - n$ for any $n \in \mathbb{N}$.

Furstenberg's Corresponding Principle establishes a profound connection between measure-preserving systems and sets of integers. For any subset E of the natural numbers, the theorem asserts the existence of a measure-preserving system $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ and a set $A \in \mathcal{B}$ such that the measure of A matches the upper asymptotic density of E. Furthermore, the theorem establishes an intriguing relationship between the combinatorial structure of E and the dynamics of the measure-preserving system. Specifically, for any sequence of integers $n_1, n_2, \cdots, n_k$, the density of the intersection of translated sets $E - n_1, E - n_2, \cdots, E - n_k$ is bounded from below by the measure of a corresponding intersection of translated sets in A. This powerful principle finds its applications through various versions in the realm of multiple recurrence theory.

Suppose that $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ is a measure-preserving system and $A \in \mathcal{B}$ such that $\mu(A) > 0$. Then, for each $k \in \mathbb{N}$,

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu(A \cap T^{-n}A \cap \cdots \cap T^{-kn}A) > 0.$$

This fact is a generalization of the Poincaré Recurrence Theorem, which states there exists $n \in \mathbb{N}$ such that

$$\mu(A \cap T^{-n}A) > 0.$$

A stronger version of that can be stated as follows:

Suppose that $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ is a measure-preserving system and $A \in \mathcal{B}$. Then, for every $\epsilon > 0$, the set below is a syndetic set:

$$\{n \in \mathbb{N} \ : \ \mu(A \cap T^{-n}A) > \mu^2(A) - \epsilon\}. \tag{0.2}$$

As a consequence of the aforementioned content, one can refer to a density version of Van der Waerden's theorem, which was formulated and proven by Szemerédi. He established that every subset of natural numbers with a positive upper density contains an arbitrarily long arithmetic progression [21]. Our ability to discern the monochromaticity of an equation is quite limited. For example, the following question has remained unresolved: Is it true that for every finite coloring of the natural numbers, there exist $a, b \in \mathbb{N}$ such that the structure $\{a^2, b^2, a^2 + b^2\}$ is monochromatic?

In [16], Moreira investigated the monochromatic solutions of polynomial patterns in countable commutative semigroups, providing a novel classification in this domain. However, this classification does not encompass every polynomial structure. In fact, the following conjecture remains unsolved: For every finite coloring of the natural numbers, is it true that there exist $a, b \in \mathbb{N}$ such that the structure $\{a, b, a + b, ab\}$ is monochromatic?

In [12], Green and Sanders, by generalizing the works of Shkredov and Cilleruelo ([20], [6]), successfully provided an answer to the open problem in finite fields. Furthermore, a weaker version of this conjecture has been recently addressed by Moreira and Bergelson which state that, for every finite coloring of the natural numbers, there exist $a, b \in \mathbb{N}$ such that $\{a, a + b, ab\}$ is monochromatic. Szemerédi proved the famous conjecture of Erdös and Turán [8], and Furstenberg, by presenting a new proof of Szemerédi's theorem [10], initiated a deep and enduring interaction between the theories of Ramsey theory and ergodic theory.

In 1943, Rado introduced regular matrices and examined the monochromaticity of these equations in a special case. In [7], Deuber gave his well-known proof regarding Rado's conjecture on partition regular sets. He introduced structures called (m, p, c)-sets and, by iteratively applying Van der Waerden's theorem on arithmetic progressions, proved the theorem for them. In 1975, he generalized the notion of partition regularity to abelian groups. In 1994, Hindman, Deuber, and Bergelson expounded the theory of Rado for commutative rings, delving into the study of both homogeneous and inhomogeneous equations whose coefficient matrices belong to commutative rings. Among the important problems is the monochromaticity of $\{x, y, x+y, xy\}$, which Moreira proved a weak version of this in 2017. He definitively answered this question in a strong sense, employing dynamical systems and ergodic theory with the help of a new representation of a large class of non-linear patterns found in a cell of finite partition.

Before presenting the content, we proceed to define and review some classical results related to the Ramsey theorem. Let R be a countable commutative ring. For natural numbers m and k, consider functions

$$f_1, \ldots, f_k : R^m \to R.$$

The family $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ in R is called a Ramsey family if for every finite coloring $C_1, C_2, \ldots, C_r$ of R, and every $X \in R^m$, there exists a color C belong to $\{C_1, \ldots, C_r\}$ such that

$$\{f_1(X), f_2(X), \ldots, f_k(X)\} \subset C.$$

As you can observe, for any $a, b, k \in \mathbb{N}$, the structures $\{a, b, a+b\}$ and $\{a, a+b, \ldots, a+(k-1)b\}$ are Ramsey in $\mathbb{N}$, but the structures $\{a, a+1\}$ and $\{a, b, 3a-b\}$ are not. This is because if we color each element of the set of natural numbers with a color, then a and $a+1$ must have different colors, and if we color the set of natural numbers with 4 colors in a 5-color set if a and b have the same color, it can be shown that $3a-b$ has a different color [15]. In [5], it was proven that for every $p \in \mathbb{N}$, the family $\{x, y, x+y, x+2y, \ldots, x+py\}$ is Ramsey in $\mathbb{N}$. Additionally, Folkman proved that for every $m \in \mathbb{N}$, the following family is Ramsey:

$$\left\{\begin{array}{lllll}
x_0 & & & & \\
x_1 \quad , & x_1+x_0 \quad , & & & \\
x_2 \quad , & x_2+x_1 \quad , & x_2+x_0 \quad , & x_2+x_1+x_0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
x_m \quad , & x_m+x_{m-1} \quad , & x_m+x_{m-2} \quad , & \cdots & , x_m+x_{m-1}+\cdots+x_0
\end{array}\right\}.$$

Just as the theorems of Schur and Van der Waerden were generalized, the generalization of Folkman's theorem is not far-fetched. In [7], Deuber proved that for every $m, p, c \in \mathbb{N}$, the following structure is Ramsey in $\mathbb{N}$:

$$\left\{\begin{array}{ccc}
cx_0 & & \\
ix_0+cx_1 & , & i \in \{-p, \ldots, p\} \\
ix_0+jx_1+cx_2 & , & i, j \in \{-p, \ldots, p\} \\
\vdots & & \vdots \\
i_0x_0+\cdots+i_{m-1}x_{m-1}+cx_m & , & i_0, \ldots, i_{m-1} \in \{-p, \ldots, p\}
\end{array}\right\}.$$

Suppose that $m \in \mathbb{N}$ and $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ is a finite family of linear functions $f : \mathbb{N}^{(m+1)} \to \mathbb{N}$. Then, this family is Ramsey if and only if there exist p and c in $\mathbb{N}$ such that the above structure contains $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$. To generalize this theorem, various methods can be employed. For instance, one can extend the Ramsey family to an infinite family of functions. Similar to a theorem called Hindman's theorem, which is translatable into the language of Ramsey families, significant results have also been obtained in this regard [13]. Furthermore, considering the potential parallels between the outcomes of linear functions and polynomial functions, the following classic question is raised:

”Suppose that for $k \in \mathbb{N}$, $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k]$. What is the necessary and sufficient condition for the family $\{f_1, \ldots, f_k\}$ to be Ramsey in $\mathbb{N}$?”

Based on the aforementioned, all structures present in the Schur, Van der Waerden, and Deuber theorems are Ramsey families. Examining this subject when the structure involves addition and multiplication proves to be quite challenging. In 1977, Furstenberg and Sárközy presented a proof for the monochromaticity of the structure $\{a, a+b^2\}$ [10], [18]. Subsequently, Bergelson improved these results by proving the monochromaticity of the structure $\{a, b, a+b^2\}$ [3]. However, the significant breakthrough came with the extension to polynomial functions by Bergelson and Leibman in the Van der Waerden theorem, where they showed, that the structure

$$\{x_0, x_0 + p_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, x_0 + p_k(x_1, \ldots, x_m)\}$$

with $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$ such that $p_i(0) = 0$ is Ramsey [4].

Nowadays, the polynomial Van der Waerden theorem has been generalized in various directions, each of which represents a new example of polynomial Ramsey families ([1], [2], [9], [14]). However, a complete and accurate solution for the following conjecture is still not available.

” Is it true that for every finite coloring of the natural numbers, there exist $a, b \in \mathbb{N}$ such that the structure $\{a, b, a + b, ab\}$ is monochromatic? ”

Conclusion

In today’s research, the investigation of Ramsey families of nonlinear functions, whose simpler forms are polynomial expressions with two variables, holds a special priority.

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۹۶-۸۳

مقدمه‌ای بر قضیه رادو و مسائل مرتبط

محمود محمدزاده جعفرآبادی [۱] ، محمد اکبری توتکابنی [۲] ✉

۱. گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، گیلان، ایران. رایانامه: mohammadzadeh.j.m@gmail.com
۲. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، گیلان، ایران.
رایانامه: tootkaboni@guilan.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۲/۲۵
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۵/۱۹
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۵/۲۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
قضیهٔ رادو،
افراز منظم،
نظریهٔ رمزی،
فشرده‌سازی استون-چخ،
چگالی بالایی

رده‌بندی ریاضی:
20F05, 05C05

چکیده

در این مقاله، به بیان قضیهٔ رادو، خانواده‌های رمزی و ارتباط آنها با نظریهٔ ارگودیک و مسائل ترکیبیاتی می‌پردازیم، همچنین تاریخچهٔ پیدایش این مفاهیم از ابتدا تا چگونگی طرح و حل برخی از مسائل حوزهٔ ترکیبیات و نظریهٔ اعداد، به‌ویژه دیدگاه دستگاه‌های دینامیکی را ارائه کرده و برخی از مسائل باز در این زمینه را بیان می‌کنیم.

استناد: محمدزاده جعفرآبادی، محمود، اکبری توتکابنی، محمد. (۱۴۰۲). مقدمه‌ای بر قضیه رادو و مسائل مرتبط. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۹۶-۸۳.
http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9445.1002

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

در حوزهٔ نظریهٔ رمزی، [1] قضیه شور [2] اهمیت فراوانی دارد، [۱۹]. سادگی مسئله و نیز ارتباط آن با حوزه‌های متفاوتی از ریاضیات، بر اهمیت آن دوچندان می‌افزاید. این قضیه بیان می‌دارد که در هر افراز متناهی از اعداد طبیعی، یکی از حجره‌ها شامل یک زیرمجموعهٔ سه عضوی $\{a, b, a+b\}$ است.

قضیه ۱.۱. فرض کنید برای $r \in \mathbb{N}$، مجموعهٔ اعداد طبیعی به r رنگ، رنگ‌آمیزی شود، آنگاه $a, b \in \mathbb{N}$ موجودند به‌طوری‌که ساختار $\{a, b, a+b\}$ تک‌رنگ است.

در سال ۱۹۲۷، وان در واردن [3] نشان داد در هر افراز متناهی از اعداد طبیعی، یکی از حجره‌ها دارای تصاعدهای حسابی به طول دلخواه است. این اثبات پاسخی به یک سؤال باز بود که تا آن زمان حل‌نشده باقی مانده بود، [۲۲].

قضیه ۲.۱. فرض کنید برای $r \in \mathbb{N}$، مجموعهٔ اعداد طبیعی به r رنگ، رنگ‌آمیزی شود، آنگاه برای هر $k \in \mathbb{N}$، $a, b \in \mathbb{N}$ موجودند به‌طوری‌که ساختار $\{a, a+b, a+۲b, \dots, a+kb\}$ تک‌رنگ است.

قضایای شور و وان در واردن محققین را به بررسی الگوهای خطی تک‌رنگ ترغیب نمودند. رادو [4] در سال ۱۹۴۳ با طبقه‌بندی نمودن تمامی ساختارهای خطی در مجموعهٔ اعداد طبیعی به نتایج قابل توجهی در این زمینه دست یافت که در بخش‌های بعد به بیان آنها می‌پردازیم.

اردوش [5] و توران [6] بعد از اثبات قضیهٔ وان در واردن، مطرح کردند که آیا هر زیرمجموعه از اعداد طبیعی با چگالی بالایی مثبت، [7] دارای تصاعد حسابی با طول دلخواه هست؟ این سؤال توسط زمردی [8] در سال ۱۹۷۴ پاسخ داده شد، اما سال ۱۹۷۷ فرشتنبرگ [9] به کمک دستگاه‌های دینامیکی پاسخی دیگر به این مسئله داد که منجر به خلق رشته‌ای با عنوان تئوری ارگودیک-رمزی شد، [۱۰]؛[۱۱].

ایدهٔ کلی حل مسئلهٔ باز اردوش و توران که به قضیهٔ زمردی مشهور است به این شکل است که زیرمجموعهٔ E از اعداد طبیعی دارای تصاعد حسابی به طول k است، یعنی $\{a, a+d, \dots, a+kd\} \subset E$ (برای a, b در اعداد طبیعی) اگر و فقط اگر $a \in E \cap (E-d) \cap \dots \cap (E-kd)$ و در ادامه نشان می‌دهد که اگر E دارای چگالی مثبت باشد، آنگاه

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{۱}{N} \sum_{n=۱}^{N} \bar{d}(E \cap (E-n) \cap \dots \cap (E-kn)) > ۰. \qquad (۱.۱)$$

در نتیجه E شامل دنبالهٔ حسابی به طول $k+۱$ است.

برای نشان دادن رابطه (۱.۱)، فرشتنبرگ اصل تناظری را بیان نمود که بین یک دستگاه دینامیکی حافظ اندازه و چگالی بالایی مجموعه تناظری را معرفی می‌نمود. برای آشنایی بیشتر با این روند، نیاز داریم تا با بعضی مفاهیم آشنا شویم.

فرض کنید $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک فضای احتمال باشد (به این معنی که $\mathcal{B}$ یک $\sigma-$جبر روی مجموعهٔ X و $\mu : \mathcal{B} \to [۰, ۱]$ یک اندازهٔ احتمال (جمعی شمارا) باشد. نگاشت اندازه‌پذیر $T : X \to X$ را حافظ اندازه نامند هرگاه به‌ازای هر $B \in \mathcal{B}$ داشته باشیم $\mu(T^{-۱}B) = \mu(B)$ که $T^{-۱}B := \{x \in X : Tx \in B\}$. به چهارتایی $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ که $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک فضای اندازه و T یک نگاشت انتقال حافظ اندازه باشد، دستگاه حافظ اندازه گویند. دستگاه $(X, \mathcal{B}, \mu, \{T_g\}_{g \in G})$ که G یک نیم‌گروه جابه‌جایی، $T_g : X \to X$ یک تابع است و $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک فضای اندازهٔ احتمال است را یک دستگاه دینامیک روی G می‌نامیم.

به‌طور کلی برای نیم‌گروه مفروض G و عملگر $\{T_g\}_{g \in G}$ از G روی فضای احتمال $(X, \mathcal{B}, \mu)$ (به این معنی که برای هر $g, h \in G$، $T_{gh} = T_g T_h$)، به همراه نگاشت‌های انتقال حافظ اندازه، $(X, \mathcal{B}, \mu, \{T_g\}_{g \in G})$ را یک دستگاه حافظ اندازه یا یک G-دستگاه حافظ اندازه نامند.

فرض کنید $(\mathbb{N}, +)$ یک نیم‌گروه باشد و فرض کنید $E \subseteq \mathbb{N}$. در این صورت به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$E - n := \{x \in \mathbb{N} : n + x \in E\}.$$

[1] Ramsey theory
[2] Schure's theorem
[3] B. L. Van der Waerden
[4] R. Rado
[5] P. Erdös
[6] P. Turan
[7] $\bar{d}(A) = lim_{n \to \infty} \frac{|A \cap \{1, 2, \dots, n\}|}{n}$
[8] E. Szemerédi
[9] H. Fursteberg

قضیه ۳.۱. (اصل تناظر فرشتنبرگ). [1] برای هر $E \subset \mathbb{N}$، یک دستگاه حافظ اندازه $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ و $A \in \mathcal{B}$ که $\mu(A) = \bar{d}(E)$ موجودند به‌طوری‌که برای هر $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ ، داریم:

$$\bar{d}(E \cap (E - n_1) \cap \cdots \cap (E - n_k)) \geq \mu(A \cap T^{-n_1} A \cdots \cap T^{-n_k} A).$$

نسخه‌های متعددی از اصل تناظر فرشتنبرگ و کاربردهای آن ارائه شده که با توجه به مطالب گفته‌شده در این بخش، قضیهٔ زمردی از قضیهٔ بازگشت چندگانهٔ (ضربی) زیر تبعیت می‌کند.

قضیه ۴.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ یک دستگاه حافظ اندازه و مجموعهٔ A از $\mathcal{B}$ موجود باشد به‌طوری‌که $\mu(A) > 0$. آنگاه برای هر $k \in \mathbb{N}$،

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu(A \cap T^{-n} A \cap \cdots \cap T^{-kn} A) > 0.$$

قضیه ۴.۱ تعمیمی از قضیهٔ کلاسیک بازگشتی منسوب به پوآنکاره [2] است.

قضیه ۵.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ یک دستگاه حافظ اندازه و $A \in \mathcal{B}$ موجود باشد به‌طوری‌که $\mu(A) > 0$. در این صورت یک n طبیعی وجود دارد که

$$\mu(A \cap T^{-n} A) > 0.$$

شکل قوی‌تری از آن به‌صورت زیر بیان می‌شود:

قضیه ۶.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ یک دستگاه حافظ اندازه باشد و $A \in \mathcal{B}$. آنگاه به‌ازای هر $\epsilon > 0$، مجموعهٔ زیر یک مجموعهٔ متصل است. (یعنی با تعداد متناهی انتقال به چپ، کل اعداد طبیعی را در بر می‌گیرد.)

$$\{n \in \mathbb{N} \ : \ \mu(A \cap T^{-n} A) > \mu^2(A) - \epsilon\}. \tag{۲.۱}$$

تعریف ۷.۱. فرض کنید G یک نیم‌گروه باشد. $R \subset G$ را یک مجموعهٔ بازگشتی می‌نامند هرگاه برای هر فضای احتمال حافظ عمل $(\Omega, \mu, (T_g)_{g \in G})$ و هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر $B \subset \Omega$ با اندازهٔ مثبت، عنصر غیرهمانی $g \in R$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\mu(B \cap T_g^{-1} B) > 0.$$

لم ۸.۱. فرض کنید R یک مجموعهٔ بازگشتی در نیم‌گروه G باشد. آنگاه برای هر افراز منظم متناهی $R = R_1 \cup \cdots \cup R_r$، یکی از R_iها (برای $1 \leq i \leq r$) مجموعهٔ بازگشتی است.

اثبات. به برهان خلف، فرض کنید هیچ‌کدام از R_iها، مجموعهٔ بازگشتی نباشند. آنگاه برای هر $i = 1, 2, \ldots, r$، $(\Omega_i, \mu_i, \{T_g\}_{g \in G}^{(i)})$ و $B_i \subset \Omega_i$ که $\mu_i(B_i) > 0$ موجود باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر $g \in R_i$،

$$\mu_i(B_i \cap (T_g^i)^{-1} B_i) = 0.$$

فرض کنید $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_r$، $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_r$، $B = B_1 \times \cdots \times B_r$ و برای هر $g \in G$،

$$T_g(\Omega_1, \ldots, \Omega_r) = (T_g^1 \Omega_1, \ldots, T_g^r \Omega_r).$$

آنگاه $\{T_g\}_{g \in G}$ یک عمل حافظ احتمال از G روی Ω است و $\mu(B) = \mu_1(B_1) \cdots \mu_r(B_r) > 0$. ازآنجایی‌که R یک مجموعهٔ بازگشتی است، عنصر $g \in R$ موجود است به‌طوری‌که

$$\mu(B \cap T_g^{-1} B) > 0.$$

[1] Furstenberg's Corresponding Principle
[2] Poincare's Recurrence Theorem

چون
$$\mu(B\cap T_g^{-1}B)=\prod_{i=1}^{r}\mu_i(B_i\cap (T_g^i)^{-1}B_i)$$
می‌توان گفت به‌ازای هر $1\leq i\leq r$،
$$\mu_i(B_i\cap (T_g^i)^{-1}B_i)>0.$$
یعنی $g\notin R_i$ که با فرض خلف در تناقض است پس $g\in R_1\cup\cdots\cup R_r$. □

اکنون به‌عنوان پیامدی از قضایای فوق یک نسخهٔ چگالی از قضیهٔ وان در واردن (که توسط زمردی در [۲۱] اثبات شده است) را بیان می‌کنیم.

قضیه ۹.۱. فرض کنید $A\subset\mathbb{N}$ که $\bar{d}(A)>0$. آنگاه A شامل تصاعد حسابی به طول دلخواه است.

قضیه ۱۰.۱. فرض کنید برای $k\in\mathbb{N}$ چندجمله‌ای‌های $h_1,h_2,\cdots,h_k\in\mathbb{Z}[X]$ موجود باشند به‌طوری‌که برای $1\leq i\leq k$، $h_i(0)=0$. آنگاه برای هر رنگ‌آمیزی متناهی مجموعهٔ اعداد طبیعی، عناصر $a,b\in\mathbb{N}$ موجودند به‌طوری‌که ساختار $\{a,a+h_1(b),a+h_2(b),\ldots,a+h_k(b)\}$ تک‌رنگ است.

به‌راحتی دیده می‌شود که قضیه ۲.۱، حالت خاصی از قضیه ۱۰.۱ است. بااین‌حال، توانایی ما در تشخیص تک‌رنگ بودن یک معادله، خیلی محدود است. به‌عنوان مثال، پرسش زیر تاکنون حل‌نشده باقی مانده است.

مسأله ۱۱.۱. آیا برای هر رنگ‌آمیزی متناهی مجموعهٔ اعداد طبیعی، $a,b\in\mathbb{N}$ موجودند به‌طوری‌که ساختار $\{a^2,b^2,a^2+b^2\}$ تک‌رنگ باشد؟

در سال ۲۰۱۶، موریرا [1] توانست با بررسی طبقه‌بندی نوینی از الگوهای چندجمله‌ای دارای جواب تک‌رنگ از رنگ‌آمیزی مجموعهٔ اعداد طبیعی واقع در نیم‌گروه‌های جابه‌جایی شمارا، به قضیه‌های ۲.۱ و ۱۰.۱ عمومیت دهد؛ ولی با وجود برقراری اتحاد بین چندجمله‌ای‌های وان در واردن و ساختار شور، این طبقه‌بندی نوین شامل هر ساختار چندجمله‌ای نمی‌شود [۱۶]. درواقع حدس زیر هنوز حل‌نشده است.

مسأله ۱۲.۱. برای هر رنگ‌آمیزی متناهی مجموعهٔ اعداد طبیعی، $a,b\in\mathbb{N}$ موجودند به‌طوری‌که ساختار $\{a,b,a+b,ab\}$ تک‌رنگ است.

گرین [2] و سندرز [3] با تعمیم کارهای اشکریدوف [4] [۲۰] و سیروئلو [5] [۶]، موفق به ارائهٔ پاسخی برای حدس ۱۲.۱ در میدان‌های متناهی شدند [۱۲]. در ادامه به ارائهٔ حالت ضعیف‌تری از حدس ۱۲.۱ می‌پردازیم که اخیراً توسط موریرا و برگلسون [6] حل شده است:

قضیه ۱۳.۱. برای هر رنگ‌آمیزی متناهی مجموعهٔ اعداد طبیعی، $a,b\in\mathbb{N}$ موجودند به‌طوری‌که ساختار $\{a,a+b,ab\}$ تک‌رنگ است.

زمردی، حدس معروف اردوش و توران [۸] را اثبات کرد [۲۱] و فرشتنبرگ با ارائهٔ اثباتی جدید از قضیهٔ زمردی [۱۰] آغازگر تعاملی طولانی و عمیق بین نظریهٔ رمزی و نظریهٔ ارگودیک شد.

در سال ۱۹۴۳، رادو ماتریس‌های منظم را معرفی نمود و در حالتی خاص تک‌رنگ بودن این معادلات را مورد بررسی قرار داد. دابر [7] در سال ۱۹۷۳ اثبات معروف خود حول حدس رادو مربوط به مجموعه‌های افراز منظم را بیان کرد. او در اثباتش ساختارهایی به نام (m,p,c)-مجموعه را معرفی و با تکرار کاربردهای قضیهٔ وان در واردن در تصاعد حسابی، قضیهٔ افراز را برای آن‌ها اثبات نمود. وی در سال ۱۹۷۵ مفهوم افراز منظم را به گروه‌های آبلی تعمیم داد. تقریباً ۱۲ سال بعد، یعنی در سال ۱۹۸۷، با همکاری هایندمن [8] نشان داد که (m,p,c)-مجموعه‌ها شامل جواب‌هایی برای هر دستگاه معادلات خطی همگن افراز منظم هستند. در سال ۱۹۹۴، هایندمن، دابر و

[1] J. Moreira
[2] B. Green
[3] T. Sanders
[4] Ilya D. Shkredov
[5] J. Cilleruelo
[6] V. Bergelson
[7] W. Deuber
[8] N. Hindman

برگلسون نظریهٔ رادو را برای حلقه‌های جابه‌جایی بیان و طی آن به بررسی معادلات همگن و غیرهمگنی که ماتریس ضرایبشان از حلقه‌های جابه‌جایی بود، پرداختند. از جمله مسائل مهمی که در این حوزه مطرح می‌شود، تک‌رنگ بودن $\{x, y, x+y, xy\}$ است که موریرا در سال ۲۰۱۷ شکل ضعیفی از آن را حل نمود و به‌طور قطعی در یک مفهوم قوی و با نمایش کلاس بزرگ جدیدی از الگوهای غیرخطی که در یک حجره از افراز متناهی یافت می‌شود، با کمک دستگاه دینامیکی و نظریهٔ ارگودیک به این سؤال پاسخ داد.

قبل از ارائهٔ مطالب، به بیان تعاریف و مرور تعدادی از نتایج کلاسیک مربوط به قضیهٔ رمزی می‌پردازیم.

تعریف ۱۴.۱. فرض کنید R یک حلقهٔ جابه‌جایی شمارا باشد که برای m و k طبیعی، توابع

$$f_{۱}, \dots, f_k : R^m \to R$$

را داشته باشیم. به $\{f_{۱}, f_{۲}, \dots, f_k\}$ در R، خانوادهٔ رمزی گویند هرگاه برای هر رنگ‌آمیزی متناهی R به‌صورت

$$R = C_{۱} \cup C_{۲} \cup \dots \cup C_r,$$

$X \in R^m$ و رنگ C از $\{C_{۱}, \dots, C_r\}$ موجود باشند به‌طوری‌که

$$\{f_{۱}(X), f_{۲}(X), \dots, f_k(X)\} \subset C.$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، برای هر $a, b, k \in \mathbb{N}$، قضیه‌های ۱.۱ و ۲.۱ به استناد تعریف ۱۴.۱، ساختارهای $\{a, b, a+b\}$ و $\{a, a+b, \dots, a+(k-۱)b\}$ در $\mathbb{N}$ رمزی هستند، ولی ساختارهای $\{a, a+۱\}$ و $\{a, b, ۳a-b\}$ چنین نیستند. زیرا اگر هر عضو از مجموعهٔ اعداد طبیعی را یک رنگ در نظر بگیرید، آنگاه a و $a+۱$ باید رنگ‌های متفاوتی داشته باشند و اگر مجموعهٔ اعداد طبیعی را با ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم، در یک مجموعهٔ ۵حالته، چنانچه a و b یک‌رنگ باشند، می‌توان نشان داد که $۳a-b$ دارای رنگ متفاوتی است [۱۵].

قضیه ۱۵.۱. برای هر $p \in \mathbb{N}$، خانوادهٔ $\{x, y, x+y, x+۲y, \dots, x+py\}$ در $\mathbb{N}$، رمزی است [۵].

تعریف ۱۶.۱. برای دنبالهٔ متناهی $\{x_n\}_{n=۱}^{m}$ از اعداد طبیعی، مجموعهٔ جمع‌های متناهی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$FS(\{x_n\}_{n=۱}^{m}) = \{\sum_{n \in F} x_n \ : \ F \in \mathcal{P}_f(\{۱, ۲, \dots, m\})\}$$

و برای دنبالهٔ نامتناهی $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از اعداد طبیعی تعریف می‌کنیم:

$$FS(\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}) = \{\sum_{n \in F} x_n \ : \ F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}.$$

قضیه ۱۷.۱. (فالکمن)[۱]: برای هر $m \in \mathbb{N}$، خانوادهٔ زیر رمزی است:

$$\left\{\begin{array}{lllll}
x_{۰} & & & & \\
x_{۱} \ , & x_{۱}+x_{۰} \ , & & & \\
x_{۲} \ , & x_{۲}+x_{۱} \ , & x_{۲}+x_{-۰} \ , & x_{۲}+x_{۱}+x_{۰} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
x_m \ , & x_m+x_{m-۱} \ , & x_m+x_{m-۲} \ , & \cdots & x_m+x_{m-۱}+\dots+x_{۰}
\end{array}\right\}.$$

به این معنا که با مفروض بودن رنگ‌آمیزی متناهی از مجموعهٔ اعداد طبیعی برای هر $m \in \mathbb{N}$، زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\mathbb{N}$ با کاردینال m موجود است به‌طوری‌که جمع متناهی‌اش، تک‌رنگ شود.

همان‌طور که قضیه‌های شور و وان در واردن توسط برائر تعمیم یافتند، تعمیم قضیهٔ فالکمن نیز دور از ذهن نیست.

[1] Folkman

قضیه ۱.۱۸. (دابر): برای هر $m, p, c \in \mathbb{N}$، ساختار زیر در $\mathbb{N}$ رمزی است [۷].

$$\left\{\begin{array}{ccc} cx_0 & & \\ ix_0 + cx_1 & , & i \in \{-p, \ldots, p\} \\ ix_0 + jx_1 + cx_2 & , & i, j \in \{-p, \ldots, p\} \\ \vdots & & \vdots \\ i_0 x_0 + \cdots + i_{m-1} x_{m-1} + cx_m & , & i_0, \cdots i_{m-1} \in \{-p, \ldots, p\} \end{array}\right\}.$$

کاملاً واضح است که قضیه ۱.۱۸ ، قضیه‌های کلاسیک قبل را به‌عنوان حالت خاص شامل شده و برای هر خانوادهٔ رمزی خطی متناهی در $\mathbb{N}$ اعمال می‌شود:

قضیه ۱.۱۹. فرض کنید $m \in \mathbb{N}$ و $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ خانواده‌ای متناهی از توابع خطی (هومومورفیسم‌های نیم‌گروه) $f : \mathbb{N}^{(m+1)} \to \mathbb{N}$ باشد. آنگاه این خانواده، رمزی است اگر و فقط اگر p و c در $\mathbb{N}$ موجود باشند به‌طوری‌که ساختار موجود در قضیه ۱.۱۸ ، شامل $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ باشد.

برای تعمیم قضیه ۱.۱۹ روش‌های متفاوتی وجود دارد. به‌عنوان مثال می‌توان به گسترش خانوادهٔ رمزی به خانواده‌ای نامتناهی از توابع اشاره کرد. فعالیتی مانند قضیه‌ای به نام هایندمن که قابل بازنویسی به زبان خانوادهٔ رمزی است و نتایج قابل توجهی نیز دراین‌باره به دست آمد [۱۳]. همچنین می‌توان دامنهٔ قضیه ۱.۱۹ را به سایر نیم‌گروه‌های جابه‌جایی نیز تعمیم داد. در ادامه با توجه به محتمل بودن تشابه نتایج حاصل از خطی بودن توابع با زمانی که توابع چندجمله‌ای هستند، سؤال کلاسیک زیر مطرح می‌شود:
”فرض کنید برای k طبیعی، $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots x_k]$. آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه خانوادهٔ $\{f_1, \ldots f_k\}$ در $\mathbb{N}$ رمزی باشد، چیست؟ “

با توجه به آنچه گفته شد، همهٔ ساختارهای موجود در قضیه‌های شور، وان در واردن و دابر، خانوادهٔ رمزی هستند. بررسی این مبحث در حالتی که ساختار شامل ترکیب جمع و ضرب باشد، کاری بسیار دشوار است. فرشتنبرگ و سارکوزی در سال ۱۹۷۷ اثباتی برای تک‌رنگ بودن ساختار $\{a, a+b^2\}$ ، ارائه دادند [۱۰]، [۱۸] و بعد از آن برگلسون با اثبات تک‌رنگ بودن ساختار $\{a, b, a+b^2\}$ ، نتایج این قضیه را بهبود بخشید، [۳] اما پیشرفت بزرگ بعدی دررابطه‌با حدس ۱.۱۲ ، توسعهٔ چندجمله‌ای برگلسون و لیبمن در قضیهٔ وان در واردن بود [۴] که به زبان خانوادهٔ رمزی، نشان دادند ساختار

$$\{x_0, x_0 + p_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, x_0 + p_k(x_1, \ldots, x_m)\}$$

که $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots x_m]$ ، $p_i(0) = 0$ رمزی است.
امروزه قضیهٔ چندجمله‌ای وان در واردن در جهات مختلفی تعمیم یافته که هرکدام به‌نوعی بیانگر مثال جدیدی از خانواده‌های چندجمله‌ای‌های رمزی است ([۱]، [۲]، [۹] ، [۱۴]) ولی هنوز یک راه‌حل کامل و صحیح برای حدس ۱.۱۲ ، در اختیار نیست.

۲ افراز منظم و ماتریس‌های افراز منظم

تعاریف و قضیه‌های بیان‌شده در این بخش، حاصل مطالعهٔ کتاب فشرده‌سازی استون–چخ [۱۳] است. بسیاری از نتایج کلاسیک قضیهٔ رمزی، معمولاً به‌صورت زیر بیان می‌شود.
فرض کنید برای u, v طبیعی، A یک ماتریس $u \times v$ با درایه‌های نامنفی باشد. آیا می‌توان گفت زمانی که $\mathbb{N}$ را به تعداد متناهی رنگ، افراز و رنگ‌آمیزی می‌کنیم، بردار $\vec{x} \in \mathbb{N}^v$ موجود است به‌طوری‌که جواب‌های $A\vec{x}$ تک‌رنگ باشد؟

در جهت شفافیت موضوع به قضیهٔ وان در واردن توجه کنید. ساختار حسابی $\{a, a+d, a+2d, a+3d\}$ معادل عبارت زیر است:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}.$$

تعریف ۱.۲. فرض کنید $(S,+)$ یک نیم‌گروه با عضو همانی صفر باشد. برای u و v طبیعی، A را یک ماتریس $u \times v$ با درایه‌هایی از ω در نظر بگیرید. A یک تصویر افراز منظم روی S است اگر و فقط اگر برای $r \in \mathbb{N}$، مجموعهٔ S را به $E_1, E_2, \ldots, E_r$ افراز کنیم، $i \in \{1,2,\ldots,r\}$ و $\overrightarrow{x} \in (S\backslash\{0\})^v$ موجود باشند به‌طوری‌که $A\overrightarrow{x} \in E_i^u$.

تعریف ۲.۲. فرض کنید برای u و v طبیعی، C یک ماتریس $u \times v$ با درایه‌هایی از $\mathbb{Z}$ باشد. آنگاه C^+ و C^- ماتریس‌های $u \times v$ با درایه‌هایی از ω هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$C^+_{i,j} := (|C_{i,j}| + C_{i,j})/2 \text{ و } C^-_{i,j} := (|C_{i,j}| - C_{i,j})/2.$$

تعریف ۳.۲. فرض کنید $(S,+)$ یک نیم‌گروه با عضو همانی صفر باشد. برای u و v طبیعی، C را ماتریس $u \times v$ با درایه‌هایی از $\mathbb{Z}$ در نظر بگیرید. آنگاه C یک ماتریس هسته افراز منظم روی S است اگر و فقط اگر هرگاه برای $r \in \mathbb{N}$ و مجموعهٔ $S = \bigcup_{i=1}^r D_i$، $i \in \{1,2,\ldots,r\}$ و $\overrightarrow{x} \in D_i^v$ موجود باشند به‌طوری‌که $C^+\overrightarrow{x} = C^-\overrightarrow{x}$.

در ادامه به بیان شرایطی می‌پردازیم که ضامن هسته افراز منظم بودن روی اکثر نیم‌گروه‌هاست.

تعریف ۴.۲. فرض کنید برای u و v طبیعی، C یک ماتریس $u \times v$ با درایه‌های گویا باشد که ستون‌های آن را با $c_1, c_2, \ldots, c_v$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید $R = \mathbb{Z}$ یا $R = \mathbb{Q}$ ، در این صورت C در شرایط ستونی روی R صدق می‌کند اگر و فقط اگر $m \in \mathbb{N}$ و $I_1, I_2, \ldots, I_m$ موجود باشند به‌طوری‌که

۱. مجموعهٔ $\{I_1, I_2, \ldots, I_m\}$ یک افراز از $\{1,2,\ldots,v\}$ باشد.

۲. $\sum_{i\in I_1} \overrightarrow{c_i} = \overrightarrow{0}$.

۳. اگر $m > 1$ و $t \in \{2,3,\ldots,m\}$ می‌توانیم J_t را به‌صورت اجتماع I_1 تا I_{t-1} در نظر بگیریم. آنگاه $\{\delta_{t,i}\}_{i\in J_t}$ در R موجود است به‌طوری‌که

$$\sum_{i\in I_t} \overrightarrow{c_i} = \sum_{i\in J_t} \delta_{t,i} \cdot \overrightarrow{c_i}.$$

قضیه ۵.۲. فرض کنید برای u و v طبیعی، C یک ماتریس $u \times v$ با درایه‌های گویا باشد. آنگاه عبارات زیر با یکدیگر معادل هستند:

۱. ماتریس C یک هسته افراز منظم روی $(\mathbb{N},+)$ است.

۲. ماتریس C یک هسته افراز منظم روی $(\mathbb{N},.)$ است.

۳. ماتریس C در شرایط ستونی روی $\mathbb{Q}$ صدق می‌کند.

تعریف ۶.۲. فرض کنید R یک حلقهٔ جابه‌جایی باشد و C به‌ازای u و v طبیعی، یک ماتریس $u \times v$ روی R باشد. آنگاه ماتریس C در شرایط ستونی روی R صدق می‌کند اگر و فقط اگر برای ستون‌های $c_1, c_2, \cdots, c_v$ از ماتریس C، برای یک $m \in \mathbb{N}$ و $k_1, k_2, \cdots, k_m$ در $\mathbb{N}$ موجود باشد به‌طوری‌که $1 < k_1 < \ldots < k_m = v$ و $d_1, \ldots, d_m \in R\backslash\{0\}$ به‌طوری‌که

۱. $d_1. \sum_{i=1}^{k_1} c_i = 0$.

۲. اگر $m > 1$ و $t \in \{2,3,,m\}$، آنگاه $\alpha_{1,t}, \alpha_{2,t}, \ldots, \alpha_{k_{t-1},t} \in R$ موجود است به‌طوری‌که

$$\sum_{i=1}^{k_{t-1}} \alpha_{I,t}.c_i + d_t. \sum_{i=k_{t-1}+1}^{k_t} c_i = 0.$$

۳. اگر $m > 1$، آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $R.d_1. \prod_{t=2}^m d_t^n$ نامتناهی است.

مشاهده می‌شود که اگر R متناهی باشد و C در شرایط ستونی روی R صدق می‌کند طبق تعریف باید $m = 1$.

تعریف ۷.۲. فرض کنید برای $u, v \in \mathbb{N}$، $A_{u\times v}$ ماتریسی روی $\mathbb{Z}$ باشد. آنگاه، $A_{u\times v}$ یک افراز منظم روی $\mathbb{N}$ است اگر و فقط اگر در شرایط ستونی روی $\mathbb{Z}$ صدق کند.

رادو با تکیه بر قضیه‌ها و مفاهیمی که گفته شد، توانست در سال ۱۹۴۳، نتایج قوی‌تری را بیان و اثبات نماید [۱۷]:

قضیه ۸.۲. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از مجموعهٔ اعداد مختلط و برای $u, v \in \mathbb{N}$، $A_{u\times v}$ ماتریسی روی R باشد. آنگاه، $A_{u\times v}$ یک افراز منظم روی $R \setminus \{0\}$ است اگر و فقط اگر $A_{u\times v}$ در شرایط ستونی روی R صدق کند.

هایندمن با اثبات متغیر بودن قضیهٔ فوق برای فضاهای برداری روی میدان‌های متناهی، سرانجام آن را برای هر حلقهٔ جابه‌جایی (موسوم به حلقهٔ رادو) به اثبات رساند.

قضیه ۹.۲. فرض کنید R یک حلقهٔ جابه‌جایی باشد و برای هر $u, v \in \mathbb{N}$، C یک ماتریس $u \times v$ روی R باشد که در شرایط ستونی روی R نیز صدق کند. آنگاه C یک افراز منظم روی $R\setminus\{0\}$ است.

تعریف ۱۰.۲. فرض کنید R یک حلقهٔ جابه‌جایی باشد. فرض کنید برای $u, v \in \mathbb{N}$، C یک ماتریس $u \times v$ روی R باشد که افراز منظم روی $R\setminus\{0\}$ است و در شرایط ستونی صدق می‌کند. آنگاه R یک حلقهٔ رادو نامیده می‌شود.

قضیه ۱۱.۲. عبارات زیر همواره برقرار هستند:

۱. هر حلقهٔ جابه‌جایی متناهی، یک حلقهٔ رادو است.

۲. هر جمع مستقیم از تعداد نامتناهی حلقه‌های جابه‌جایی بدیهی، یک حلقهٔ رادو است.

۳. هر جمع مستقیم از حلقه‌های رادو، حلقهٔ رادو است.

امروزه در این تحقیقات، بررسی خانواده‌های رمزی از توابع غیرخطی که ساده‌ترین شکل آن‌ها چندجمله‌ای‌هایی با دو متغیر هستند، از اولویت خاصی برخوردارند.

References

[1] Beiglböck, M., Bergelson, V., Hindman, N., & Strauss, D. (2006). Multiplicative structures in additively large sets. *J. Combin. Theory Ser. A*, 113, 1219–1242. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcta.2005.11.003.

[2] Beiglböck, M., Bergelson, V., Hindman, N., & Strauss, D. (2008). Some new results in multiplicative and additive Ramsey theory. *Trans. Amer. Math. Soc*, 360, 819–847. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-07-04370-X.

[3] Bergelson, V. (1987). Ergodic Ramsey theory. *Logic and combinatorics*, 65, 63–87.

[4] Bergelson, V., & Leibman, A. (1996). Polynomial extension of van der Wearden's and Szemeredi's theorem. *J. Amer. Math. Soc*, 9, 725–753.

[5] Brauer, A. (1928). Ubre Sequenzen von Potenzresten. *Sitzungsberichte de Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physicalish-Mathematische Klasse*, 9–16.

[6] Cilleruelo, J. (2012). Combinatorial problems in finite fields and Sidon sets. *Combinatorica*, 32, 497–511. DOI: https://doi.org/10.1007/s00493-012-2819-4.

[7] Deuber, W. (1973). Partitionen und lineare Gleichungssysteme. *In Math. Z*, 133, 109–123. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01237897.

[8] Erdös, P., & Turan, P. (1936). On some sequences of integers. *J. London Math. Soc*, 11, 261–264. DOI: https://doi.org/10.1112/jlms/s1-11.4.261.

[9] Frantzikinakis, N., & Host, B. (2017). Higher order Fourier analysis of multiplicative functions and applications. *J. Amer. Math. Soc*, 30, 67–157. DOI: https://doi.org/10.1090/jams/857.

[10] Furstenberg, H. (1977). Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions. *J. d'Analyse math*, 31, 204–256. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02813304.

[11] Furstenberg, H., Katznelson, Y., & Orstein, D. (1979). The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem. *Bull. Amer. Math. Soc*, 7, 427–552. DOI: https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1982-15052-2.

[12] Green, B., & Sanders, T. (2016). Monochoromatic sums and products. *Dis. Anal*. DOI: https://doi.org/10.19086/da.613.

[13] Hindman, N., & Strauss, D. (2012). Algebra in Stone-$\check{C}$ech compactification. Theory and application. *De Gruyter Expositions in Mathematics, 27. Walter de Gruyter Co., Berlin*. DOI: https://doi.org/10.1515/9783110258356.

[14] McCutcheon, R. (2010). A variant of density Hales-Jewett theorem. *Bull. Lond. Math. Soc*, 42, 974–980. DOI: https://doi.org/10.1112/blms/bdq051.

[15] Moreira, J. (2016). Partition Regular Polynomial Patterns in Commutative Semigroups. *Ohio State University*.

[16] Moreira, J. (2017). Monochromatic sums and products in $\mathbb{N}$. *Annals of Math*, 185, 1069–1090. DOI: https://doi.org/10.4007/annals.2017.185.3.10.

[17] Rado, R. (1943). Note on combinatorial analysis. *Proc. London Math. Soc*, 48, 122–160.

[18] Sárközy, A. (1978). On difference sets of sequences of integers. I. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 31, 125–149. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01901984.

[19] Schur, I. (1916). Uber die Kongruenz $x^m + y^m = z^m (\mathrm{mod}\ p)$. *Jahresbericht der Deutschen Math.Verein*, 25, 114–117.

[20] Shkredov, I.D. (2010). On monochromatic solutions of some nonlinear equations in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. *Math Notes*, 88, 603–611. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434610090336.

[21] Szemerédi, E. (1975). On the sets of integers containing no k elements in arithmetic progressions. *Acta. Arith*, 27, 299–345. DOI: https://doi.org/10.4064/AA-27-1-199-245.

[22] Van der Waerden, B.L. (1927). Beweis einer Baudetsvhen Vermutung. *Nieuw. Arch. Wisk*, 15, 212–216.

Measure Algebras and Applications

Shrinkage estimators' properties in regression models using L_1 penalized norm

Seyed Kamran Ghoreishi[1]

1. Department of Statistics, University of Qom, Qom, Iran. Email: atty_ghoreishi@yahoo.com

Article Info	**ABSTRACT**

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 15 May 2023
Received in revised form:
7 August 2023
Accepted: 13 August 2023
Published Online:
30 September 2023

Keywords:
Hierarchical models,
Shrinkage estimators,
Regression models,
High-dimensional datasets

2020 Mathematics Subject Classification:
62F15, 62J07

In this paper, we first introduce a two-level hierarchical model with a linear structure. We use the moment, maximum likelihood, and SURE estimators to obtain the regression coefficients shrinkage estimators. Since, regression models have vast applications in high-dimensional datasets, using sparsity assumption, we discuss the asymptotic properties of the regression estimators under L_2 error norm and L_1 penalty norm.

Cite this article: Ghoreishi, S.K. (2023). Shrinkage estimators' properties in regression models using L_1 penalized norm. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 97–106. http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9446.1003

Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/MAA.2023.9446.1003

Extended Abstract

Shrinkage estimators have found vast applications in many disciplines. These estimators were first introduced by James and Stein (1961) and Stein (1962). Many statisticians have shown different characteristics of these estimators. The first version of two-level hierarchical models is called the homoscedastic hierarchical model with the following structure

$$\begin{aligned} &Y_i \sim N(\theta_i, A) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ &\theta_i \sim N(\mu, \lambda). \end{aligned}$$

The second version of two-level hierarchical models, heteroscedastic hierarchical models, is as follows

$$\begin{aligned} &Y_i \sim N(\theta_i, A_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ &\theta_i \sim N(\mu, \lambda). \end{aligned}$$

Several authors have considered discussing the asymptotic properties of the heteroscedastic hierarchical models too. Among others, we can refer to Xie et al (2012-2016), Ghoreishi and Meshkani (2014), Baranchik (1970), Cai and Zijian (2016), and Shantia and Ghoreishi (2020).

In this paper, we address the following heteroscedastic hierarchical model

$$\begin{aligned} &Y_i \sim N(\theta_i, A_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ &\theta_i \sim N(\mu, \lambda), \\ &\theta_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_p X_{pi} \end{aligned}$$

with a linear structure for θ_is. We will use the moment, maximum likelihood, and SURE methods to obtain the shrinkage estimate

$$\hat{\theta}_i = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda} + A_i} Y_i + \frac{A_i}{\hat{\lambda} + A_i} \hat{\mu}$$

and also to estimate the regression coefficients $\beta_1, \cdots, \beta_p$.

A common assumption for high-dimensional regression models, $p = O(n)$, is the sparsity assumption for the vector of the regression coefficient. That is,

$$card(\boldsymbol{\beta}) = \|\boldsymbol{\beta}\|_0 = s_0 \ll p,$$

where $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p)^T$.

Assuming the sparsity, the asymptotic properties of the resulting estimators will be investigated under the error function L_2 and the penalized function L_1 given by

$$\arg \min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^P} \left\{ \frac{1}{2n} \|W^{1/2}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})\|_2^2 + \lambda \|\boldsymbol{\beta}\|_1 \right\}, \tag{0.1}$$

where $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)^T$, $\mathbf{X}$ is the regression matrix, and $\mathbf{W} = diag\left(\frac{\hat{\lambda}+A_1}{\hat{\lambda}A_1}, \cdots, \frac{\hat{\lambda}+A_n}{\hat{\lambda}A_n} \right)$.

Assuming that $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ is the solution of (0.1) and $\boldsymbol{\beta}^*$ is the real vector, we will construct the L_2-upper bound

$$\|\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}^*\|_2 \leq \frac{4}{\gamma} \sqrt{\max_j \left\{ \frac{\lambda + A_j}{\lambda A_j} \right\} \frac{s_0 \ln p}{n}},$$

for $\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}^*$.

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۱۰۶-۹۷

خواص مجانبی برآوردهای انقباضی در مدل‌های رگرسیونی با استفاده از تابع تاوانیده با نرم L_1

سید کامران قریشی [۱]

۱. گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: atty_ghoreishi@yahoo.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۲/۲۵
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۵/۱۶
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۵/۲۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
مدل‌های سلسله‌مراتبی،
برآوردهای انقباضی،
مدل‌های رگرسیونی،
داده‌های با ابعاد بزرگ

رده‌بندی ریاضی:
62F15, 62J07

چکیده

در این مقاله، ابتدا یک مدل دوسطحی با ساختار خطی معرفی خواهیم کرد. از برآوردهای گشتاوری، ماکسیمم درست‌نمایی و $SURE$، برای برآورد انقباضی پارامترهای مدل و برآورد پارامترهای مدل رگرسیونی استفاده خواهیم کرد. به دلیل اینکه مدل‌های رگرسیونی کاربرد فراوانی برای تحلیل داده‌های با ابعاد بزرگ دارند، لذا با فرض تُنک بودن بردار ضرایب مدل رگرسیونی، خواص مجانبی برآوردکننده‌های حاصل تحت تابع خطای L_2 و تابع تاوانیده با نرم L_1 بررسی خواهند شد.

استناد: قریشی، سید کامران. (۱۴۰۲). خواص مجانبی برآوردهای انقباضی در مدل‌های رگرسیونی با استفاده از تابع تاوانیده با نرم L_1. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۱۰۶-۹۷.
http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9446.1003

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

امروزه برآوردهای انقباضی کاربرد وسیعی در حوزه‌های مختلف تحلیل داده‌ها دارند. این برآوردها ابتدا توسط جیمز و اشتاین (۱۹۶۱) معرفی شدند. اشتاین (۱۹۶۲) از این برآوردها برای تخمین همزمان میانگین چند جامعهٔ نرمال استفاده نمود. به‌این‌ترتیب برآوردهای انقباضی مبنایی برای گسترش مدل‌های سلسله‌مراتبی با توزیع نرمال شدند. پس از معرفی برآوردهای چروکیده، مطالعهٔ خواص آنها همواره مورد توجه دانشمندان بوده است. تاکنون آمارشناسان مختلفی سعی نموده‌اند تا خواص بیزی، خواص بیز تجربی، و خواص تابع مخاطره برآوردهای انقباضی را در مدل‌های سلسله‌مراتبی همگن نرمال که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند، بررسی کنند

$$\begin{aligned} &Y_i \sim N(\theta_i, A) \qquad i = ۱, ۲, \dots, n \\ &\theta_i \sim N(\mu, \lambda). \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

شی و همکاران (۲۰۱۲ و ۲۰۱۶) مدل‌های همگن فوق را به مدل‌های سلسله‌مراتبی ناهمگن دوسطحی

$$\begin{aligned} &Y_i \sim N(\theta_i, A_i) \qquad i = ۱, ۲, \dots, n \\ &\theta_i \sim N(\mu, \lambda), \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

تعمیم و خواص مجانبی مخاطره برآوردکننده‌ها را مورد بررسی قرار دادند، که در آن واریانس‌های A_i کمیت‌های معلوم ولی نابرابر هستند. مدل‌های سلسله‌مراتبی دوسطحی (۲.۱) توسط قریشی و مشکانی (۲۰۱۴) به مدل‌های سلسله‌مراتبی ناهمگن با ساختار تابعی برای واریانس‌های هر دو سطح مدل تعمیم و خواص مجانبی آنها را تحقیق نمودند. به‌منظور استفادهٔ مناسب‌تر از برآوردهای انقباضی در تحلیل داده‌های آماری، طی سال‌های اخیر، آمارشناسان صورت‌های مختلف از مدل‌های سلسله‌مراتبی (۲.۱) را توسعه و خواص برآوردهای متناظر را بررسی نموده‌اند که از آن جمله می‌توان به برانچیک (۱۹۷۰)، کاتی و زنچینگ (۲۰۱۶)، و شنتیا و قریشی (۲۰۲۰) اشاره نمود.

در این مقاله، به برآوردهای مدل رگرسیونی چندگانه $\theta_i = \beta_۱ X_{۱i} + \beta_۲ X_{۲i} + \dots + \beta_p X_{pi}$ تحت مدل دوسطحی با ساختار خطی

$$\begin{aligned} &Y_i \sim N(\theta_i, A_i) \qquad i = ۱, ۲, \dots, n \\ &\theta_i \sim N(\mu, \lambda), \\ &\theta_i = \beta_۱ X_{۱i} + \beta_۲ X_{۲i} + \dots + \beta_p X_{pi} \end{aligned} \tag{۳.۱}$$

خواهیم پرداخت. از برآورد انقباضی θ_i برای برآورد پارامترهای رگرسیونی β_j استفاده خواهیم کرد. خواص این برآوردکننده‌ها با شرط $p = O(n)$ و فرض مدل رگرسیونی تُنک به دست خواهند آمد.

ساختار این مقاله به شرح زیر است:

در بخش ۲ روش‌های برآوردهای بیز تجربی ابرپارامترهای μ و λ را مرور خواهیم کرد. بخش ۳ به بررسی خواص برآوردهای انقباضی مدل رگرسیونی تُنک

$$\theta_i = \beta_۱ X_{۱i} + \beta_۲ X_{۲i} + \dots + \beta_p X_{pi}$$

با شرط $p = O(n)$ اختصاص دارد. برای یافتن برآورد پارامترهای مدل رگرسیون تُنک بالا، از تابع تاوان محدب

$$p_\lambda(\beta_۱, \cdots, \beta_p) = \sum_{j=۱}^{p} |\beta_j| = \|\boldsymbol{\beta}\|_۱$$

استفاده خواهیم کرد که در آن $\boldsymbol{\beta} = (\beta_۱, \cdots, \beta_p)^T$.

۲ برآوردهای بیز تجربی ابرپارامترهای μ و λ

طبق مدل مفروض (۳.۱) و با استفاده از قضیهٔ بیز، چگالی حاشیه‌ای Y_i و چگالی پسین θ_i به‌صورت زیر به دست می‌آیند

$$Y_i \text{ توزیع حاشیه‌ای } : Y_i \sim N(\mu, \lambda + A_i)$$

$$\theta_i \text{ توزیع شرطی } : \theta_i | Y_i \sim N\left(\frac{\lambda}{\lambda + A_i} Y_i + \frac{A_i}{\lambda + A_i}\mu, \ \frac{\lambda A_i}{\lambda + A_i}\right)$$

یکی از برآوردهای مناسب بیزی برای پارامتر θ_i میانگین چگالی پسین

$$\hat{\theta}_i = \frac{\lambda}{\lambda + A_i} Y_i + \frac{A_i}{\lambda + A_i}\mu$$

است. در تحلیل بیز تجربی روش‌های مختلفی برای برآورد ابرپارامترهای μ و λ وجود دارند که در ادامه به طور مختصر به ۳ روش پرکاربرد اشاره می‌کنیم. برای آشنایی با روش‌های برآورد بیز تجربی به افرون و موریس (۱۹۷۳)، برگر (۱۹۷۶-۱۹۹۶)، موریس (۱۹۸۳) مراجعه نمایید.

۱. روش گشتاوری: برآوردهای بیز تجربی ابرپارامترهای μ و λ در روش گشتاوری به‌صورت زیر داده می‌شوند

$$\hat{\mu}^M = \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad ,\hat{\lambda}^M = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left((Y_i - \bar{Y})^2 - A_i\right)}{n}\right)_+$$

که در آن a_+ برابر a است اگر $a > 0$ و برابر صفر است اگر $a < 0$. در این حالت برآورد انقباضی θ_i برابر خواهد بود با

$$\hat{\theta}_i^M = \frac{\hat{\lambda}^M}{\hat{\lambda}^M + A_i} Y_i + \frac{A_i}{\hat{\lambda}^M + A_i}\bar{Y}. \qquad (۱.۲)$$

۲. روش ماکسیمم درست‌نمایی: برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی ابرپارامترهای μ و λ از طریق حل دستگاه معادلات زیر به دست می‌آیند

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda + A_i}(Y_i - \mu) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(Y_i-\mu)^2}{(\lambda + A_i)^2} - \frac{1}{\lambda + A_i}\right) = 0. \end{cases}$$

درصورتی‌که دستگاه معادلات فوق دارای جواب باشد برآورد انقباضی θ_i برابر خواهد بود با

$$\hat{\theta}_i^L = \frac{\hat{\lambda}^L}{\hat{\lambda}^L + A_i} Y_i + \frac{A_i}{\hat{\lambda}^L + A_i}\hat{\mu}^L. \qquad (۲.۲)$$

۳. روش $SURE$: برآوردهای $SURE$ ابرپارامترهای μ و λ بر اساس تابع ضرر

$$l_n(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\theta_i - \hat{\theta}_i)^2$$

به دست می‌آیند. برای این منظور ابتدا لازم است برآورد نااریب تابع مخاطرهٔ متناظر $l_n(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ یعنی

$$R_n(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{(\lambda + A_i)^2}\Big(A_i(\theta_i - \mu)^2 + \lambda^2\Big),$$

را که به‌صورت

$$SURE(\mu, \lambda) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{A_i}{(\lambda + A_i)^2}\Big(A_i(Y_i - \mu)^2 + \lambda^2 - A_i^2\Big)$$

است، به دست آوریم. برآوردهای $SURE$ ابرپارامترهای μ و λ با مینیمم کردن تابع $SURE(\mu, \lambda)$ به دست می‌آیند. به عبارت دیگر داریم

$$(\hat{\mu}^S, \hat{\lambda}^S) = \underset{\mu,\ \lambda > 0}{\arg\min}\ SURE(\mu, \lambda),$$

و در نتیجه برآورد $SURE$ پارامتر θ_i برابر خواهد بود با

$$\hat{\theta}_i^S = \frac{\hat{\lambda}^S}{\hat{\lambda}^S + A_i} Y_i + \frac{A_i}{\hat{\lambda}^S + A_i}\hat{\mu}^S. \qquad (۳.۲)$$

براساس یافته‌های شی و همکاران (۲۰۱۲) برآوردهای $SURE$ دارای خاصیت مینیمم مخاطره هستند؛ لذا در عمل اقبال بیشتری برای استفاده از این نوع برآوردها وجود دارد، هر چند نباید عملاً از خواص مطلوب برآوردکننده‌های گشتاوری و ماکسیمم درست‌نمایی نیز غافل بود. در این مقاله، از هر سه نوع برآوردکننده برای بررسی خواص پارامترهای مدل رگرسیونی $\theta_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_p X_{pi}$ بهره خواهیم جست.

۳ خواص برآوردهای انقباضی پارامترهای مدل رگرسیونی

برای بررسی خواص برآوردکننده‌های رگرسیونی چندگانهٔ انقباضی، مجدداً مدل دوسطحی با ساختار خطی (۳.۱) را در نظر بگیرید. نمایش ماتریسی این مدل به‌صورت

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \tag{۱.۳}$$

است، که در آن $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)^T$، $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p)^T$ و $\mathbf{X}$ ماتریس متغیرهای رگرسیونی است.

برای برآورد پارامترهای $\boldsymbol{\beta}$ در مدل رگرسیونی (۱.۳) کافی است یکی از برآوردهای (۱.۲)-(۳.۲) را در معادله (۱.۳) جای‌گذاری و سپس بردار پارامتر $\boldsymbol{\beta}$ را برآورد نمود. در صورت ثابت بودن p، برآورد موزون بردار پارامتر $\boldsymbol{\beta}$ به‌صورت

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{W}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tag{۲.۳}$$

به دست می‌آید که در آن ماتریس قطری $\mathbf{W}$ شامل وزن‌ها و به‌صورت $\mathbf{W} = diag\left(\frac{\hat{\lambda}+A_1}{\hat{\lambda}A_1}, \cdots, \frac{\hat{\lambda}+A_n}{\hat{\lambda}A_n}\right)$ داده می‌شود. به دلیل این که موضوع بحث این مقاله به بررسی خواص این نوع برآوردکننده‌ها اختصاص ندارد؛ لذا در اینجا از پرداختن به آن خودداری می‌کنیم.

فرض تُنُک بودن در مدل‌های رگرسیونی با ابعاد بزرگ به این معنی است که تعداد زیادی از متغیرهای مستقل رگرسیونی هیچ تأثیری بر متغیر پاسخ نداشته و به عبارتی ضرایب آنها برابر صفر است؛ بنابراین مدل رگرسیونی $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ تُنک است هرگاه داشته باشیم

$$card(\boldsymbol{\beta}) = \|\boldsymbol{\beta}\|_0 = s_0 \ll p.$$

فرض کنید می‌خواهیم بردار تُنک $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ را در مدل رگرسیون موزون (۱.۳) چنان بیابیم که

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\beta}} \in \arg\min_{\boldsymbol{\beta}} \|\boldsymbol{\beta}\|_1 \\ \mathbf{W}^{1/2}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{W}^{1/2}\mathbf{X}\hat{\beta} \end{cases} \tag{۳.۳}$$

که در آن رابطهٔ رگرسیونی $\mathbf{W}^{1/2}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{W}^{1/2}\mathbf{X}\hat{\beta}$ پس از اعمال وزن‌ها $\mathbf{W}^{1/2}$ از رابطهٔ $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ حاصل می‌شود.

همان‌طور که از رابطه (۳.۳) به دست می‌آید، یافتن $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ معادل حل یک مسئلهٔ خطی است که با الگوریتم‌های شناخته‌شده قابل انجام است.

به دلیل آنکه در مدل‌های رگرسیونی با ابعاد بزرگ، ماتریس رگرسیونی $\mathbf{X}_{n\times p}$ پررتبه ستونی نیست؛ لذا شرط وجود جواب آن است که $\mathbf{W}^{1/2}\mathbf{X}$ در خاصیت فضای صفر مقید (RN) صدق کند. این فضا به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۳. برای $S \subset \{1, 2, \ldots, p\}$، ماتریس $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ نسبت به S در خاصیت فضای صفر مقید صدق می‌کند هرگاه داشته باشیم

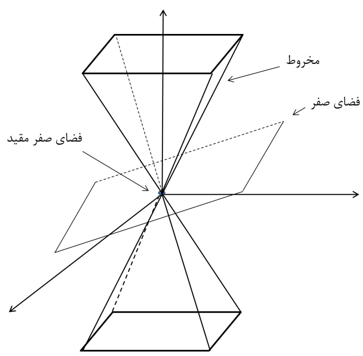
$$RN(S) = \left\{\boldsymbol{\Delta} \in \mathbb{R}^p \middle| \mathbf{Z}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{0}\right\} \cap \left\{\boldsymbol{\Delta} \in \mathbb{R}^{\mathbf{p}} \middle| \|\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{S^c}}\|_{\mathbf{1}} \leq \|\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{S}}\|_{\mathbf{1}}\right\} = \left\{\mathbf{0}\right\}.$$

مجموعهٔ $\left\{\boldsymbol{\Delta} \in \mathbb{R}^p \middle| \mathbf{Z}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{0}\right\}$ را با $N(\mathbf{Z})$ و مجموعهٔ $\left\{\boldsymbol{\Delta} \in \mathbb{R}^p \middle| \|\boldsymbol{\Delta}_{S^c}\|_1 \leq \|\boldsymbol{\Delta}_S\|_1\right\}$ را با $C(S)$ نمایش می‌دهیم و به آن مجموعهٔ مخروطی گوییم. یادآوری می‌کنیم که S^c مجموعهٔ متمم مجموعهٔ S است. لازم به توضیح است که از لحاظ هندسی یک مجموعهٔ مخروطی در فضای سه‌بعدی دارای نمایش هندسی

$$C(S) = \left\{(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)' \in \mathbb{R}^3 \middle| |\Delta_1| + |\Delta_2| \leq |\Delta_3|\right\}$$

است که مطابق نمودار (۱)، $RN(S)$ در واقع اشتراک مجموعهٔ مخروطی با صفحه $N(\mathbf{Z})$ است که از مبدأ مختصات می‌گذرد. با توجه به این تعریف، برای (۳.۳) گزارهٔ زیر برقرار است:

گزاره ۲.۳. برآورد $\hat{\beta}$ که با رابطه (۳.۳) داده می‌شود جواب یکتا در بین تمام بردارهای تُنک با بُعد $|S| = s_0$ خواهد بود هرگاه داشته باشیم $\mathbf{W}^{1/2}\mathbf{X} \in RN(S)$.



شکل ۱: نمودار مخروط و فضای صفر در فضای سه‌بعدی

اثبات. برای مدل رگرسیون موزون (۳.۳) فرض کنید β^* مقدار واقعی و $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ برداری است که از رابطه (۳.۳) به دست می‌آید. حال تعریف می‌کنیم

$$\hat{\boldsymbol{\Delta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}^* \tag{۴.۳}$$

در این صورت داریم

$$\mathbf{W}^{۱/۲}\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\Delta}} = \mathbf{W}^{۱/۲}\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}^*) = \mathbf{W}^{۱/۲}\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{W}^{۱/۲}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^* = \mathbf{0},$$

که نشان می‌دهد $\hat{\boldsymbol{\Delta}} \in N(\mathbf{W}^{۱/۲}\mathbf{X})$. برای اینکه نشان دهیم $\hat{\boldsymbol{\Delta}} \in C(S)$، از شرط تُنک بودن بردار $\boldsymbol{\beta}^*$ و رابطه (۳.۳) داریم

$$\|\hat{\boldsymbol{\beta}}\|_۱ \leq \|\boldsymbol{\beta}^*\|_۱ = \|\boldsymbol{\beta}^*_S\|_۱. \tag{۵.۳}$$

در اینجا دقت داریم که بردار تُنک $\boldsymbol{\beta}^*$ دارای $s_۰$ عضو غیرصفر و $p - s_۰$ عضو صفر است. همچنین $\boldsymbol{\beta}^*_S$ شامل همهٔ مؤلفه‌های غیرصفر بردار $\boldsymbol{\beta}^*$ است. در نتیجه از رابطه (۵.۳) داریم

$$\|\hat{\boldsymbol{\beta}}\|_۱ = \|\boldsymbol{\beta}^* + \hat{\boldsymbol{\Delta}}\|_۱ = \|\boldsymbol{\beta}^*_S + \hat{\boldsymbol{\Delta}}_S\|_۱ + \|\hat{\boldsymbol{\Delta}}_{S^c}\|_۱. \tag{۶.۳}$$

علاوه‌بر این از خاصیت مثلثی نرم‌ها داریم

$$\|\boldsymbol{\beta}^*_S + \hat{\boldsymbol{\Delta}}_S\|_۱ + \|\hat{\boldsymbol{\Delta}}_{S^c}\|_۱ \geq \|\boldsymbol{\beta}^*_S\|_۱ - \|\hat{\boldsymbol{\Delta}}_S\|_۱ + \|\hat{\boldsymbol{\Delta}}_{S^c}\|_۱, \tag{۷.۳}$$

و در نتیجه از روابط (۵.۳)-(۷.۳) خواهیم داشت $\|\hat{\boldsymbol{\Delta}}_{S^c}\|_۱ \leq \|\hat{\boldsymbol{\Delta}}_S\|_۱$ که نتیجه می‌دهد $\hat{\boldsymbol{\Delta}} \in C(S)$.
بنابر نتایج فوق داریم

$$\hat{\boldsymbol{\Delta}} \in N(\mathbf{W}^{۱/۲}\mathbf{X}) \cap C(S) \Longrightarrow \hat{\boldsymbol{\Delta}} = ۰ \Longrightarrow \hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}^*.$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که الگوریتم تکراری (۳.۳) همواره منجر به جواب دقیق رگرسیون بدون خطای $\mathbf{W}^{۱/۲}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{W}^{۱/۲}\mathbf{X}\hat{\beta}$ تحت تابع جریمه با نرم $L_۱$ می‌شود، بولمن (۲۰۱۳) و بولمن و وان دی‌گیر (۲۰۱۱).

□

همان‌طور که تاکنون گفته شده شرط وجود یکتایی جواب برای معادلهٔ رگرسیون بدون خطای (۳.۳) آن است که مجموعهٔ $RN(S)$ شامل تک عضو صفر باشد. در حالت کلی برای بررسی خاصیت RN در مدل رگرسیونی تُنک (۱.۳) روش مستقیم و بسیار کارآمد وجود دارد که بر گزارهٔ زیر استوار است:

گزاره ۳.۳. برای ماتریس گوسی یا زیرگوسی $\mathbf{W}^{1/2}\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ با سطرهای $i.i.d.$ و با ماتریس کوواریانس $\mathbf{\Sigma}$ که در آن $\kappa^2 = \max_j \mathbf{\Sigma}_{jj}$ و برای هر بردار غیرصفر $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^P$ داریم

$$\frac{\|\mathbf{W}^{1/2}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\|_2^2}{n} \geq c_1\|\mathbf{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{\beta}\|_2^2 - c_2\kappa^2\frac{\log\left(ep(\frac{\|\boldsymbol{\beta}\|_2^2}{\|\boldsymbol{\beta}\|_1^2})^2\right)}{n}\|\boldsymbol{\beta}\|_1^2 \tag{۸.۳}$$

که در آن c_1، c_2 و c_3 ثابت‌های حقیقی مقدار هستند و نامساوی فوق با احتمال حداقل $1 - 2e^{-c_3 n}$ برقرار است.

اثبات. براساس سکوتی و یوو (۲۰۱۰) و رودلسون و ژائوو (۲۰۱۲) اثبات واضح است. □

برای تحقیق در خصوص چگونگی استفاده از نامساوی (۸.۳) برای بررسی خاصیت RN، با فرض تُنک بودن بردار $\mathbf{\Delta}$ داریم

$$\mathbf{\Delta} \in C(S) = \left\{\mathbf{\Delta} \in \mathbb{R}^p;\ \|\mathbf{\Delta}_{S^c}\|_1 \leq \|\mathbf{\Delta}_S\|_1\right\}.$$

برای یافتن شرطی که بتواند خاصیت $\hat{\mathbf{\Delta}} \in N(\mathbf{W}^{1/2}\mathbf{X})$ را تضمین کند از تساوی $\|\mathbf{\Delta}\|_1 = \|\mathbf{\Delta}_{S^c}\|_1 + \|\mathbf{\Delta}_S\|_1$، خاصیت تُنک بودن بردار پارامترهای مدل رگرسیونی و نامساوی کشی-شوارتز داریم

$$\|\mathbf{\Delta}\|_1 \leq 2\|\mathbf{\Delta}_S\|_1 \leq 2\sqrt{s_0}\|\mathbf{\Delta}\|_2. \tag{۹.۳}$$

همچنین داریم

$$\|\mathbf{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{\beta}\|_2^2 = \boldsymbol{\beta}^T\mathbf{\Sigma}\boldsymbol{\beta} \geq \lambda_{\min}(\mathbf{\Sigma})\|\boldsymbol{\beta}\|_2^2,$$

که در آن $\lambda_{\min}(\mathbf{\Sigma})$ کوچک‌ترین مقدارویژهٔ ماتریس $\mathbf{\Sigma}$ است. اکنون با استفاده از نامساوی‌های (۸.۳) و (۹.۳) و شرط $c_1 = c_2 = c$ می‌توان نتیجه گرفت

$$\frac{\|\mathbf{W}^{1/2}\mathbf{X}\mathbf{\Delta}\|_2^2}{n} \geq c\left(\lambda_{\min}(\mathbf{\Sigma})\|\mathbf{\Delta}\|_2^2 - 4\kappa^2\frac{s_0\log p}{n}\|\mathbf{\Delta}\|_2^2\right) \geq c\|\mathbf{\Delta}\|_2^2\left(\lambda_{\min}(\mathbf{\Sigma}) - 4\kappa^2\frac{s_0\log p}{n}\right).$$

با تعریف $\gamma = c\big(\lambda_{\min}(\Sigma) - 4\kappa^2\frac{s_0\log p}{n}\big)$، نامساوی بالا به‌صورت زیر خواهد بود

$$\frac{\|\mathbf{W}^{1/2}\mathbf{X}\mathbf{\Delta}\|_2^2}{n} \geq \gamma\|\mathbf{\Delta}\|_2^2 \tag{۱۰.۳}$$

براساس رابطه (۱۰.۳)، برای ثابت مثبت c، مقدارویژهٔ مقید (RE) با شرط $n > cs_0\log p$ به دست می‌آید.

اکنون با استفاده از رابطه (۱۰.۳) می‌توان دقت برآوردکنندهٔ $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ برای مقدار واقعی $\boldsymbol{\beta}^*$، که با رابطهٔ

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^P}\left\{\frac{1}{2n}\|\mathbf{W}^{1/2}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})\|_2^2 + \lambda\|\boldsymbol{\beta}\|_1\right\} \tag{۱۱.۳}$$

داده می‌شود را ارزیابی نمود.

قضیه ۴.۳. برای نمونهٔ به اندازهٔ کافی بزرگ، برآوردکنندهٔ $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ که با رابطه (۱۱.۳) به دست می‌آید تحت بعضی شرایط برای عناصر ماتریس $\mathbf{X}$ در L_2 به مقدار واقعی $\boldsymbol{\beta}^*$ همگراست و داریم

$$\|\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}^*\|_2 \leq \frac{4}{\gamma}\sqrt{\max_j\left\{\frac{\lambda + A_j}{\lambda A_j}\right\}\frac{s_0\ln p}{n}}.$$

اثبات. طبق رابطه (۱۱.۳) داریم

$$\frac{1}{2n}\|\mathbf{W}^{1/2}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})\|_2^2 \leq \frac{1}{2n}\|\mathbf{W}^{1/2}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*)\|_2^2.$$

با تعریف $\hat{\boldsymbol{\Delta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}^*$ و ساده کردن عبارت بالا، نامساوی زیر به دست می‌آید

$$\frac{۱}{n}\|\mathbf{W}^{۱/۲}\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\Delta}}\|_۲^۲ \leq \frac{۲}{n}\langle \hat{\boldsymbol{\Delta}}, (\mathbf{W}\mathbf{X})^{\mathbf{T}}\mathbf{U}\rangle$$

که در آن $\mathbf{U} = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$.

اکنون از رابطه (۱۰.۳) و استفاده از نامساوی هلدر داریم

$$\gamma\|\hat{\boldsymbol{\Delta}}\|_۲^۲ \leq \frac{۱}{n}\|\mathbf{W}^{۱/۲}\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\Delta}}\|_۲^۲ \leq \frac{۲}{n}\langle \hat{\boldsymbol{\Delta}}, (\mathbf{W}\mathbf{X})^{\mathbf{T}}\mathbf{U}\rangle \leq ۲\|\hat{\boldsymbol{\Delta}}\|_۱\left\|\frac{(\mathbf{W}\mathbf{X})^{\mathbf{T}}\mathbf{U}}{n}\right\|_\infty .$$

حال اگر در نامساوی بالا از $\|\hat{\boldsymbol{\Delta}}\|_۱ \leq ۲\sqrt{s_۰}\|\hat{\boldsymbol{\Delta}}\|_۲$، که از نامساوی کشی به دست می‌آید، استفاده کنیم خواهیم داشت

$$\gamma\|\hat{\boldsymbol{\Delta}}\|_۲^۲ \leq ۴\sqrt{s_o}\|\hat{\boldsymbol{\Delta}}\|_۲\left\|\frac{(\mathbf{W}\mathbf{X})^{\mathbf{T}}\mathbf{U}}{n}\right\|_\infty \Longrightarrow \gamma\|\hat{\boldsymbol{\Delta}}\|_۲ \leq ۴\sqrt{s_o}\left\|\frac{(\mathbf{W}\mathbf{X})^{\mathbf{T}}\mathbf{U}}{n}\right\|_\infty .$$

در نتیجه

$$\|\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}^*\|_۲ \leq \frac{۴}{\gamma}\sqrt{s_۰}\left\|\frac{(\mathbf{W}\mathbf{X})^{\mathbf{T}}\mathbf{U}}{n}\right\|_\infty \leq \frac{۴}{\gamma}\sqrt{s_۰}\max_j\left\{\frac{\lambda + A_j}{\lambda A_j}\right\}\left\|\frac{\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{U}}{n}\right\|_\infty .$$

بنابراین، با قبول بعضی فرضیات برای جملات ماتریس $\mathbf{X}$، همگرایی برآوردکنندهٔ $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ را در $L_۲$ می‌توان تضمین نمود. به‌عنوان مثال اگر عناصر ماتریس $\mathbf{X}$ دارای توزیع نرمال استاندارد باشند و داشته باشیم $\|\mathbf{U}\|_۲ \leq \sqrt{n \max_j\{\frac{\lambda A_j}{\lambda + A_j}\}}$، در این صورت داریم

$$\left\|\frac{\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{U}}{n}\right\|_\infty \leq \sqrt{\max_j\left\{\frac{\lambda A_j}{\lambda + A_j}\right\}\frac{\ln p}{n}},$$

و در نتیجه داریم

$$\|\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}^*\|_۲ \leq \frac{۴}{\gamma}\sqrt{\max_j\left\{\frac{\lambda + A_j}{\lambda A_j}\right\}\frac{s_۰ \ln p}{n}}.$$

□

References

[1] Baranchik, A.J. (1970). A Family of Minimax Estimators of the Mean of a Multivariate Normal Distribution. *Ann. Math. Statist*, 41, 642–645. DOI: https://doi.org/10.1214/aoms/1177697104.

[2] Berger, J. (1976). Admissible Minimax Estimation of a Multivariate Normal Mean With Arbitrary Quadratic Loss. *The Annals of Statistics*, 4, 223–226. DOI: https://doi.org/10.1214/aos/1176343356.

[3] Berger, J., & Strawderman, W.E. (1996). Choice of Hierarchical Priors:Admissibility in Estimation of Normal Means. *The Annals of Statistics*, 24, 931–951. DOI: https://doi.org/10.1214/aos/1032526950.

[4] Brown, L.D. (1971). Admissible Estimators, Recurrent Diffusions, and Insoluble Boundary Value Problems. *Ann. Math. Statist*, 42, 855–903. DOI: https://doi.org/10.1214/aoms/1177693318.

[5] Buhlmann, P. (2013). Statistical significance in high-dimensional linear models. *Bernoulli*, 19, 1212–1242. DOI: https://doi.org/10.3150/12-BEJSP11.

[6] Buhlmann, P., & van de Geer, S. (2011). Statistics for high-dimensional data. *Springer-Verlag*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-20192-9.

[7] Cai, T.T., & Zijian, Guo. (2016). Accuracy assessment for high-dimensional linear regression. *arXiv preprint arXiv: 1603.03474*. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1603.03474.

[8] Efron, B., & Morris, C. (1973). Stein's Estimation Rule and Its Competitors: An Empirical Bayes Approach. *J. Amer. Statist. Assoc*, 68, 117–130. DOI: https://doi.org/10.2307/2284155.

[9] Ghoreishi, S.K., & Meshkani, M.R. (2014). On SURE estimators in hierarchical models assuming heteroscedasticity for both levels of a two-level normal hierarchical model. *J. of Multivariate Analysis*, 132, 129–137. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmva.2014.08.001.

[10] James, W., & Stein, C.M. (1961). Estimation With Quadratic Loss. *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Probability and Statistics*, 1, 367–379. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0919-5_30.

[11] Morris, C. (1983). Parametric Empirical Bayes Inference: Theory and Applications. *J. Amer. Statist. Assoc*, 78, 47–55. DOI: https://doi.org/10.2307/2287098.

[12] Shanita, V., & Ghoreishi, S.K. (2020). Empirical Estimation for Sparse Double-Heteroscedastic Hierarchical Normal Models. *Journal of Statistical Theory and Applications*, 19, 148–161. DOI: https://doi.org/10.2991/jsta.d.200422.001.

[13] Stein, C.M. (1962). Confidence Sets for the Mean of a Multivariate Normal Distribution (with discussion). *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 24, 265–296. DOI: https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1962.tb00458.x.

[14] Xie, X., Kou, S.C., & Brown, L.D. (2012). SURE Estimates for a Heteroscedastic Hierarchical Model. *J. Amer. Statist. Assoc*, 107, 1465–1479. DOI: https://doi.org/10.1080/01621459.2012.728154.

[15] Xie, X., Kou, S.C., & Brown, L.D. (2016). Optimal shrinkage estimation of mean parameters in family of distributions with quadratic variance. *The Annals of Statistics*, 44, 564–597. DOI: https://doi.org/10.1214/15-AOS1377.

Measure Algebras and Applications

The amenability of the universal groupoids of a Clifford semigroup

Mahmoud Kazemi Hokmabad[1], **Mahmood Pourgholamhossein**[2]

1. Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran.
   Email: makazemi2006@yahoo.com
2. Corresponding Author, Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran.
   Email: m-purghol@qom.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 28 May 2023
Received in revised form:
24 August 2023
Accepted: 26 August 2023
Published Online:
30 September 2023

Keywords:
Amenability,
Universal groupoid,
Clifford semigroup,
Inverse semigroup

2020 Mathematics Subject Classification:
43A20, 46H25

ABSTRACT

We show that there is a one-to-one correspondence (up to isomorphism) between maximal subgroups of a Clifford semigroup and isotropy subgroups of its universal groupoid. We prove that a Clifford semigroup is a union of amenable subgroups if and only if its universal groupoid is amenable. We give an example of an amenable Clifford semigroup that its universal groupoid is not amenable.

Cite this article: Pourgholamhossein, M., & Kazemi Hokmabad, M. (2023). The amenability of the universal groupoids of a Clifford semigroup. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 107–118. http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9500.1006

Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/MAA.2023.9500.1006

Extended Abstract

Introduction

First studied by Brandt in 1927, groupoids have a central role in Mathematics and Mathematical Physics. In Algebraic Geometry, Grothendieck used groupoids to investigate moduli spaces, and in Crystallography, they are used to study microscopic symmetry via screw operators [5]. On the other hand, inverse semigroups were first explicitly defined by Wagner in 1952 and independently by Preston in 1954. They had a role in Klein's Erlangen program and Lie's theory of infinite continuous groups. These two notions are related; to a groupoid, one may associate its ample semigroup [6] and each inverse semigroup has a universal groupoid [5]. However, the relation between the structure and properties of these objects is not well studied. Paterson in [5] suggests that the amenability of an inverse semigroup should be related to the amenability of the maximal subgroups of the inverse semigroup. This seems to be a necessary condition but certainly is not sufficient (consider the free inverse semigroup on two generators). In this paper, we solve this problem for Clifford semigroups by showing that a Clifford semigroup is a union of amenable groups if and only if its universal groupoid is amenable. We also give a correspondence between the isotropy groups of the universal groupoid and subgroups of the maximal group homomorphic image of the Clifford semigroup.

Conclusion

The main results of this paper are:

***Theorem* 0.1.** *Let S be a Clifford semigroup, G_S and $G = G(X,S)$ be its maximal group homomorphic image and universal groupoid, respectively. Then G is the union of its isotropy groups which could be identified with subgroups of G_S.*

***Theorem* 0.2.** *Let S be an amenable Clifford semigroup and $S = \cup_{e\in E} H_e$. Then $T = \cup_{e\leq e_0} H_e$ is an amenable Clifford subsemigroup of S for each $e_0 \in E$. Also $H_e H_{e_0} = H_e$ and $H_e H_f \subseteq H_{ef}$.*

***Theorem* 0.3.** *Let S be an amenable Clifford semigroup and $S = \cup_{e\in E} H_e$. Then for every $e \in E$, $H_e \cong H_{\overline{e}}$.*

***Theorem* 0.4.** *Let $S = \bigcup_{e\in E} H_e$ be a Clifford semigroup such that for each $e \in E$, H_e is amenable, then its universal groupoid $G = G(X,S)$ is amenable.*

***Theorem* 0.5.** *Let $S = \bigcup_{e\in E} H_e$ be a Clifford semigroup whose universal groupoid G is amenable. Then each group H_e is amenable.*

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۱۱۸-۱۰۷

میانگین‌پذیری گروه‌واره‌های جهانی یک نیم‌گروه کلیفورد

محمود کاظمی حکم‌آباد [۱] ، **محمود پورغلامحسین** [۲] ✉

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: makazemi2006@yahoo.com
۲. نویسندهٔ مسئول،گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: m-purghol@qom.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۳/۷
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۶/۲
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۶/۴
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
میانگین‌پذیری،
گروه‌وارهٔ جهانی،
نیم‌گروه کلیفورد،
نیم‌گروه وارون

رده‌بندی ریاضی:
43A20, 46H25

چکیده

در این مقاله، نشان می‌دهیم که بین زیرگروه‌های ماکسیمال از یک نیم‌گروه کلیفورد و زیرگروه‌های ایزوتروپی از گروه‌وارهٔ جهانی آن، یک تناظر یک‌به‌یک (با تقریب یکریختی) موجود است. همچنین ثابت می‌کنیم یک نیم‌گروه کلیفورد به‌صورت اجتماعی از زیرگروه‌های میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر گروه‌وارهٔ جهانی آن میانگین‌پذیر باشد. در خاتمه، مثالی از یک نیم‌گروه میانگین‌پذیر کلیفورد می‌آوریم که گروه‌وارهٔ جهانی آن میانگین‌پذیر نیست.

استناد: کاظمی حکم‌آباد، محمود.، پورغلامحسین، محمود. (۱۴۰۲). میانگین‌پذیری گروه‌واره‌های جهانی یک نیم‌گروه کلیفورد. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۱۱۸-۱۰۷.

http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9500.1006

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

در سال ۱۹۲۷ میلادی برای اولین بار، گروه‌واره‌ها توسط برندت مطالعه گردیدند که معلوم شد این ساختار نقش به‌سزایی در ریاضیات و فیزیک دارد. سپس گروه‌واره‌ها توسط گروتندیک در هندسهٔ جبری مورد استفاده قرار گرفتند. ازسوی‌دیگر، نیم‌گروه‌های وارون نخستین بار به‌صراحت و مستقلاً توسط واگنر در سال ۱۹۵۲ و پرستون در سال ۱۹۵۴ تعریف شدند. نیم‌گروه‌های وارون در برنامهٔ ارلانگن کلاین و نظریهٔ گروه‌های پیوستهٔ نامتناهی لی نقش دارند. اگرچه رابطهٔ بین ساختار و ویژگی‌های این اشیا به‌خوبی مطالعه نشده‌اند، پترسون در [۵] این مطلب را مطرح کرد که میانگین‌پذیری نیم‌گروه‌های وارون با میانگین‌پذیری زیرگروه‌های ماکسیمال نیم‌گروه‌های وارون مرتبط است. به نظر می‌رسد این یک شرط لازم است؛ اما مسلماً یک شرط کافی نیست (نیم‌گروه وارون آزاد روی دو مولد را در نظر بگیرید). در این مقاله، این مسئله را برای نیم‌گروه کلیفورد با نشان دادن اینکه یک نیم‌گروه کلیفورد برابر اجتماعی از گروه‌های میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر گروه‌وارهٔ جهانی آن میانگین‌پذیر باشد حل می‌کنیم. همچنین یک تناظر بین گروه‌های ایزوتروپ گروه‌وارهٔ جهانی و زیرگروه‌های ماکسیمال تصویر همریخت نیم‌گروه کلیفورد ارائه می‌دهیم. در بخش ۲ تعاریف و ویژگی‌های بنیادی نیم‌گروه‌های کلیفورد و گروه‌واره‌های جهانی را ارائه می‌دهیم و مفهوم میانگین‌پذیری این ساختارها را مرور می‌کنیم. بخش ۳ شامل نتایج بنیادی و اثبات‌های آنها است.

۲ مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۲. نیم‌گروه (گسسته) S را نیم‌گروه وارون می‌نامیم اگر برای هر $s \in S$ یک عضو منحصربه‌فرد مانند $s^* \in S$ موجود باشد، به‌طوری‌که

$$s\, s^*\, s = s \quad , \quad s^*\, ss^* = s^*.$$

نیم‌گروه وارون S را نیم‌گروه کلیفورد می‌نامیم هرگاه به‌صورت اجتماعی از گروه‌ها باشد.

فرض کنیم S یک نیم‌گروه وارون باشد و E مجموعهٔ متشکل از تمام عناصر خودتوان آن باشد، یعنی

$$\mathrm{E} = \mathrm{E(S)} := \{\, \mathrm{e} \in \mathrm{S} : \mathrm{ee} = \mathrm{e}\, \}.$$

در این صورت S یک گروه است اگر و فقط اگر E تک‌عضوی باشد، همچنین S یک نیم‌گروه کلیفورد است اگر و فقط اگر E زیرمجموعهٔ مرکز S باشد. در این حالت، داریم $S = \bigcup_{e\in E} H(e)$ که در آن $H(e)$ یک زیرگروه ماکسیمال S با عنصر همانی e است. زیرنیم‌گروه A از E را فیلتر می‌نامیم هرگاه برای $a \in A\ ,\ b \in E$ رابطهٔ $a \leq b$ نتیجه بدهد $b \in A$.

تعریف ۲.۲. مجموعهٔ ناتهی G به‌همراه یک زیرمجموعهٔ $G^{(۲)}$ از $G \times G$ و یک نگاشت ضرب $(x,y) \longmapsto xy$ از $G^{(۲)}$ به G و یک نگاشت وارون $x \longmapsto x^{-۱}$ از G به روی G را یک گروه‌واره می‌گوییم هرگاه برای هر $x,y,z \in G$ داشته باشیم:

۱. $(x^{-۱})^{-۱} = x$،

۲. اگر $(x,y),(y,z) \in G^{(۲)}$، آنگاه $(xy,z),(x,yz) \in G^{(۲)}$ و $(xy)z = x(yz)$.

۳. $(x,x^{-۱})\ ,\ (x^{-۱},x) \in G^{(۲)}$.

۴. اگر $(x,y) \in G^{(۲)}$، آنگاه $x^{-۱}\,(xy) = y = (yx)\,x^{-۱}$.

برای گروه‌وارهٔ G، نگاشت‌های d و r را به‌ترتیب دامنه و برد می‌نامیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d : G \to G;\ d(x) = x^{-۱}\,x \quad , \quad r : G \to G;\ r(x) = xx^{-۱}\,.$$

مجموعهٔ $G^{(\circ)} := d(G) = r(G)$ را فضای یکهٔ G می‌گوییم و برای هر $u,v \in G^{(\circ)}$ نیز داریم:

$$G^u := r^{-۱}(\{u\}) \quad , \quad G_v := d^{-۱}(\{v\}) \quad , \quad G_v^u := G^u \cap G_v.$$

همچنین G_u^u یک گروه است که آن را گروه ایزوتروپی می‌نامند. گروه‌وارهٔ توپولوژیک عبارت است از یک گروه‌وارهٔ مجهز به یک توپولوژی که نگاشت‌های ضرب و وارون پیوسته باشند. خانوادهٔ $\{\lambda^u\}_{u\in G^{(\circ)}}$ از اندازه‌های منظم بورل مثبت روی گروه‌وارهٔ توپولوژیک G را دستگاه هار چپ می‌نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(الف) برای هر $u \in G^{(\circ)}$ داشته باشیم $supp(\lambda^u) \subseteq G^u$،

(ب) برای هر $f \in C_c(G)$ نگاشت $u \mapsto \int f d\lambda^u$ روی $G^{(\circ)}$ پیوسته باشد،

(پ) برای هر $x \in G$ و $f \in C_c(G)$ داشته باشیم:

$$\int f(xy)d\lambda^{d(x)}(y) = \int f(y)d\lambda^{r(x)}(y).$$

یک گروه‌وارهٔ فشردهٔ موضعی عبارت است از یک گروه‌وارهٔ توپولوژیک که در شرایط زیر صدق کند:

(۵) با توپولوژی القایی $G^{(\circ)}$ فشردهٔ موضعی و هاوسدورف باشد،

(۶) خانوادهٔ شمارایی مانند $\mathfrak{C}$ متشکل از زیرمجموعه‌های هاوسدورف فشردهٔ G، موجود باشد به‌طوری‌که مجموعهٔ درون آنها، یک پایهٔ توپولوژی برای G باشد ($B = \{intA : A \in \mathfrak{C}\}$)،

(۷) هر G^u یک زیرفضای هاوسدورف فشردهٔ موضعی از G باشد،

(۸) G مجهز به یک دستگاه هار مانند $\{\lambda^u\}$ باشد.

فرض کنیم G یک گروه‌وارهٔ فشردهٔ موضعی باشد. در این صورت، خانوادهٔ تمام زیرمجموعه‌های باز و هاوسدورف آن را که نگاشت‌های دامنه و برد روی آنها همان‌سانی باشند را با G^{op} نمایش می‌دهیم. گروه‌وارهٔ G را $r-$گسسته می‌گوییم هرگاه G^{op} یک پایه برای توپولوژی G باشد.

فرض کنیم S یک نیم‌گروه گسسته باشد. در این صورت، مجموعهٔ تمام توابع مختلط روی آن که در شرط $\sum_{s \in S} |f(s)| < \infty$ صدق می‌کنند را با $l^1(S)$ و مجموعهٔ تمام توابع مختلط روی آن که در شرط $sup_{s \in S}|f(s)| < \infty$ صدق می‌کنند را با $l^\infty(S)$ نمایش می‌دهیم، آنها به‌ترتیب با نرم‌های $||f||_1 := \sum_{s \in S} |f(s)|$ و $||f||_\infty := sup_{s \in S}|f(s)|$ یک فضای باناخ هستند و به‌ترتیب تحت ضرب پیچشی و ضرب نقطه‌ای، جبر باناخ هستند. با ایزومتری $T(f)(g) = \sum_{s \in S} f(s)g(s)$ داریم:

$$l^\infty(S) \cong (l^1(S))^*.$$

برای تابع مختلط f روی S، انتقال چپ توسط $s \in S$ را به‌صورت $L_s(f)(t) = f(st)$ تعریف می‌کنیم، که در آن $t \in S$، انتقال راست نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود. یک میانگین μ روی $l^\infty(S)$ عنصری از $(l^\infty(S))^*$ هست به‌طوری‌که برای هر تابع حقیقی $f \in l^\infty(S)$ داریم:

$$inf_s(f(s)) \leq \mu(f) \leq sup_s(f(s)).$$

میانگین μ را پایای چپ می‌نامیم هرگاه برای هر $s \in S$ و $f \in l^\infty(S)$ داشته باشیم:

$$\mu(L_s f) = \mu(f).$$

میانگین پایای راست نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود. هر میانگین روی $l^\infty(S)$ مانند μ مثبت است و در دو شرط $\mu(1) = 1$, $|\mu| = 1$ صدق می‌کند، همچنین برای هر $f \in l^\infty(S)$ داریم:

$$\mu(Re(f)) = Re(\mu(f)) \quad , \quad \mu(Im(f)) = Im(\mu(f))$$

به‌علاوه $\mu(f)$ در پوستهٔ محدب بسته از $f(S)$ قرار دارد.

فرض کنیم S یک نیم‌گروه و $\vartheta \in l^1(S)$. در این صورت ϑ را یک میانگین شمارا روی S می‌نامیم هرگاه برای هر s داشته باشیم $\vartheta(s) \geq 0$ و $|\vartheta| = \sum_{s\in S} \vartheta(s) = 1$. همچنین آن را یک میانگین متناهی روی S می‌نامیم هرگاه مجموعهٔ $\{s \in S : \vartheta(s) > 0\}$ متناهی باشد. مجموعهٔ میانگین‌های متناهی (-نرم) در مجموعهٔ میانگین‌های شمارا چگال است. به‌علاوه، مجموعهٔ میانگین‌های متناهی (w^*-) در مجموعهٔ تمام میانگین‌ها روی $l^\infty(S)$ چگال است.

تعریف ۳.۲. نیم‌گروه S را میانگین‌پذیر چپ می‌نامیم هرگاه یک میانگین پایای چپ موجود باشد. میانگین‌پذیر راست به‌طور مشابه تعریف می‌شود. نیم‌گروه S را میانگین‌پذیر می‌نامیم هرگاه، میانگین‌پذیر چپ و میانگین‌پذیر راست باشد.

اگر S یک نیم‌گروه میانگین‌پذیر باشد و $\varphi : S \to S'$ یک همریختی نیم‌گروه‌ها باشد، آنگاه $\varphi(S)$ نیز میانگین‌پذیر است.

قضیه ۴.۲. [۲] نیم‌گروه S میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر دنباله‌ای مانند $\{g_n\}$ از میانگین‌های متناهی موجود باشد که برای هر $t \in S$ داشته باشیم $lim_n(L_t g_n - g_n) = \circ = lim_n(R_t g_n - g_n)$ در توپولوژی ضعیف (یا توپولوژی نرم) از $l^{1}(S)$.

فرض کنیم S یک نیم‌گروه وارون باشد رابطهٔ هم‌ارزی σ_S طوری تعریف شده است که برای $s, t \in S$ داریم $s\, \sigma_S\, t$ هرگاه عنصر خودتوانی مانند $e \in E(S)$ موجود باشد که $es = et$، در این صورت $G_S := S / \sigma_S$ یک گروه است. این گروه ماکسیمالی است که از تصویر همریختی S به دست می‌آید.

از [۵] یادآوری می‌کنیم که S میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر G_S میانگین‌پذیر باشد. در خاتمهٔ این بخش، معیارهایی را برای میانگین‌پذیری گروه‌وارهٔ شمارای دوم $r-$گسسته یادآوری می‌کنیم.

قضیه ۵.۲. [۳] فرض کنیم G یک گروه‌وارهٔ شمارای دوم $r-$گسسته باشد. در این صورت، گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱. دنباله‌ای از توابع بورل روی G مانند $\{\varphi_n\}$ موجود است که

(الف) تابع $u \mapsto \sum_{r(x)=u} |\varphi_n(x)|$ کران‌دار است،

(ب) برای هر $u \in G_\circ$ و $n \in \mathbb{N}$ داریم $\sum_{r(x)=u} |\varphi_n(x)| = 1$،

(ج) برای هر $y \in G$ دنبالهٔ $\sum_{r(x)=r(y)} |\varphi_n(y^{-1}x) - \varphi_n(x)|$ همگرا به صفر است.

۲. دنباله‌ای از توابع بورل روی G مانند $\{\psi_n\}$ موجود است که

(الف) تابع $u \mapsto \sum_{d(x)=u} |\psi_n(x)|$ کران‌دار است،

(ب) برای هر $u \in G_\circ$ و $n \in \mathbb{N}$ داریم $\sum_{d(x)=u} |\psi_n(x)| = 1$،

(ج) برای هر $y \in G$ دنبالهٔ $\sum_{d(x)=d(y)} |\psi_n(xy^{-1}) - \psi_n(x)|$ همگرا به صفر است.

گروه‌وارهٔ شمارای دوم $r-$گسسته G را میانگین‌پذیر می‌نامیم اگر در هرکدام از شرایط فوق صدق کند.

۳ گروه‌وارهٔ جهانی نیم‌گروه کلیفورد

در این بخش، S یک نیم‌گروه کلیفورد با مجموعهٔ خودتوان $E{=}E(S)$ است. مجموعهٔ

$$X = \{x \mid x = \chi_{\mathrm{A}} : E \to \{\circ, 1\}\}$$

که در آن χ_{A} یک همریختی ناصفر برای فیلتری چون A با توپولوژی همگرایی نقطه‌ای است را در نظر می‌گیریم. برای $e \in E$ و $A_e = \{f \in E : e \leq f\}$ از نماد $\overline{e} = \chi_{A_e}$ و $\overline{E} = \{\overline{e} : e \in E\}$ استفاده می‌کنیم که زیرمجموعهٔ چگالی در X است [۵]. فرض کنیم $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E$، $x \in X$ و برای $m \leq n$، داشته باشیم $x(e_i) = \circ$ برای $i = 1, 2, \ldots, m$ و $x(e_{m+1} \ldots e_n) = 1$ قرار می‌دهیم $e = e_{m+1} \ldots e_n$، در این صورت، یک عضو پایهٔ توپولوژی X به‌شکل زیر است:

$$\begin{aligned} D_{e, e_1, e_2, \ldots, e_m} &= \{x \in X : x(e) = 1,\ x(e_i) = \circ \quad (i = 1, 2, \ldots, m)\} \\ &= \{\chi_A : e \in A,\ e_i \notin A\}. \end{aligned}$$

اگر $D_e = \{x : x(e) = 1\}$، آنگاه $D_{e, e_1, e_2, \ldots, e_m} = D_e \cap D^c_{e_1} D^c_{e_2} \cap \cdots \cap D^c_{e_m}$ و $\overline{e} \in D_{e, e_1, e_2, \ldots, e_m}$.
سپس ملاحظه می‌کنیم که در حالت کلی یک عمل راست از S روی X وجود دارد. قرار می‌دهیم $D_s = D_{ss^*}$. چون S یک نیم‌گروه کلیفورد است و $ss^*, s^*s \in E$ پس با هر عضو S جابه‌جا می‌شود

$$\begin{aligned} s^*s &= (s^*ss^*)\, s = (s^*[ss^*])\, s \\ &= ([ss^*]\, s^*)\, s = ss^*s^*s \\ &= s\,(s^*[s^*s]) = s\,([s^*s]\, s^*) \\ &= s\,(s^*ss^*) = ss^* \end{aligned}$$

و $D_s = D_{s^*}$ یک زیرمجموعهٔ باز فشرده از X است. خانوادهٔ $\{D_e \ : e \in E\} \cup \{ D_e^c : e \in E\}$ یک زیرپایه برای توپولوژی X است. فرض کنیم $x.s(e) := x(ses^*)$ و عمل

$$\beta \ : S \ \to \ I(X)$$

$$\beta\,(s) \ : D_e \mapsto \ R_s = D_{s^*} = D_s$$

$$\beta(s)(x) = x.s$$

را در نظر می‌گیریم. در این صورت β یک پادهمومورفیسم است و هر $\beta(\mathrm{s})$ یک همریختی است. در واقع، نگاشت β به هر عضو s از نیم‌گروه، یک همریختی نسبت می‌دهد که عملکرد آن همریختی در ارتباط با s است؛ یعنی هر عضو X را s برابر می‌کند.

اکنون قرار می‌دهیم:

$$\Sigma = \{(x, s) \ : x \in D_s \ , \ s \in S \}$$

مجموعهٔ β زوج‌های ترکیب‌پذیر Σ یعنی $\Sigma^{(۲)}$، از زوج‌هایی چون $((x,s),(y,t))$ تشکیل می‌شود که برای آنها $y = x.s$. برای تعریف گروه‌وارهٔ جهانی، یک رابطهٔ هم‌ارزی ρ روی Σ در نظر می‌گیریم. $(x,s)\ \rho\ (y,t)$ اگر و فقط اگر $x = y$ و یک $e \in E$ چنان موجود باشد که $e \leq ss^*tt^*,\ es = et$ و $x \in D_e$.

خانوادهٔ کلاس‌های هم‌ارزی $G = \Sigma/\rho = \{ \ [x,s] \ : \ s \in S, \ x \in D_s\}$ یک گروه‌واره با اعمال زیر است:

$$[x,s]\,[\,x.s,t] = [x,st]\,, \ [x,s]^{-۱} \ = [x.s, s^*\,]$$

و

$$r\,([x,s]) = [\,x, ss^*] \ , \ d([x,s]) = x.s, s^*s\,].$$

همچنین برای نمایش $G^{(\circ)} \ = \ \{ \ [x,e\,] : \mathrm{e}{\in}\mathrm{E} \ , \mathrm{x} \ \in \mathrm{X} \ \}$، می‌توانیم از تساوی $x \ = \ [x,e]$ استفاده کنیم، چون دلیل تساوی وجود رابطهٔ هم‌ارزی بین آنهاست یعنی برای هر $e_۱, e_۲ \in E$ با $x \in D_{e_۱e_۲}$ داریم $(x,e_۱)\ \rho(x,e_۲)$. بنابراین می‌توانیم قرار بدهیم $G^{(\circ)} \ = X$.

لم ۱.۳. با نمادگذاری‌های فوق، برای هر $x \in D_s$ و $s \in S$، داریم $x.s = x$.

اثبات. یادآوری می‌کنیم که x و $x.s$ همریختی‌هایی ناصفر روی E هستند (زیرا برای $ss^* \in E$ داریم $x(ss^*) = ۱$ و $x.s\,(ss^*\ ) = ۱$). از طرفی برای هر $e \in E$ داریم $x(e) \ = \ x.s(e)$ (چون اگر $e \ \leq \ ss^*$، آنگاه $e = ess^* \ = \ ses^*$ بنابراین $x.s\ (e) = x(ses^*) = x(e)$). اکنون فرض کنیم $e \in E$ یک عضو دلخواه باشد. چون $ess^* \ \leq \ ss^*$ بنابر حالت اول داریم، $x.s(ess^*) = \ x(ess^*)$، بنابراین

$$\begin{aligned} x.s(e) &= x.s(e)۱ = x.s(e)x.s(ss^*) \\ &= x.s(ess^*) = x(ess^*) \\ &= x(e)x(ss^*) = x(e)۱ \\ &= x(e), \end{aligned}$$

که برهان را کامل می‌کند. □

به‌خصوص، برای نیم‌گروه‌های کلیفورد، $\beta(s)\ (x) = x$ و $r\ [x,s] = d\ [x,s]$ و برای هر $x \in X, \ s \in S$، داریم $G^x = G_x$. بنابراین $G \ = \cup_{x \in X} H_x$ یک کلاف گروهی با گروه‌های ایزومتری

$$H_x := G_x^x = \{[x,s] : s \in S\ , \ x \leq ss^*\}$$

است. در اینجا $[x,s]$ مجموعهٔ تمام زوج‌های $(x,t\ )$ است که برای آنها یک $e \ \in \ E$ وجود دارد که $x(e) = ۱$، $e \leq ss^*\ tt^*$ و $et = es$.

قضیه ۲.۳. فرض کنیم S یک نیم‌گروه کلیفورد باشد و G_S و $G = G(X,S)$ به‌ترتیب تصویر همریخت گروه ماکسیمال و گروه‌وارهٔ جهانی آن باشد. در این صورت G اجتماع گروه‌های ایزوتروپی‌اش است که می‌تواند با زیرگروه‌های G_S یکی گرفته شود.

اثبات. قبلاً مشاهده کردیم که $G = \cup_{x\in X} H_x$. برای هر $x \in X$، نگاشت $\phi_x : H_x \to G_S$ را با ضابطهٔ $\phi_x([\,x\,,s\,]) = [s]$ تعریف می‌کنیم. این نگاشت خوش‌تعریف است، زیرا اگر $[x,s] = [x,t]$، آنگاه $e \in E$ چنان موجود است که $es = et$ و بنابراین $[t] = [s]$ در G_S است. همچنین داریم

$$\phi_x([x,s\,]\,[x,t\,]) = \phi_x\,([x,st\,]) = [st] = [s][t] = \phi_x\,([x,s\,])\,\phi_x\,([x,t\,]).$$

(در حالت کلی نگاشت ϕ_x یک‌به‌یک و پوشا نیست.) □

لم ۳.۳. برای هر $e \in E$، کلاس هم‌ارزی $[e]$ یک زیرنیم‌گروه از S است که شامل E است.

اثبات. اگر $f \in E$، آنگاه $(fe)\,f = (fe)\,e$ و $fe \in E$ پس $E \subseteq [e]$. همچنین اگر $s\,,\,t \in [e]$، آنگاه $f\,,g \in E$ وجود دارند که $gt = ge$ و $fs = fe$. چون $E \subseteq Z(S)$ و $(fg)\,st = (fs)\,(gt) = (fe)(ge) = (fg)e$ پس $st \in [e]$. □

قضیه ۴.۳. فرض کنیم S یک نیم‌گروه کلیفورد میانگین‌پذیر باشد و $S = \cup_{e\in E} H_e$. در این صورت برای هر $e_\circ \in E$ نیم‌گروه $T = \cup_{e\le e_\circ} H_e$ یک زیرنیم‌گروه کلیفورد میانگین‌پذیر از S است. همچنین داریم $H_e\,H_f \subseteq H_{ef}$ و $H_eH_{e_\circ} = H_e$.

اثبات. مجموعهٔ $T = \cup_{e\le e_\circ} H_e = \{\,s :\ ss^* \le e_\circ\}$ یک زیرنیم‌گروه از S است زیرا $s_1{s_1}^* \le e_\circ$ و $s_2{s_2}^* \le e_\circ$ نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}(s_1s_2)\,(s_1s_2)^*e_\circ &= s_1(s_2{s_2}^*)\,{s_1}^*\,e_\circ\\ &= s_1s_1^*(s_2{s_2}^*)e_\circ\\ &= s_1s_1^*(s_2{s_2}^*)\\ &= s_1(s_2{s_2}^*){s_1}^*\\ &= (s_1s_2)\,(s_1s_2)^*\end{aligned}$$

پس $(s_1s_2)\,(s_1s_2)^* \le e_\circ$ یعنی $s_1s_2 \in T$ و از طرفی $s_1{s_1}^* \le e_\circ$ پس ${s_1}^*({s_1}^*)^* = {s_1}^*s_1 = s_1{s_1}^* \le e_\circ$ پس ${s_1}^* \in T$. با توجه به این که تصویر همریخت گروه ماکسیمال G_T با $A = \{\,[s] \in G_S :\ ss^* \le e_\circ\,\}$ یک‌ریخت است که یک زیرگروه از گروه میانگین‌پذیر G_S با همانی $[e_\circ]$ است، هر کلاس هم‌ارزی در A شامل عضوی از T است. نگاشت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\varphi : A \to G_T\,,\quad \varphi([s]) = [e_\circ s].$$

این نگاشت خوش‌تعریف است؛ زیرا اگر $[s_2] = [s_1]$، آنگاه برای یک $f \in E(S)$، داریم $fs_1 = fs_2$. بنابراین $e_\circ fs_1 = e_\circ fs_2$ و $f\,e_\circ s_1 = fe_\circ s_2$ لذا $[e_\circ s_1] = [e_\circ s_2]$. همچنین داریم:

$$\varphi([st]) = [e_\circ st] = [e_\circ se_\circ t] = [e_\circ s][e_\circ t] = \varphi([s])\varphi([t])$$

و اگر $[e_\circ t] = [e_\circ s]$، آنگاه $f \in E(S)$ وجود دارد به‌طوری‌که $fe_\circ s = fe_\circ t$ پس $[t] = [s]$، بنابراین φ یک‌ریختی است. اگر S میانگین‌پذیر باشد، آنگاه G_S و زیرگروه آن یعنی A نیز چنین است؛ بنابراین G_T میانگین‌پذیر است و لذا T نیز چنین است. □

قضیه ۵.۳. فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد و $S = \cup_{e\in E} H_e$. در این صورت، برای هر $e \in E$، داریم $H_e \cong H_{\overline{e}}$.

اثبات. جهت یادآوری $H_{\overline{e}} = \{\,[\overline{e},s] : \overline{e} \le s \quad \overline{e}(ss^*) = 1\}$ و داریم:

$$[\overline{e},s]\,[\overline{e},t] = [\overline{e},st]\,,\ [\overline{e},e] = 1,\ \ [\overline{e},s]^{-1} = [\overline{e},s^*].$$

نگاشت زیر را در نظر می‌گیریم

$$\eta : H_e \to H_{\overline{e}},\ \ \eta(s) = [\overline{e},s].$$

برای اثبات خوش‌تعریفی آن، فرض کنیم $s,t \in H_e$ و $s=t$ در این صورت $es=et$ ، $ss^*tt^*=e$ و $\overline{e}(e)=۱$ بنابراین $[\overline{e},s]=[\overline{e},t]$ لذا $\eta(s)=\eta(t)$.

برای اثبات یک‌به‌یک بودن آن، فرض کنیم $\eta(s)=\eta(t)$، در این صورت $[\overline{e},s]=[\overline{e},t]$ پس یک $f\in E(S)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\overline{e}(f)=۱$ و $fs=ft$ بنابراین $ef=e$. از طرفی $s,t\in H_e$ پس داریم:

$$s=es=(ef)s=e(fs)=e(ft)=(ef)t=et=t.$$

برای اثبات پوشایی آن، فرض کنیم $[\overline{e},s]\in H_{\overline{e}}$، در این صورت $\overline{e}(ss^*)=۱$ پس $e\le ss^*$ یا $ess^*=e$، یعنی $es(es)^*=e$ یا $es\in H_e$ و $\eta(es)=[\overline{e},es]=[\overline{e},s]$. همریختی η نیز واضح است. □

لم ۶.۳. فرض کنیم G یک گروه‌وارهٔ $r-$گسسته باشد. در این صورت، هر $r-$فیبر G^u گسسته و شماراست.

اثبات. اگر $y\in G^u$، آنگاه یک مجموعهٔ باز شامل y از G^{op} مانند U موجود است که چون r یک‌به‌یک است، پس داریم $U\cap G^u=\{y\}$. ازآنجایی‌که G^u در اصل دوم شمارایی صدق می‌کند و گسسته نیز هست، نتیجه می‌گیریم که G^u شماراست. □

لم ۷.۳. فرض کنیم $S=\cup_{e\in E}H_e$ یک نیم‌گروه کلیفورد باشد و برای هر $e\in E$ گروه H_e میانگین‌پذیر باشد، در این صورت دنباله‌ای از توابع روی زیرگروه‌وارهٔ $G(\overline{E},S)=\cup_{e\in E}H_{\overline{e}}$ مانند $\{\varphi_n\}$ وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(الف) تابع $\overline{e}\to\sum_{y\in H_{\overline{e}}}|\varphi_n(y)|$ کران‌دار است،

(ب) برای هر $e\in E$ و $n\in\mathbb{N}$ داریم $\sum_{y\in H_{\overline{e}}}\varphi_n(y)=۱$،

(ج) برای هر $y\in G(\overline{E},S)$ دنبالهٔ $\sum_{r(x)=r(y)}|\varphi_n(y^{-۱}x)-\varphi_n(x)|$ همگرا به صفر است.

اثبات. به دلیل میانگین‌پذیری H_e دنباله‌ای از میانگین‌های متناهی، قضیه ۴.۲، مانند $\{g^e_n\}$ موجود است، به‌علاوه داریم $g^e_n\in l^۱(H_e)$، $g^e_n(h)\ge ۰$، $|g^e_n|=\sum_{h\in H_e}g^e_n(h)=۱$ و مجموعهٔ $\{h\in H_e : g^e_n(h)>۰\}$ متناهی است. برای $n\in\mathbb{N}$ تابع φ^e_n را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\varphi^e_n : H_{\overline{e}}\to[۰,+\infty],\quad \varphi^e_n([\overline{e},s]):=g^e_n(es).$$

جهت خوش‌تعریفی آن، فرض کنیم $[\overline{e},s]=[\overline{e},t]$ در این صورت عضوی مانند $f\in E$ وجود دارد به‌طوری‌که $\overline{e}(f)=۱$ و $fs=ft$، حال چون $e\le f$ پس $es=et$.

اکنون φ_n را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\varphi_n : \bigcup_{e\in E}H_{\overline{e}}\to[۰,+\infty],\quad \varphi_n(y)=\varphi^e_n(y)\quad (y\in H_{\overline{e}}).$$

توجه کنیم که به دلیل جدا از هم بودن گروه‌های $H_{\overline{e}}$، برای هر $y\in\bigcup_{e\in E}H_{\overline{e}}$ یک $e\in E$ منحصربه‌فردی موجود است که $y\in H_{\overline{e}}$. اکنون باید شرایط لازم را برای $\{\varphi_n\}$ بررسی کنیم

$$\sum_{[\overline{e},s]\in H_{\overline{e}}}\varphi_n([\overline{e},s])=\sum_{[\overline{e},s]\in H_{\overline{e}}}\varphi^e_n([\overline{e},s])=\sum_{es\in H_e}g^e_n(es)=\sum_{h\in H_e}g^e_n(h)=۱.$$

اگر $y\in H_{\overline{e}}$، آنگاه $t\in S$ موجود است که $y=[\overline{e},t]$ و $y^{-۱}=[\overline{e},t^{-۱}]$.

اگر $r(x)=r(y)$، آنگاه $x\in H_{\overline{e}}$ و یک $s\in S$ موجود است که $x=[\overline{e},s]$ و داریم

$$\begin{aligned}\sum_{x\in H_{\overline{e}}}|\varphi_n(y^{-۱}x)-\varphi_n(x)| &= \sum_{[\overline{e},s]\in H_{\overline{e}}}|\varphi_n([\overline{e},t^{-۱}][\overline{e},s]-\varphi_n([\overline{e},s])|\\ &= \sum_{[\overline{e},s]\in H_{\overline{e}}}|\varphi_n([\overline{e},t^{-۱}s]-\varphi_n([\overline{e},s])|\\ &= \sum_{e\le ss^*}|g^e_n(et^{-۱}s)-g^e_n(es)|\\ &= ||tg^e_n-g^e_n||\to ۰.\end{aligned}$$

□

برای اثبات نتیجهٔ بعدی لازم به ذکر است که چون $G = G(X, S)$ در اصل دوم شمارایی صدق می‌کند پس $X = G^{(\circ)}$ نیز شمارای دوم است و زیرمجموعهٔ شمارایی از E مانند $E_\circ$ موجود است به‌طوری‌که $\overline{E}_\circ := \{\overline{e} \ : \ e \in E_\circ\}$ در X چگال است.

دو قضیهٔ زیر در لم ۶.۳ از [۴] به روش دیگری اثبات شده‌اند.

قضیه ۸.۳. فرض کنیم $S = \bigcup_{e\in E} H_e$ یک نیم‌گروه کلیفورد باشد به‌طوری‌که برای هر $e \in E$ گروه H_e میانگین‌پذیر باشد، در این صورت $G = G(X, S)$ میانگین‌پذیر است.

اثبات. فرض کنیم $\overline{E}_\circ = \{\overline{e}_۱, \overline{e}_۲, \overline{e}_۳, \dots\}$ یک زیرمجموعهٔ شمارای چگال در X باشد. بنابر لم ۷.۳، دنباله‌ای مانند $\{\varphi_n\}$ در $G(E_\circ, S) = \bigcup_{i=۱}^{\infty} H_{\overline{e}}$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $[\overline{e}_i, s] \in H_{\overline{e}_i}$ داریم $\varphi_n([\overline{e}_i, s]) = ۰$ مگر به‌جز تعداد متناهی از $[\overline{e}_i, s]$ها.

اکنون $n \in \mathbb{N}$ را ثابت در نظر می‌گیریم، چون برای هر $i \in \mathbb{N}$، $H_{\overline{e}_i}$ گسسته است بنابراین $\bigcup_{i=۱}^{\infty} H_{\overline{e}_i}$ نیز گسسته است. می‌خواهیم φ_n را به یک تابع بورل $\Phi_n : G \to [۰, ۱]$ توسیع دهیم به‌طوری‌که در شرایط قضیه ۲.۳ صدق کند. برای هر $i \in \mathbb{N}$ فرض قرار می‌دهیم $A_i = \{m \in \mathbb{N}: m < i, e_m < e_i\}$ و زیرمجموعه‌های باز فشرده هاوسدورف زیر را از X اختیار می‌کنیم

$$U_i = D_{e_i, e_{i_۱}, e_{i_۲}, \dots, e_{i_k}} = \{x \in X : x(e_i) = ۱, \ x(e_{i_۱}) = x(e_{i_۲}) = \dots = x(e_{i_k}) = ۰\}$$

که در آن $A_i = \{i_۱, i_۲, \dots, i_۳\}$، به‌وضوح $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ یک پوشش برای $\overline{E}_\circ$ است. چون هر U_i فشرده است و $\overline{E}_\circ$ در X چگال است، بنابراین $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ برای X نیز پوشش خواهد بود.

با توجه به $\overline{e}_i \in U_i$ و $U_i \nsubseteq U_j$ (برای $i < j$)، V_iها را به‌شکل زیر اختیار می‌کنیم

$$V_i = \bigcup_{[\overline{e}_i, s]\in H_{\overline{e}_i}} D(U_i, s)$$

در ضمن V_i مشابه U_i است و $H_{\overline{e}_i} \subseteq V_i$. برای هر $x \in X$ یک $i \in \mathbb{N}$ موجود است که $x \in U_i$، اکنون یک دنبالهٔ نزولی مانند $\{e_j\}$ انتخاب می‌کنیم که $\{\overline{e}_j\}$ به x همگرا باشد. فرض کنیم

$$\Phi_n([x, s]) := limsup_j \varphi_n([\overline{e}_j, s])$$

چون $۱ \leq \varphi_n([\overline{e}_j, s]) \leq ۰$، $\Phi_n([x, s]) \in [۰, ۱]$ اگر $\overline{e}_j \longrightarrow x$ و $\overline{f}_j \longrightarrow x$ با شرط صعودی بودن یعنی $\overline{e}_i \leq \overline{e}_{i+۱}$ و $\overline{f}_i \leq \overline{f}_{i+۱}$ آنگاه داریم

$$limsup_j \varphi_n([\overline{e}_j, s]) = limsup_j \varphi_n([\overline{f}_j, s]).$$

(اگر چنین نباشد $b \in \mathbb{R}$ را بین دو تا حد اختیار می‌کنیم که داریم $\varphi_n^{-۱}((-\infty, b)) \cap \varphi_n^{-۱}((b, +\infty)) = \emptyset$ این نیز غیرممکن است زیرا $V_i \cap \varphi_n^{-۱}((-\infty, b))$ و $V_i \cap \varphi_n^{-۱}((b, +\infty))$ مجموعه‌های باز در $\bigcup_{i=۱}^{\infty} H_{\overline{e}_i}$ هستند که برای j های بزرگ شامل $[\overline{e}_j, s]$ و $[\overline{f}_j, s]$ هستند.)

جهت بورل بودن تابع Φ، برای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ داریم

$$\Phi_n^{-۱}((\alpha, +\infty)) = \bigcap_{k=۱}^{\infty} \overline{\left(\varphi_n^{-۱}\left(\left(\alpha - \frac{۱}{k}, +\infty\right)\right)\right)}$$

و برای بعضی از $\overline{e}_i$ داریم $\frac{۱}{۲}\Phi_n([x, s]) < \Phi_n([\overline{e}_i, s]) \leq \Phi_n([x, s])$ بنابراین Φ_n روی H_x، به‌جز تعداد متناهی از نقاط، صفر است. اگر برای $j = ۱, ۲, \dots, m$ داشته باشیم $\Phi_n([x, s_j]) \neq ۰$، آنگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ یک $i \in \mathbb{N}$ موجود است که

$$\Phi_n([\overline{e}_i, s_j]) \leq \Phi_n([x, s_j]) < \Phi_n([\overline{e}_i, s_j]) + \frac{\varepsilon}{m}$$

پس داریم:

$$۱ \leq \sum_{j=۱}^{\infty} \Phi_n([x, s_j]) < ۱ + \varepsilon$$

بنابراین

$$\sum_{j=۱}^{\infty} \Phi_n([x, s_j]) = ۱.$$

در نهایت برای بعضی از $i \in \mathbb{N}$ داریم

$$\Phi_n\left(\left[\overline{e}_i, t^{-۱}s\right]\right) \leq \Phi_n([x, t^{-۱}s]) < \Phi_n([\overline{e}_i, t^{-۱}s]) + \frac{\varepsilon}{۴m}$$

و داریم

$$\Phi_n([\overline{e}_i, s]) \leq \Phi_n([x, s]) < \Phi_n([\overline{e}_i, s]) + \frac{\varepsilon}{۴m}$$

بنابراین

$$\left|\sum_{[x,s]\in H_x} \left|\Phi_n\left(\left[x, t^{-۱}s\right]\right) - \Phi_n([x, s])\right| - \sum_{[\overline{e}_i,s]\in H_{\overline{e}_i}} \left|\Phi_n\left(\left[\overline{e}_i, t^{-۱}s\right]\right) - \Phi_n([\overline{e}_i, s])\right|\right| < \frac{\varepsilon}{۴}$$

به عبارت دیگر

$$|f_n(x) - f_n(\overline{e}_i)| < \frac{\varepsilon}{۴} \Longrightarrow f_n(x) = \sum_{[x,s]\in H_x} \left|\Phi_n\left(\left[x, t^{-۱}s\right]\right) - \Phi_n([x, s])\right|$$

همچنین برای $m \leq n$ داریم:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(\overline{e}_i)| + |f_n(\overline{e}_i) - f_n(\overline{e}_j)| \\ &+ |f_n(\overline{e}_j) - f_m(\overline{e}_j)| + |f_m(\overline{e}_j) - f_m(x)|. \end{aligned}$$

چون f_n روی $G(E_\circ, S) = \bigcup H_{\overline{e}_i}$ پیوسته است، دنبالهٔ $\{\overline{e}_i\}$ همگراست و دنبالهٔ $\{f_n(\overline{e}_i)\}_i$ کشی است؛ یعنی برای i, j خیلی بزرگ داریم $|f_n(\overline{e}_i) - f_n(\overline{e}_j)| < \frac{\varepsilon}{۴}$ از طرفی بنابر لم ۷.۳، برای هر $\overline{e}_i$ داریم $f_n(\overline{e}_i) \longrightarrow \circ$. بنابراین $\{f_n(\overline{e}_j)\}_n$ نیز دنبالهٔ کشی است؛ یعنی برای n, m خیلی بزرگ داریم $|f_n(\overline{e}_j) - f_m(\overline{e}_j)| < \frac{\varepsilon}{۴}$ پس خواهیم داشت $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ و این بدان معنی است که $\{f_n(x)\}$ یک دنبالهٔ کشی است، پس همگرا است.

چون برای هر $\overline{e}_j$ داریم $f_n(\overline{e}_i) \longrightarrow \circ$ بنابراین $f_n(x) \longrightarrow \circ$ در نتیجه وقتی $n \longrightarrow +\infty$ داریم:

$$\sum_{[x,s]\in H_x} \left|\Phi_n\left(\left[x, t^{-۱}\right][x, s]\right) - \Phi_n([x, s])\right| \longrightarrow \circ.$$

□

قضیه ۹.۳. فرض کنیم $S = \bigcup_{e\in E} H_e$ یک نیم‌گروه کلیفورد باشد که G گروه‌وارهٔ جهانی آن میانگین‌پذیر باشد، در این صورت هر گروه H_e میانگین‌پذیر است.

اثبات. دنبالهٔ $\{\Phi_n\}$ مطرح‌شده در قضیهٔ قبل را در نظر گرفته و $e \in E$ را ثابت اختیار می‌کنیم، حال تابع زیر را تعریف می‌کنیم

$$g_n : H_e \longrightarrow [\circ, +\infty]; \; g_n(h) = |\Phi_n([\overline{e}_i, h])|, \quad (h \in H_e).$$

برای هر $[\overline{e}, s] \in H_{\overline{e}}$ یک $h \in H_e$ منحصربه‌فرد موجود است به‌طوری‌که $[\overline{e}, s] = [\overline{e}, h]$ و داشته باشیم

$$\sum_{h\in H_e} g_n(h) = \sum_{[\overline{e},s]\in H_{\overline{e}}} |\Phi_n([\overline{e}, s])| = ۱.$$

همچنین برای هر $t \in H_e$ داریم:

$$\begin{aligned} ||tg_n - g_n|| &= \sum_{[\overline{e},s]\in H_{\overline{e}}} \left|\left|\Phi_n\left(\left[\overline{e}, t^{-۱}s\right]\right)\right| - |\Phi_n([\overline{e}, s])|\right| \\ &\leq \sum_{[\overline{e},s]\in H_{\overline{e}}} \left|\Phi_n\left(\left[\overline{e}, t^{-۱}s\right]\right) - \Phi_n([\overline{e}, s])\right| \to \circ. \end{aligned}$$

□

در انتها، مثالی از یک نیم‌گروه کلیفورد میانگین‌پذیر می‌آوریم که یک زیرگروه ماکسیمال میانگین‌ناپذیر دارد؛ یعنی گروه‌وارهٔ جهانی آن میانگین‌ناپذیر است.

مثال ۱۰.۳. فرض کنیم $\mathbb{F}_2$ گروه آزاد با دو مولد باشد، قرار می‌دهیم $S = \mathbb{F}_2 \cup \{0\}$. در این صورت S یک نیم‌گروه کلیفورد میانگین‌پذیر است، زیرا میانگین

$$\mu : l^{\infty}(S) \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \mu(f) = f(0)$$

پایا است، در این حالت داریم $E(S) = \{ e_G , 0 \}$ که به دلیل میانگین‌ناپذیر بودن $\mathbb{F}_2$، گروه‌وارهٔ جهانی $G = \mathbb{F}_2 \cup \{1\}$ نیز میانگین‌ناپذیر است.

References

[1] Berglund, J.F., Junghenn, D., & Milnes, P. (1989). Analysis on Semigroups, Function Spaces. *Wiley-Interscience and Canadian Mathematics Series of Monographs and Texts*, Vol. 10, *John Wiley, Sons*.

[2] Day, M.M. (1957). Amenable semigroups. *Illinois J. Math*, 1, 509–544. DOI: https://doi.org/10.1215/ijm/1255380675.

[3] Exel, R., & Starling, C. Amenable actions of inverse semigroup. *arXiv: 1411.2506v2 [math.OA]*. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1411.2506.

[4] Lalone, S.M., & Milan, D. (2017). Amenability and uniqueness for groupoids associated with inverse semigroups. *Semigroup Forum*, 95, 321–344. DOI: https://doi.org/10.1007/s00233-016-9839-0.

[5] Paterson, L.T. (1999). Groupoids, Inverse Semigroups, and their Operator Algebras. *Birkhaüser, New York*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1774-9.

[6] Renault, J. (1980). A groupoid approach to C^*-algebras. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 793, *Springer, Berlin*. DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0091072.

[7] Runde, V. (2002). Lectures on Amenability, Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1774, *Springer, Berlin*. DOI: https://doi.org/10.1007/b82937.

[8] Sakai, K. (1994). On inner amenability of Clifford semigroups. *Proc. Japan Acad, Ser. A Math. Sci*, 70, 123–127. DOI: https://doi.org/10.3792/pjaa.70.123.

Measure Algebras and Applications

Some results on resolutions of the identity in Hilbert spaces

Zohreh Aghamir Mohammad Ali[1]

1. Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran. Email: z.aghamir@yahoo.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 12 August 2023
Received in revised form:
21 September 2023
Accepted: 26 September 2023
Published Online:
30 September 2023

Keywords:
Hilbert spaces,
Resolutions of the identity,
Atomic systems,
Frame-like systems

2020 Mathematics Subject Classification:
42C15

ABSTRACT

In this paper, some new results on resolutions of the identity, atomic systems and frame-like systems for subspaces of a Hilbert space are obtained. In particular, their sums and their stability under the action of invertible operators are considered.

Cite this article: Aghamir Mohammad Ali, Z. (2023). Some results on resolutions of the identity in Hilbert spaces. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 119–127.
http://doi.org/ 10.22091/MAA.2023.9766.1010

Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/MAA.2023.9766.1010

Extended Abstract

Introduction

A discrete frame is a subset of a Hilbert space indexed by a finite or countable index set satisfying two inequalities for every element of the Hilbert space. In 1952, Duffin and Schaeffer introduced discrete frames when they were studying some problems in nonharmonic Fourier series ([6]). The continuous version of discrete frames was proposed by Kaiser in [10] and independently by Ali, Antoine and Gazeau in [1].

***Definition* 0.1.** *Let (Ω,μ) be a measure space and let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space. A weakly-measurable mapping $F:\Omega\to\mathcal{H}$ is called a continuous frame for $\mathcal{H}$ with respect to (Ω,μ) if there exist constants $0<A_F\leq B_F<\infty$ such that for each $f\in\mathcal{H}$, we have*

$$A_F\|f\|^2\leq\int_\Omega|\langle f,F(\omega)\rangle|^2\mathrm{d}\mu(\omega)\leq B_F\|f\|^2.$$

The positive numbers A_F and B_F are called the lower and upper bounds of the frame, respectively. The mapping F is called tight if $A_F=B_F$ and if $A_F=B_F=1$, it is called a Parseval frame. If only the second inequality is required, we say that F is a continuous Bessel mapping.

As we see, continuous frames are defined using a measure space, i.e., the indices are related to some measurable space, so every discrete frame can be considered as a continuous frame using the counting measure on the index set. Although there are many similarities between continuous and discrete frames, continuous frames can behave completely different from the discrete ones (for example, continuous frames are not necessarily norm bounded). Both discrete and continuous frames have great applications in pure and applied mathematics, particularly they are useful in signal processing. Indeed, each frame possesses at least one dual and the existence of duals facilitates the reconstruction of signals. For more information about continuous frames and their duals, we refer the readers to [8, 13] and the references therein.

Let $F:\Omega\to\mathcal{H}$ be a Bessel mapping. Then, a Bessel mapping $G:\Omega\to\mathcal{H}$ is called a *dual* for F if

$$\langle f,g\rangle=\int_\Omega\langle f,F(x)\rangle\langle G(x),g\rangle\mathrm{d}\mu(x),\tag{0.1}$$

for each $f,g\in\mathcal{H}$. The equality (0.1) can be written weakly as

$$f=\int_\Omega\langle f,F(x)\rangle G(x)\mathrm{d}\mu(x),\quad(f\in\mathcal{H}).$$

Now, we define the function $\tau:\Omega\to B(\mathcal{H})$ by $\tau(x)(f)=\langle f,F(x)\rangle G(x)$. Hence, for each $f\in\mathcal{H}$, we have

$$f=\int_\Omega\tau(x)(f)\mathrm{d}\mu(x).$$

Indeed, using the function τ, every f in the underlying Hilbert space can be reconstructed. The operators like τ are so valuable in frame theory. In fact, the crucial role of these operators caused the appearance of some important concepts such as resolutions of the identity, local atoms and atomic systems of subspaces, see [2], [3], [4], [5], [7], [9], [11] and the references therein.

Conclusion

In [12], using some real numbers as parameters, some new versions of resolutions of the identity, atomic systems and frame-like systems for subspaces of a Hilbert space were introduced. The new versions cover many of the notions related to atomic systems and resolutions of the identity, also, the existence of the parameters provides more flexible tools for the reconstruction of signals. Also, it was shown in [12] that there are close relationships between the new notions and some generalizations of frames and fusion frames.

In the present paper, these concepts are focused and some new results are obtained.

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۱۲۷-۱۱۹

برخی نتایج در مورد تجزیه‌های همانی در فضاهای هیلبرت

زهره آقامیر محمدعلی [۱]

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: z.aghamir@yahoo.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۵/۲۱
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۶/۳۰
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۷/۴
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
فضاهای هیلبرت،
تجزیه‌های همانی،
دستگاه‌های اتمی،
دستگاه‌های شبه‌قاب

رده‌بندی ریاضی:
42C15

چکیده

در این مقاله، نتایج جدیدی در مورد تجزیه‌های همانی، دستگاه‌های اتمی و دستگاه‌های شبه‌قاب برای زیرفضاهای بسته از یک فضای هیلبرت به دست می‌آیند. به‌ویژه، مجموع آنها و پایایی آنها تحت عملگرهای وارون‌پذیر مورد بررسی قرار می‌گیرند.

استناد: آقامیر محمدعلی، زهره. (۱۴۰۲). برخی نتایج در مورد تجزیه‌های همانی در فضاهای هیلبرت. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۱۲۷-۱۱۹.

http://doi.org/ 10.22091/MAA.2023.9766.1010

ناشر: دانشگاه قم.

۱ معرفی و تاریخچه

یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های یک پایهٔ متعامدیکه در فضای هیلبرت[۱] $\mathcal{H}$ آن است که هر عضو از فضا را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی متناهی یا نامتناهی از عناصر پایه نوشت که ضرایب آن یکتا هستند. همچنین یک قاب نیز دنباله‌ای از عناصر فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است که این امکان را به ما می‌دهد هر عضو از فضا را به‌صورت ترکیب خطی متناهی یا نامتناهی از عناصر قاب نوشت، اما ضرایب آن لزوماً یکتا نیستند. به‌طور کلی قاب‌ها تعمیمی از پایه‌های متعامدیکه هستند که لزوماً خاصیت مستقل خطی بودن را ندارند. در نتیجه قاب‌ها دارای خاصیت تکرار بردارها هستند؛ یعنی نمایش‌های متفاوت یک عضو از فضای هیلبرت با استفاده از قاب‌ها امکان‌پذیر است. این خاصیت مطلوب در بسیاری از کاربردهای قاب ظاهر می‌شود. این ویژگی قاب‌ها باعث می‌شود در یک دستگاه پردازش سیگنال، قاب‌ها از مقاومت بیشتری در برابر خطاهای ارسالی نسبت به پایه‌ها برخوردار باشند و برخلاف تجزیهٔ منحصربه‌فرد برحسب پایه‌های متعامدیکه باعث ایجاد مشکل و محدودیت نمی‌شوند. عملکرد مطلوب قاب‌ها نسبت به پایه باعث تعریف آن توسط دانشمندان شد.

مفهوم قاب‌ها در فضاهای هیلبرت برای اولین بار در سال ۱۹۵۲، توسط دافین[۲] و شیفر[۳] معرفی شد و در سال ۱۹۸۶ توسط دوبچیز[۴]، گراسمان[۵] و میر[۶] مورد بازنگری قرار گرفت. کاربرد دیگر قاب‌ها در نظریهٔ کدگذاری و ارتباطات است. معمولاً به‌خاطر پردازش اطلاعات، دستگاه قاب‌ها را به دستگاه‌های کوچک‌تر تقسیم می‌کنند که در سال‌های اخیر این مطلب باعث ایجاد تعمیم دیگری از قاب‌ها به نام قاب زیرفضاها یا قاب مخلوط شد که به‌جای کار کردن با قاب‌ها با استفاده از زیرفضاهای یک فضای هیلبرت تعریف می‌شود و سپس با پیوند این قاب‌های زیرفضا، یک قاب برای کل فضا به دست می‌آید. مزیت این روش، سادگی محاسبات و بررسی قاب بودن روی زیرفضاهای کوچک‌تری از فضای کل است که کارایی و دقت را بیشتر می‌کند. در حقیقت قاب‌های مخلوط تعمیمی از قاب‌ها هستند که از زیرفضاهای بستهٔ یک فضای هیلبرت برای تجزیهٔ سیگنال‌ها استفاده می‌نمایند.

قاب‌های مخلوط توسط کاسازا[۷] و کوتینیوک[۸] در سال ۲۰۰۴ معرفی شدند. قاب‌های مخلوط کاربردهای مهمی از جمله در کدگذاری و کدگشایی دارند. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به مرجع [۵] مراجعه کنید.

ازآنجایی‌که تجزیهٔ سیگنال‌ها کاربردهای مهمی دارد، تجزیهٔ همانی و ارتباط آن با قاب‌های مخلوط نخستین بار توسط کاسازا و کوتینیوک در سال ۲۰۰۴ در مرجع [۵] مطرح شد. در سال ۲۰۰۵ تجزیهٔ اتمی همانی گسسته توسط عسگری[۹] و خسروی[۱۰] در مرجع [۲] معرفی شد. در سال ۲۰۱۶ جوانشیری[۱۱] و فتاحی[۱۲] در مرجع [۹] مفاهیم تجزیهٔ همانی پیوسته و تجزیهٔ اتمی همانی پیوسته را معرفی کردند.

۲ نتایج اصلی

انواع جدیدی از تجزیه‌های همانی و دستگاه‌های شبه‌قاب در مقاله [۱۲] معرفی شدند. در تعریف زیر، این مفاهیم را یادآوری می‌کنیم. دقت شود که هرگاه صحبت از توابع $\mathcal{H}$ مقدار اندازه‌پذیر شد، منظور این است که به‌ازای هر f و g در $\mathcal{H}$ نگاشت

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \langle \tau(x) f, g\rangle \end{aligned}$$

و یا به‌ازای هر f در $\mathcal{H}$ نگاشت

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \|\tau(x) f\| \end{aligned}$$

اندازه‌پذیر است. q و r اعداد حقیقی دلخواه هستند و همواره $p \geq ۱$.

[1] Hilbert space
[2] Duffin
[3] Schaefer
[4] Daubechies
[5] Grossmann
[6] Meyer
[7] Casazza
[8] Kutyniok
[9] Asgari
[10] Khosravi
[11] Javanshiri
[12] Fattahi

$B(\mathcal{H})$ نشان‌دهندهٔ تمام توابع کران‌دار روی $\mathcal{H}$ است، (Ω, μ) یک فضای اندازه است که در آن μ یک اندازهٔ مثبت است. همچنین ω یک تابع اندازه‌پذیر از Ω به $(\circ, \infty)$ فرض می‌شود.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $\mathcal{H}_\circ$ یک زیرفضای بسته از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ و $\tau : \Omega \longrightarrow B(\mathcal{H})$ نگاشتی باشد به‌طوری‌که تابع $\mathcal{H}$ مقدار $T_f : \Omega \longrightarrow \mathcal{H}$ که به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ به‌صورت $T_f(x) = \tau(x)f$ تعریف می‌شود، اندازه‌پذیر باشد.

الف) نگاشت τ را یک r-تجزیهٔ همانی پیوسته برای $\mathcal{H}_\circ$ نسبت به (μ, ω) می‌نامیم اگر به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}_\circ$ و $g \in \mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega \omega(x)^r \ \langle \tau(x)f, g\rangle \ d\mu(x).$$

ب) نگاشت τ را یک (p,q)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به (μ, ω) می‌نامیم اگر عدد مثبتی مانند B_τ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$\left(\int_\Omega \omega(x)^q \ \|\tau(x)f\|^p \ d\mu(x)\right)^{\backslash/p} \leq B\tau \|f\|.$$

پ) نگاشت τ را یک (p,q)-دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای $\mathcal{H}$ می‌نامیم اگر τ یک (p,q)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به (μ, ω) باشد و عدد مثبت A_τ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$A_\tau \|f\| \leq \left(\int_\Omega \omega(x)^q \|\tau(x)f\|^p \ d\mu(x)\right)^{\backslash/p}.$$

ت) نگاشت τ را یک (p,q,r)-دستگاه اتمی پیوسته برای $(\mathcal{H}_\circ, \mathcal{H})$ می‌نامیم اگر τ یک r-تجزیهٔ همانی پیوسته برای $\mathcal{H}_\circ$ و همچنین یک (p,q)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به (μ, ω) باشد. اگر $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\circ$، τ را یک (p,q,r)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ می‌نامیم.

ث) نگاشت τ یک (p,q,r)-دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای $(\mathcal{H}_\circ, \mathcal{H})$ نامیده می‌شود اگر τ یک r-تجزیهٔ همانی پیوسته برای $\mathcal{H}_\circ$ و یک (p,q)-دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به (μ, ω) باشد. اگر $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\circ$، τ را یک (p,q,r)-دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای $\mathcal{H}$ می‌نامیم.

قضیه ۲.۲. فرض کنیم $\mathcal{H}_\circ$ یک زیرفضای بسته از $\mathcal{H}$ و T یک عملگر وارون‌پذیر روی $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت،

الف) اگر τ یک r-تجزیهٔ همانی پیوسته برای $\mathcal{H}_\circ$ نسبت به (μ, ω) باشد، آن‌گاه $\tau_T : \Omega \longrightarrow B(\mathcal{H})$ که به‌صورت

$$\tau_T(x)(f) = T\left(\tau(x)T^{-\backslash}f\right)$$

تعریف می‌شود یک r-تجزیهٔ همانی پیوسته برای $T(\mathcal{H}_\circ)$ نسبت به (μ, ω) است.

ب) اگر τ یک (p,q)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به (μ, ω) باشد، آن‌گاه τ_T نیز یک (p,q)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به (μ, ω) است.

پ) اگر τ یک (p,q)-دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه τ_T نیز یک (p,q)-دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای $\mathcal{H}$ است.

ت) اگر τ یک (p,q,r)-دستگاه اتمی پیوسته برای $(\mathcal{H}_\circ, \mathcal{H})$ باشد، آن‌گاه τ_T یک (p,q,r)-دستگاه اتمی پیوسته برای $(T(\mathcal{H}_\circ), \mathcal{H})$ است.

ث) اگر τ یک (p,q,r)-دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای $(\mathcal{H}_\circ, \mathcal{H})$ باشد، آن‌گاه τ_T یک (p,q,r)-دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای $(T(\mathcal{H}_\circ), \mathcal{H})$ است.

اثبات. ابتدا دقت می‌کنیم که چون $\mathcal{H}_\circ$ یک زیرفضای بستهٔ $\mathcal{H}$ و T یک عملگر وارون‌پذیر روی $\mathcal{H}$ است، پس $T(\mathcal{H}_\circ)$ یک زیرفضای بستهٔ $\mathcal{H}$ است.

اکنون فرض می‌کنیم f و g دو عضو از $\mathcal{H}$ باشند. طبق فرض نگاشت

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \left\langle \tau(x)\, T^{-1} f, T^* g \right\rangle \end{aligned}$$

اندازه‌پذیر است، لذا

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \left\langle T\left(\tau(x)\, T^{-1} f\right), g \right\rangle \end{aligned}$$

اندازه‌پذیر است، به طور معادل می‌توان گفت که

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \left\langle \tau_T(x)\, f, g \right\rangle \end{aligned}$$

اندازه‌پذیر است. اینک به اثبات موارد گفته شده می‌پردازیم.

الف) فرض کنیم τ یک r-تجزیهٔ همانی پیوسته برای $\mathcal{H}_\circ$ نسبت به (μ, ω) باشد. اگر $g \in \mathcal{H}$ و $T(f) \in T(\mathcal{H}_\circ)$، داریم:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \omega(x)^r \left\langle \tau_T(x) T f, g \right\rangle d\mu(x) &= \int_\Omega \omega(x)^r \left\langle T\tau(x) T^{-1} T f, g \right\rangle d\mu(x) \\ &= \int_\Omega \omega(x)^r \left\langle \tau(x) f, T^* g \right\rangle d\mu(x) \\ &= \langle f, T^* g \rangle = \langle T f, g \rangle . \end{aligned}$$

تساوی فوق نشان می‌دهد که τ_T یک r-تجزیهٔ همانی پیوسته برای $T(\mathcal{H}_\circ)$ نسبت به (μ, ω) است.

ب) فرض کنیم τ یک (p, q)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به (μ, ω) باشد. در این صورت به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم:

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega \omega(x)^q \left\|\tau_T(x) f\right\|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_\Omega \omega(x)^q \left\|T(\tau(x) T^{-1} f\right\|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|T\| \left(\int_\Omega \omega(x)^q \left\|\tau(x) T^{-1} f\right\|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|T\|\ B_\tau \left\|T^{-1} f\right\| \leq \|T\| \left\|T^{-1}\right\|\ B_\tau \|f\| . \end{aligned}$$

نامساوی فوق ایجاب می‌کند که τ_T یک (p, q)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به (μ, ω) باشد.

پ) فرض کنیم τ یک (p, q)-دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای $\mathcal{H}$ باشد. بنابر قسمت (ب)، τ_T یک (p, q)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ است. اکنون به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\tau \|f\| = \mathcal{A}_\tau \left\|T T^{-1} f\right\| &\leq \|T\| \mathcal{A}_\tau \left\|T^{-1} f\right\| \\ &\leq \|T\| \left(\int_\Omega \omega(x)^q \left\|\tau(x) T^{-1} f\right\|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|T\| \left(\int_\Omega \omega(x)^q \left\|T^{-1} T \tau(x) T^{-1} f\right\|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|T\| \left\|T^{-1}\right\| \left(\int_\Omega \omega(x)^q \left\|T\left(\tau(x) T^{-1} f\right)\right\|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} . \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{\mathcal{A}_\tau}{\|T\|\,\|T^{-1}\|}\,\|f\| \le \left(\int_\Omega \omega(x)^q\ \left\|T(\tau(x)T^{-1}f)\right\|^p\ d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

و حکم ثابت می‌شود.

ت) از قسمت‌های (الف) و (ب) نتیجه می‌شود.

ث) از قسمت‌های (الف) و (پ) نتیجه می‌شود. □

قضیه ۳.۲. اگر τ_1 و τ_2 دو (p,q)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به (μ,ω) باشند، آن‌گاه $\tau_1+\tau_2$ که به‌صورت

$$(\tau_1+\tau_2)(x)=\tau_1(x)+\tau_2(x)$$

تعریف می‌شود، یک (p,q)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ است.

اثبات. به‌آسانی ثابت می‌شود که $\tau_1+\tau_2$ اندازه‌پذیر است. اکنون، برای هر $f\in\mathcal{H}$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_\Omega \omega(x)^q\,\|(\tau_1+\tau_2)(x)f\|^p\ d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left(\int_\Omega \left\|\left(\omega(x)^{\frac{q}{p}}\tau_1(x)f\right)+\left(\omega(x)^{\frac{q}{p}}\tau_2(x)f\right)\right\|^p\ d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\le\left(\int_\Omega \left\|\omega(x)^{\frac{q}{p}}\tau_1(x)f\right\|^p\ d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_\Omega \left\|\omega(x)^{\frac{q}{p}}\tau_2(x)f\right\|^p\ d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\le B_{\tau_1}\|f\|+B_{\tau_2}\|f\|=(B_{\tau_1}+B_{\tau_2})\|f\|
\end{aligned}$$

و حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۴.۲. فرض کنیم τ_1 و τ_2 دو r-تجزیهٔ همانی پیوسته برای $\mathcal{H}_0$ نسبت به (μ,ω) باشند. در این صورت τ که به‌صورت

$$\tau(x)=\frac{1}{2}\left(\tau_1(x)+\tau_2(x)\right)$$

تعریف می‌شود، یک r-تجزیهٔ همانی پیوسته برای $\mathcal{H}_0$ نسبت به (μ,ω) است.

اثبات. به‌آسانی ثابت می‌شود که τ اندازه‌پذیر است. اکنون، به‌ازای هر f در $\mathcal{H}_0$ و g در $\mathcal{H}$ داریم:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \omega(x)^r\ \langle\tau(x)f,g\rangle\ d\mu(x)&=\int_\Omega \omega(x)^r\ \left\langle\frac{1}{2}(\tau_1(x)+\tau_2(x))f,g\right\rangle\ d\mu(x)\\
&=\frac{1}{2}\int_\Omega \omega(x)^r\ \langle\tau_1(x)f,g\rangle\ d\mu(x)\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_\Omega \omega(x)^r\ \langle\tau_2(x)f,g\rangle\ d\mu(x)\\
&=\frac{1}{2}\langle f,g\rangle+\frac{1}{2}\langle f,g\rangle=\langle f,g\rangle
\end{aligned}$$

و حکم ثابت می‌شود. □

References

[1] Ali, S.T., Antoine, J.P., & Gazeau, J.P. (1993). Continuous frames in Hilbert spaces. *Ann. Physics*, 222, 1–37. DOI: https://doi.org/10.1006/aphy.1993.1016.

[2] Asgari, M.S., & Khosravi, A. (2005). Frames and bases of subspaces in Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl*, 308, 541–553. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.11.036.

[3] Balazs, P. (2007). Basic definition and properties of Bessel multipliers. *J. Math. Anal. Appl*, 325, 571–585. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.02.012.

[4] Balazs, P., Bayer, D., & Rahimi, A. (2012). Multipliers for continuous frames in Hilbert spaces. *J. Phys. A*, 45, 244023–244043. DOI: https://doi.org/10.1088/1751-8113/45/24/244023.

[5] Casazza, P., & Kutyniok, G. (2004). Frames of subspaces. *Contemp. Math. Amer. Math. Soc*, 345, 87–113.

[6] Duffin, R.J., & Schaeffer, A.C. (1952). A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc*, 72, 341–366. DOI: https://doi.org/10.2307/1990760.

[7] Feichtinger, H.G., & Werther, T. (2001). Atomic systems for subspaces. *In: Zayed, L. (ed.) Proceedings SampTA 2001, Orlando*, pp 163–165.

[8] Gabardo, J.P., & Han, D. (2003). Frame associated with measurable spaces. *Adv. Comp. Math*, 18, 127–147. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1021312429186.

[9] Javanshiri, H., & Fattahi, A.M. (2016). Continuous atomic systems for subspaces. *Mediterr. J. Math*, 13, 1871–1884. DOI: https://doi.org/10.1007/s00009-015-0593-4.

[10] Kaiser, G. (1994). A Friendly Guide to Wavelets. *Birkhauser, Boston*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8111-1.

[11] Khosravi, A., & Asgari, M.S. (2007). Frames of subspaces and approximation of the inverse frame operator. *Houst. J. Math*, 33, 907–920.

[12] Mirzaee Azandaryani, M., & Aghamir Mohammad Ali, Z. (2023). Atomic and Frame-Like Systems for Subspaces of a Hilbert Space. *Mediterr. J. Math*, 20, 185-1–185-17. DOI: https://doi.org/10.1007/s00009-023-02395-1.

[13] Mirzaee Azandaryani, M., & Javadi, Z. (2022). Pseudo-duals of continuous frames in Hilbert spaces. *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl*, 13, 1–16. DOI: https://doi.org/10.1007/s11868-022-00486-3.

Measure Algebras and Applications

A^{**}-biprojectivity of Banach algebras

Mehdi Rostami[1✉], **Amir Sahami**[2]

1. Corresponding Author, Department of Mathematics and Computer Science, Amirkabir University of Technology (Tehran Polytechnic), Iran. Email: mross@aut.ac.ir
2. Department of Mathematics, Faculty of Basic Science, Ilam University, P.O. Box 69315-516 Ilam, Iran. Email: a.sahami@ilam.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 1 August 2023
Received in revised form:
10 September 2023
Accepted: 27 September 2023
Published Online:
30 September 2023

Keywords:
Amenable,
A^{**}-biprojective,
Inner amenable,
Lipschitz algebra,
Triangular algebra

2020 Mathematics Subject Classification:
43A20, 46M10

ABSTRACT

In this paper, we introduce a new homological notion related to biprojective Banach algebras, namely A^{**}-biprojective Banach algebras. We study the relation between this new notion and the other homological notions, such as amenability, pseudo-amenability and inner amenability. Also, we investigate this new notion on certain Banach algebras such as group algebras, Lipschitz algebras and triangular Banach algebras.

Cite this article: Rostami, M., & Sahami, A. (2023). A^{**}-biprojectivity of Banach algebras. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 128–140. http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9829.1011

Publisher: University of Qom

DOI: 10.22091/MAA.2023.9829.1011

Extended Abstract

Introduction

Biprojectivity of Banach algebras as an important homological notion arise naturally in Helemskii's works in the 1980s, interested readers are referred to his comprehensive book [5]. We begin with recalling its definition. A Banach algebra A is called *biprojective* if there exists a bounded A-bimodule morphism $\rho\colon A \to A\widehat{\otimes}A$ such that $\pi_A \circ \rho(a) = a$. This concept closely related to the notions of contractibility and amenability introduced by Johnson [8, 9]. The notion of φ-amenability was introduced in [10] and independently in [13]. Let A be a Banach algebra. For a fixed nonzero multiplicative linear functional $\varphi \in A^*$, we call A *left φ-amenable* if A possesses a left *φ-mean*, i.e., a bounded linear functional m on A^* satisfying $m(\varphi) = 1$ and $m(f \cdot a) = \varphi(a)m(f)$ for all $a \in A$ and $f \in A^*$. A Banach algebra is called *character amenable* if it is left φ-amenable for all $\varphi \in \Delta(A)$ and it has a bounded right approximate identity. Character amenability of some Banach algebras associated to a locally compact group and their second duals were studied in [6, 13]. Character amenability of Lipschitz algebras was studied by Dashti et al in [1]. Here, we remind that A is *φ-inner amenable* if there exists a bounded net (a_α) in A such that $aa_\alpha - a_\alpha a \to 0$ and $\varphi(a_\alpha) = 1$ (or equivalently $\varphi(a_\alpha) \to 1$) for all α and $a \in A$ [7]. Some examples of φ-inner amenable Banach algebras are commutative Banach algebras, character amenable Banach algebras and Banach algebras containing a bounded approximate identity. In this paper, we are going to define and investigate the concept of A^{**}-biprojectivity for any Banach algebra. We obtain the relation between this definition with amenability and φ-amenability. After that, we characterize A^{**}-biprojectivity of Lipschitz algebras $A = Lip_\alpha(X)$, where X is a compact metric space and $0 < \alpha < 1$. Finally, we study this new concept for triangular Banach algebras.

Conclusion

In this paper, the following definitions are stated:

***Definition* 0.1.** *A Banach algebra A is called biprojective if there exists a bounded A-bimodule morphism $\rho\colon A \to A\widehat{\otimes}A$ such that $\pi_A \circ \rho(a) = a$.*

***Definition* 0.2.** *A Banach algebra A is called left φ-amenable if A possesses a left φ-mean, i.e., a bounded linear functional m on A^* satisfying $m(\varphi) = 1$ and $m(f \cdot a) = \varphi(a)m(f)$ for all $a \in A$ and $f \in A^*$.*

***Definition* 0.3.** *A Banach algebra A is called A^{**}-biprojective if there exists bounded A-module morphism $\rho : A \to A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ such that for all $a \in A$*

$$\pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \kappa_A(a).$$

***Definition* 0.4.** *Let A be a Banach algebra and $\varphi \in \Delta(A)$. A is called φ-inner amenable if there exists a net (m_α) in A such that for all $a \in A$*

$$am_\alpha - \varphi(a)m_\alpha \to 0, \qquad \varphi(m_\alpha) \to 1.$$

Also, the next theorems are presented:

***Theorem* 0.5.** *Let A be a Banach algebra with a bounded approximate identity. If A is A^{**}-biprojective, then A is (pseudo-)amenable.*

***Theorem* 0.6.** *Let G be a locally compact group. If $L^1(G)$ is $L^1(G)^{**}$-biprojective, then G is amenable.*

***Theorem* 0.7.** *Let A be a Banach algebra. If A is A^{**}-biprojective, then A^2 is dense in A.*

***Theorem* 0.8.** *Let A be a Banach algebra and $\varphi \in \Delta(A)$. If A is φ-inner amenable and A^{**}-biprojective, then A is left φ-amenable.*

***Theorem* 0.9.** *Let G be a locally compact group. The algebra $M(G)\widehat{\otimes}L^1(G)$ is $(M(G)\widehat{\otimes}L^1(G))^{**}$-biprojective if and only if G is finite.*

***Theorem* 0.10.** *Let X be a compact metric space and $0 < \alpha < 1$. $Lip_\alpha(X)$ is $Lip_\alpha(X)^{**}$-biprojective if and only if X is finite.*

***Theorem* 0.11.** *Let A be a Banach algebra and $\varphi \in \Delta(A)$. If A is φ-inner amenable, then the triangular Banach algebra $\mathcal{T}$ is not $\mathcal{T}^{**}$-biprojective.*

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۱۴۰-۱۲۸

A^{**}- دوتصویری جبرهای باناخ

مهدی رستمی [۱] ✉، امیر سهامی [۲]

۱. نویسندهٔ مسئول، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران. رایانامه: mross@aut.ac.ir
۲. دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ایلام، ایلام، ایران. رایانامه: a.sahami@ilam.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۵/۱۰
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۶/۱۹
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۷/۵
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
میانگین‌پذیر،
A^{**}- دوتصویر،
میانگین‌پذیر داخلی،
جبر لیپشیتزی،
جبر مثلثی

رده‌بندی ریاضی:
43A20, 46M10

چکیده

در این مقاله یک مفهوم همانستگی جدید مرتبط با جبرهای باناخ دوتصویر به نام جبرهای باناخ A^{**}-دوتصویر ارائه می‌کنیم. ما به مطالعهٔ رابطهٔ بین این مفهوم و برخی مفاهیم همانستگی همچون میانگین‌پذیری، شبه میانگین‌پذیری و میانگین‌پذیری داخلی می‌پردازیم. همچنین این مفهوم جدید برای جبرهای باناخ خاص مانند جبرهای گروهی، جبرهای لیپشیتزی و جبرهای باناخ مثلثی بررسی می‌شود.

استناد: رستمی، مهدی.، سهامی، امیر. (۱۴۰۲). A^{**}- دوتصویری جبرهای باناخ. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۱۴۰-۱۲۸.
http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9829.1011

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

دوتصویری جبرهای باناخ به‌عنوان یک مفهوم همانستگی مهم در آثار هلمسکی در دهۀ ۱۹۸۰ به وجود آمد، خوانندگان علاقه‌مند به کتاب مرجع او مراجعه کنند [۵]. با یادآوری تعریف آن شروع می‌کنیم. یک جبر باناخ A دوتصویر نامیده می‌شود هرگاه یک همریختی A -مدولی کران‌دار $\rho: A \to A\widehat{\otimes}A$ وجود داشته باشد که $\pi_A \circ \rho(a) = a$. این مفهوم ارتباط نزدیکی با مفاهیم انقباض‌پذیری و میانگین‌پذیری ارائه‌شده توسط جانسون دارد [۸، ۹]. مفهوم φ -میانگین‌پذیری در [۱۰] و به‌طور مستقل در [۱۳] معرفی شد. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. برای یک تابعک خطی ضربی $\varphi \in A^*$، A را φ -میانگین‌پذیر چپ می‌نامیم هرگاه A دارای یک φ -میانگین چپ باشد، یعنی، یک تابعک خطی کران‌دار m روی A^* که برای هر $a \in A$ و $f \in A^*$ در شرط $m(\varphi) = ۱$ و $m(f \cdot a) = \varphi(a)m(f)$ صدق کند. جبر باناخ A مشخصه میانگین‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\varphi \in \Delta(A)$، φ -میانگین‌پذیر چپ باشد و دارای یکۀ تقریبی راست کران‌دار باشد. مشخصه میانگین‌پذیری برخی از جبرهای باناخ وابسته به یک گروه فشرده موضعی و دوگان دوم آن در [۶] مطالعه شده است. مشخصه میانگین‌پذیری جبرهای لیپشیتزی توسط دشتی و همکاران در [۱] مطالعه شده است. در اینجا یادآوری می‌کنیم که A را φ -میانگین‌پذیر داخلی می‌نامیم هرگاه تور کران‌دار (a_α) در A وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$ و هر α، $aa_\alpha - a_\alpha a \to ۰$ و $\varphi(a_\alpha) = ۱$ (یا به‌طور معادل $\varphi(a_\alpha) \to ۱$). جبرهای باناخ جابه‌جایی، جبرهای باناخ مشخصه میانگین‌پذیر و جبرهای باناخ دارای یکۀ تقریبی کران‌دار مثال‌هایی از جبرهای باناخ φ -میانگین‌پذیر داخلی هستند. در این مقاله، به تعریف و بررسی مفهوم A^{**} -دوتصویری جبرهای باناخ می‌پردازیم. رابطۀ بین این تعریف با مفهوم میانگین‌پذیری و φ -میانگین‌پذیری را به دست می‌آوریم. پس از آن، A^{**} -دوتصویری جبرهای لیپشیتزی $A = Lip_\alpha(X)$ را مشخص می‌کنیم. در نهایت، به مطالعۀ این مفهوم روی جبرهای باناخ مثلثی می‌پردازیم.

۲ تعاریف و مقدمات

فرض کنید A یک جبر باناخ و $A\widehat{\otimes}A$ فضای حاصلضرب تانسوری تصویری باشد. در این صورت $A\widehat{\otimes}A$ یک باناخ A- دومدول با اعمال مدولی زیر است:

$$a \cdot (b \otimes c) = ab \otimes c,\ (b \otimes c) \cdot a = b \otimes ca \qquad (a, b, c \in A)$$

همچنین $(A\widehat{\otimes}A)^*$ با اعمال مدولی زیر یک باناخ A- دومدول است:

$$(a \cdot f)(b \otimes c) = f(b \otimes ca),$$

$$(f \cdot a)(b \otimes c) = f(ab \otimes c) \qquad (a, b, c \in A, f \in (A\hat{\otimes}A)^*).$$

به‌طور مشابه می‌توان $(A\widehat{\otimes}A)^{**}$ را به‌عنوان یک باناخ A -دومدول در نظر گرفت. در سرتاسر این مقاله، $\Delta(A)$ بیانگر مجموعۀ تمام تابعک‌های خطی ضربی ناصفر روی جبرهای باناخ A، $\kappa_A : A \to A^{**}$ نشانندۀ طبیعی و $\pi_A : A\hat{\otimes}A \to A$ نگاشت ضربی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\pi_A(a \otimes b) = ab \qquad (a, b \in A).$$

آرنز در سال ۱۹۵۱ دو ضرب روی دوگان دوم یک جبر باناخ تعریف کرد تا بتواند آن را تبدیل به یک جبر باناخ کند. در واقع این ضرب‌ها توسیع ضرب معمولی روی جبر هستند. به این ضرب‌ها ضرب آرنز اول و دوم گفته می‌شود که به‌ترتیب با نمادهای $\Box$ و $\Diamond$ نمایش داده می‌شوند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\langle F\Box G, f\rangle = \langle F, G \cdot f\rangle, \qquad \langle F\Diamond G, f\rangle = \langle G, f \cdot F\rangle,$$

و

$$\langle G \cdot f, a\rangle = \langle G, f \cdot a\rangle, \qquad \langle f \cdot F, a\rangle = \langle F, a \cdot f\rangle,$$

و

$$\langle f \cdot a, b\rangle = \langle f, ab\rangle, \qquad \langle a \cdot f, b\rangle = \langle f, ba\rangle,$$

که در آن $F, G \in A^{**}$، $f \in A^*$ و $a, b \in A$.

ابتدا تعریف جبرهای باناخ A^{**} -دوتصویر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. جبر باناخ A را A^{**}-دوتصویر نامیم هرگاه همریختی پیوسته A- دومدولی $\rho : A \to A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $a \in A$

$$\pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \kappa_A(a)$$

که در آن $\pi_{A^{**}} : A^{**}\widehat{\otimes}A^{**} \to A^{**}$ عملگر ضربی با ضابطهٔ $\pi_{A^{**}}(F \otimes G) = F\Box G$ است.

در قضیهٔ زیر به بررسی رابطهٔ بین میانگین‌پذیری جبر باناخ A با A^{**}-دوتصویری می‌پردازیم.

قضیه ۲.۲. فرض کنیم A یک جبر باناخ با یکهٔ تقریبی کران‌دار باشد. اگر A، A^{**}-دوتصویر باشد، آنگاه A میانگین‌پذیر است.

اثبات. ازآنجاکه جبر A، A^{**}-دوتصویر است؛ لذا طبق تعریف، عملگر خطی $\rho : A \to A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $a, b \in A$ داریم:

$$\pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \kappa_A(a), \qquad \rho(ab) = \rho(a) \cdot b = a \cdot \rho(b).$$

فرض کنیم (e_α) یکهٔ تقریبی کران‌دار A باشد. حال قرار دهید $N_\alpha = \rho(e_\alpha) \in A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$. در این صورت برای هر $a \in A$ داریم

$$a \cdot N_\alpha - N_\alpha \cdot a = a \cdot \rho(e_\alpha) - \rho(e_\alpha) \cdot a = \rho(ae_\alpha - e_\alpha a) \to \circ,$$

و نیز

$$\pi_{A^{**}}(N_\alpha)a = \pi_{A^{**}} \circ \rho(e_\alpha)a = \kappa_A(e_\alpha)a \to a.$$

طبق [۳، لم ۱.۷] نگاشت

$$\Psi : A^{**}\widehat{\otimes}A^{**} \to (A\widehat{\otimes}A)^{**}$$

موجود است به‌طوری‌که برای هر $a, b \in A$ و $n \in A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) $\Psi(\kappa_A(a) \otimes \kappa_A(b)) = \kappa_{A\widehat{\otimes}A}(a \otimes b)$

ب) $\Psi(n) \cdot a = \Psi(n \cdot a)$

پ) $a \cdot \Psi(n) = \Psi(a \cdot n)$

ت) $\pi_A^{**}(\Psi(n)) = \pi_{A^{**}}(n)$.

تعریف می‌کنیم $m_\alpha = \Psi(N_\alpha) \in (A\widehat{\otimes}A)^{**}$. چون (m_α) یک تور کران‌دار است در نتیجه طبق قضیه باناخ آلاغلو دارای حد ضعیف ستاره $M \in (A\widehat{\otimes}A)^{**}$ است؛ بنابراین برای هر $a \in A$

$$\begin{aligned} a \cdot M - M \cdot a &= w^* - \lim_\alpha a \cdot m_\alpha - m_\alpha \cdot a \\ &= w^* - \lim_\alpha a \cdot \Psi(N_\alpha) - \Psi(N_\alpha) \cdot a \\ &= w^* - \lim_\alpha \Psi(a \cdot N_\alpha - N_\alpha \cdot a) = \circ, \end{aligned}$$

و همچنین

$$\pi_A^{**}(M) \cdot a = w^* - \lim_\alpha \pi_A^{**}(\Psi(N_\alpha)) \cdot a = w^* - \lim_\alpha \pi_{A^{**}}(N_\alpha) \cdot a = a.$$

پس $M \in (A\widehat{\otimes}A)^{**}$ یک قطر مجازی برای A است و طبق قضیه [۹، قضیه ۱.۳] A میانگین‌پذیر است. □

نتیجه ۳.۲. فرض کنیم G یک گروه فشرده موضعی باشد. اگر $L^1(G)$، $L^1(G)^{**}$-دوتصویر باشد، آنگاه G میانگین‌پذیر است.

اثبات. می‌دانیم که $L^1(G)$ همواره دارای یکهٔ تقریبی کران‌دار است. از قضیه ۲.۲ نتیجه می‌شود که اگر $L^1(G)$، $L^1(G)^{**}$-دوتصویر باشد، آنگاه $L^1(G)$ میانگین‌پذیر است و طبق قضیه جانسون نتیجه می‌شود که G میانگین‌پذیر است. □

مشابه تکنیک استدلال قضیه می‌توان قضیهٔ زیر را ثابت کرد که ما از اثبات آن چشم‌پوشی می‌کنیم.

قضیه ۴.۲. فرض کنیم A یک جبر باناخ با یکهٔ تقریبی باشد. اگر A، A^{**}-دوتصویر باشد، آنگاه A شبه میانگین‌پذیر است.

فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد و $\ell^1(S)$ مجموعهٔ تمام توابع مختلط مقدار $f : S \to \mathbb{C}$ باشد به‌طوری‌که $\|f\|_1 = \sum_{s\in S} |f(s)| < \infty$. برای هر $f, g \in \ell^1(S)$ ضرب پیچشی f و g به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(f * g)(r) = \sum_{st=r} f(s)g(t) \qquad (r \in S),$$

و در حالتی که هیچ عضوی مانند s و t یافت نشود که $st = r$ آن‌گاه $\sum_{st=r} f(s)g(t) = 0$. در این صورت $(\ell^1(S), *, \|\cdot\|_1)$ یک جبر باناخ است که آن را جبر نیم‌گروهی S می‌نامیم. در مثال زیر مشاهده می‌کنیم که شرط وجود یکهٔ تقریبی (کران‌دار) در قضیه ۲.۲ و قضیه ۴.۲ ضروری است.

مثال ۵.۲. فرض کنیم S نیم‌گروه صفر چپ با حداقل دو عضو باشد؛ یعنی برای هر $s, t \in S$ داشته باشیم

$$st = s.$$

فرض کنید $\ell^1(S)$ جبر نیم‌گروهی وابسته به S باشد.
قرار دهید

$$\varphi_S(\sum_{i\in S} f(s)\delta_s) = \sum_{s\in S} f(s).$$

به‌وضوح φ_S یک مشخصه روی $\ell^1(S)$ است که آن را مشخصه افزایشی می‌نامیم. به‌راحتی دیده می‌شود که برای هر $f, g \in \ell^1(S)$

$$f * g = \varphi_S(g)f.$$

حال f_0 را عضوی در $\ell^1(S)$ در نظر بگیریم که $\varphi_S(f_0) = 1$. نگاشت

$$\rho : \ell^1(S) \to \ell^1(S)^{**}\widehat{\otimes}\ell^1(S)^{**}$$

را به‌صورت $\rho(f) = f \otimes f_0$ تعریف می‌کنیم. در این صورت ρ یک همریختی پیوسته $\ell^1(S)$- دو مدولی است که برای هر $f \in \ell^1(S)$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\pi_{\ell^1(S)^{**}} \circ \rho(f) = \pi_{\ell^1(S)^{**}}(f \otimes f_0) = f * f_0 = \varphi(f_0)f = f.$$

این نتیجه می‌دهد که $\ell^1(S)$، $\ell^1(S)^{**}$ -دوتصویر است. این در حالی است که $\ell^1(S)$ میانگین‌پذیر (شبه میانگین‌پذیر) نیست؛ زیرا دارای یکهٔ تقریبی نیست.

لم ۶.۲. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. اگر A، A^{**} -دوتصویر باشد، آنگاه A^2 در A چگال است.

اثبات. چون A یک جبر A^{**} -دوتصویر است؛ بنابراین همریختی پیوسته A -دومدولی $\rho : A \to A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ موجود است به‌طوری‌که به‌ازای هر $a \in A$، $\pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \kappa_A(a)$. حال طبق قضیه [۳، لم ۱.۷] نگاشت

$$\Psi : A^{**}\widehat{\otimes}A^{**} \to (A\widehat{\otimes}A)^{**}$$

موجود است به‌طوری‌که برای هر $a, b \in A$ و $n \in A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) $\Psi(\kappa_A(a) \otimes \kappa_A(b)) = \kappa_{A\widehat{\otimes}A}(a \otimes b)$
ب) $\Psi(n) \cdot a = \Psi(n \cdot a)$
پ) $a \cdot \Psi(n) = \Psi(a \cdot n)$
ت) $\pi_A^{**}(\Psi(n)) = \pi_{A^{**}}(n)$.

تعریف می‌کنیم $\eta = \Psi \circ \rho : A \to (A\widehat{\otimes}A)^{**}$. در این صورت η یک همریختی A -دومدولی پیوسته است که

$$\pi_A^{**} \circ \eta(a) = \pi_A^{**} \circ \Psi\rho(a) = \pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \kappa_A(a).$$

قرار می‌دهیم $\theta + \eta^*|_{(A\widehat{\otimes}A)^*}$. نگاشت θ یک همریختی A -دومدولی پیوسته است و برای هر $f \in A^*$ داریم

$$\begin{aligned}\langle \theta(\pi_A^*(f)), a\rangle &= \langle \eta^*|_{(A\widehat{\otimes}A)^*}(\pi_A^*(f)), a\rangle \\ &= \langle \eta(a), \pi_A^*(f)\rangle \\ &= \langle \pi_A^{**}\circ\eta(a), f\rangle \\ &= \langle f, a\rangle.\end{aligned}$$

در نتیجه $\theta\circ\pi_A^* = id_{A^*}$. حال به برهان خلف فرض کنیم $A^۲$ در A چگال نباشد. از قضیه هان-باناخ می‌توان نتیجه گرفت که تابعک خطی ناصفر $f \in A^*$ وجود دارد به‌طوری‌که $f|_{A^۲} = ۰$. عنصر $a_۰ \in A^{**}$ را چنان در نظر می‌گیریم که $f(a_۰) = ۱$. نگاشت $\widetilde{f} : A\widehat{\otimes}A \to \mathbb{C}$ را با ضابطهٔ

$$\widetilde{f}(a\otimes b) = f(a)f(b)$$

در نظر بگیرید. $\widetilde{f}$ یک تابعک خطی کران‌دار بر $A\widehat{\otimes}A$ است. اگر قرار دهیم $g = \theta(\widetilde{f})$، آنگاه چون $f|_{A^۲} = ۰$ پس برای هر $a \in A$، $a\cdot\widetilde{f} = ۰$. لذا $a\cdot g = ۰$ و لذا $g|_{A^۲} = ۰$. از طرفی می‌دانیم $\widetilde{f}\cdot a_۰ = \pi^*(f)$ و در نتیجه $g\cdot a_۰ = f$. بنابراین

$$۰ = g(a_۰^۲) = g\cdot a_۰(a_۰) = f(a_۰) = ۱$$

و به تناقض می‌رسیم. $\square$

مثال ۷.۲. فرض کنیم $A = \left\{\begin{bmatrix} ۰ & \alpha & \beta \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix} : \alpha, \beta, \in \mathbb{C}\right\}$. در این صورت A با جمع و ضرب اسکالر و ضرب معمولی ماتریسی و نرم زیر یک جبر باناخ است

$$\left\|\begin{bmatrix} ۰ & \alpha & \beta \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\right\| = |\alpha| + |\beta|.$$

ازآنجاکه $A^۲ = \{۰\} \neq A$ نتیجه می‌شود که جبر A، A^{**}- دوتصویر نیست.

فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. $\Delta(A)$ را مجموعهٔ تمام تابعک‌های خطی ضربی ناصفر روی A در نظر می‌گیریم. به‌عنوان یک نکته متذکر می‌شویم که اگر A یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(A)$، آنگاه توسیع یکتایی از φ به A^{**} موجود است که آن را با $\widetilde{\varphi}$ نمایش می‌دهیم. در واقع برای هر $F \in A^{**}$ قرار می‌دهیم

$$\widetilde{\varphi}(F) = F(\varphi).$$

لائو در سال ۱۹۸۸ کلاس F -جبرها را معرفی کرد [۱۲]. در واقع یک F -جبر یک جبر باناخ است که پیش دوگان یک W^* -جبر M باشد به‌طوری‌که عنصر همانی M یک تابعک خطی ضربی روی A باشد. برای اولین بار لائو میانگین‌پذیری چپ F -جبرها را تعریف و به مطالعهٔ خواص آن پرداخت. نصراصفهانی در سال ۲۰۰۱ [۱۴] مفهوم میانگین‌پذیری داخلی را برای F -جبرها تعریف کرد و نتایج بسیاری در مورد جبرهای مختلف به دست آورد. یکی از این نتایج این بود که جبر گروهی $L^۱(G)$ همواره میانگین‌پذیر داخلی است. جباری در سال ۲۰۱۱ در [۷] مفهوم φ -میانگین‌پذیر داخلی را برای جبرهای باناخ معرفی کرد.

تعریف ۸.۲. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(A)$. جبر A را φ -میانگین‌پذیر داخلی گوییم هرگاه تور کران‌دار (a_α) در A موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$

$$aa_\alpha - a_\alpha a \to ۰, \qquad \varphi(a_\alpha) \to ۱.$$

تعریف ۹.۲. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(A)$. گوییم A، φ -میانگین‌پذیر چپ است هرگاه تور (m_α) در A موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$

$$am_\alpha - \varphi(a)m_\alpha \to ۰, \qquad \varphi(m_\alpha) \to ۱.$$

قضیه ۲.۱۰. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(A)$. اگر A، φ- میانگین‌پذیر داخلی و A^{**} -دوتصویر باشد، آنگاه A، φ- میانگین‌پذیر چپ است.

اثبات. طبق فرض چون A، φ -میانگین‌پذیر داخلی است پس تور کران‌دار (a_α) در A وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$

$$aa_\alpha - a_\alpha a \to ۰, \qquad \varphi(a_\alpha) \to ۱.$$

از طرفی چون A یک جبر A^{**} -دوتصویر است پس همریختی پیوسته A -دومدولی $\rho : A \to A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ موجود است به‌طوری‌که به‌ازای هر $a \in A$

$$\pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \kappa_A(a).$$

قرار می‌دهیم $\theta_\alpha = \rho(a_\alpha)$. در این صورت (θ_α) یک تور کران‌دار در $A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ است که برای هر $a \in A$

$$a \cdot \theta_\alpha - \theta_\alpha \cdot a \to ۰, \qquad \widetilde{\varphi} \circ \pi_{A^{**}}(\theta_\alpha) \to ۱.$$

حال نگاشت $T : A^{**}\widehat{\otimes}A^{**} \to A^{**}$ را با ضابطهٔ زیر در نظر می‌گیریم:

$$T(a \otimes b) = \widetilde{\varphi}(b)a, \qquad (a, b \in A^{**}).$$

واضح است که T یک عملگر خطی کران‌دار است که برای هر $a \in A^{**}$ و $x \in A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) $T(a \cdot a) = aT(x)$

ب) $T(x \cdot a) = \widetilde{\varphi}(a)T(x)$

پ) $\widetilde{\varphi} \circ T(x) = \widetilde{\varphi} \circ \pi_{A^{**}}(x)$.

قرار می‌دهیم $n_\alpha = T(\theta_\alpha)$. در این صورت (n_α) یک تور کران‌دار در A^{**} است که

$$\begin{aligned} an_\alpha - \widetilde{\varphi}(a)n_\alpha &= aT(\theta_\alpha) - \widetilde{\varphi}(a)T(\theta_\alpha) \\ &= T(a \cdot \theta_\alpha) - T(\theta_\alpha \cdot a) \\ &= T(a \cdot \theta_\alpha - \theta_\alpha \cdot a) \to ۰, \end{aligned}$$

و همچنین

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(n_\alpha) &= \widetilde{\varphi} \circ T(\theta_\alpha) = \widetilde{\varphi} \circ \pi_{A^{**}}(\theta_\alpha) \\ &= \widetilde{\varphi} \circ \pi_{A^{**}} \circ \rho(a_\alpha) = \widetilde{\varphi}(a_\alpha) \\ &= \varphi(a_\alpha) \to ۱. \end{aligned}$$

حال فرض کنید $\varepsilon > ۰$ و $F = \{a_۱, a_۲, \cdots, a_r\}$ زیرمجموعه‌ای متناهی از A باشد. تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(a_۱n - \varphi(a_۱)n, a_۲n - \varphi(a_۲)n, \cdots, a_rn - \varphi(a_r)n, \widetilde{\varphi}(n) - ۱) : \ n \in A, \|n\| \leq K\} \\ &\subseteq (\prod_{i=۱}^{r} A^{**}) \bigoplus_{۱} \mathbb{C} \end{aligned}$$

که در اینجا $K = \sup_\alpha \|\rho(a_\alpha)\|$. در این صورت Γ یک مجموعهٔ محدب و ناتهی است و بنابراین طبق لم مازور $\overline{\Gamma}^{wk} = \overline{\Gamma}$. ازآنجاکه A در A^{**} ضعیف ستاره چگال است به‌راحتی می‌توان دید که

$$(۰, ۰, \cdots, ۰) \in \overline{\Gamma}^{wk} = \overline{\Gamma}.$$

لذا تور کران‌دار $(n_{(F,\varepsilon)})$ در A وجود دارد که

$$\|an_{(F,\varepsilon)} - \varphi(a)n_{(F,\varepsilon)}\| < \varepsilon, \qquad |\widetilde{\varphi}(n_{(F,\varepsilon)}) - ۱| < \varepsilon.$$

با در نظر گرفتن $I=\{(F,\varepsilon): F\subseteq_f A, \varepsilon>\circ\}$ (که $\subseteq_f$ نماد زیرمجموعهٔ متناهی است) و مجهز کردن I با رابطهٔ ترتیب جزئی زیر

$$(F,\varepsilon)\leq(F',\varepsilon')\Longleftrightarrow F\subseteq F', \varepsilon\geq\varepsilon'$$

نتیجه می‌گیریم که $(n_{F,\varepsilon})_{(F,\varepsilon)\in I}$ یک تور کران‌دار در A است که

$$an_{(F,\varepsilon)}-\varphi(a)n_{(F,\varepsilon)}\to\circ, \qquad \varphi(n_{(F,\varepsilon)})\to ۱,$$

و این نتیجه می‌دهد که A، φ -میانگین‌پذیر چپ است. □

مثال ۱۱.۲. فرض کنید $C^۱([\circ,۱])$ مجموعهٔ تمام توابع مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته بر $[\circ,۱]$ باشد. در این صورت $C^۱([\circ,۱])$ با نرم زیر و ضرب نقطه‌ای توابع تشکیل یک جبر باناخ جابه‌جایی می‌دهد

$$\|f\|=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty.$$

همان‌طور که می‌دانیم

$$\Delta(C^۱([\circ,۱]))=\{\phi_t: t\in[\circ,۱]\}$$

که در آن $\phi_t(f)=f(t)$. ازآنجاکه $C^۱([\circ,۱])$ یکدار است؛ بنابراین برای هر $t\in[\circ,۱]$، ϕ_t -میانگین‌پذیر داخلی است. چون طبق [۱۰، مثال ۲.۵] $C^۱([\circ,۱])$، ϕ_t -میانگین‌پذیر چپ نیست؛ بنابراین طبق قضیه ۱۰.۲ $C^۱([\circ,۱])$، $C^۱([\circ,۱])^{**}$ -دوتصویر نیست.

قضیه ۱۲.۲. فرض کنیم G یک گروه فشرده باشد. در این صورت $M(G)\widehat{\otimes}L^۱(G)$ یک جبر $(M(G)\widehat{\otimes}L^۱(G))^{**}$ -دوتصویر است اگر و فقط اگر G متناهی باشد.

اثبات. چون $M(G)$ یک جبر یکدار و $L^۱(G)$ دارای یکهٔ تقریبی کران‌دار است بنابراین $M(G)\widehat{\otimes}L^۱(G)$ دارای یکهٔ تقریبی کران‌دار است. از قضیه ۴.۲ نتیجه می‌گیریم که $M(G)\widehat{\otimes}L^۱(G)$ میانگین‌پذیر است. در نتیجه برای هر $\varphi\in\Delta(L^۱(G))$ و هر $\psi\in\Delta(M(G))$ جبر $M(G)\widehat{\otimes}L^۱(G)$، $\psi\otimes\varphi$ -میانگین‌پذیر چپ است. حال طبق [۱۰، قضیه ۳.۳] برای هر $\psi\in M(G)$ جبر $M(G)$، ψ -میانگین‌پذیر چپ است و چون $M(G)$ یکدار است در نتیجه مشخصه میانگین‌پذیر است؛ لذا طبق [۱۳، نتیجه ۲.۵] G گسسته است. پس G متناهی است. برای اثبات عکس قضیه، اگر G متناهی باشد، آنگاه $M(G)\widehat{\otimes}L^۱(G)\cong\ell^۱(G\times G)$ دوتصویری است و در نتیجه $(M(G)\widehat{\otimes}L^۱(G))^{**}$ -دوتصویر است. □

فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک فشرده باشد و $\alpha>\circ$. قرار می‌دهیم

$$Lip_\alpha(X)=\{f:X\to\mathbb{C}: p_\alpha(f)<\infty\},$$

که در آن

$$p_\alpha(f)=\sup\{\left|\frac{f(x)-f(y)}{d(x,y)^\alpha}\right| : x,y\in X, x\neq y\}.$$

در این صورت $Lip_\alpha(X)$ با ضرب نقطه‌ای توابع و نرم زیر تشکیل یک جبر باناخ جابه‌جایی می‌دهد و آن را جبر لیپشیتزی از مرتبه α می‌نامیم

$$\|f\|=\|f\|_\infty+p_\alpha(f),$$

که $\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|: x\in X\}$. این خانواده از جبرهای باناخ برای اولین بار توسط شربرت در [۱۵] مورد توجه قرار گرفت. میانگین‌پذیری جبرهای لیپشیتزی توسط گوردئو در [۴] بررسی شده است. کانیوث، لائو و پیم در [۱۱] ثابت کردند که $Lip_\alpha(X)$ یک جبر ϕ_x -میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر x یک نقطهٔ تنهای X باشد. دشتی و همکاران نیز در [۱] مشخصه میانگین‌پذیری جبرهای لیپشیتزی را مطالعه کردند.

قضیه ۱۳.۲. فرض کنیم X یک فضای متریک فشرده باشد و $\circ<\alpha<۱$. $Lip_\alpha(X)$ یک جبر $Lip_\alpha(X)^{**}$ -دوتصویر است اگر و فقط اگر X متناهی باشد.

اثبات. فرض کنیم $Lip_\alpha(X)$، $Lip_\alpha(X)^{**}$ -دوتصویر باشد. چون $Lip_\alpha(X)$ یک جبر یکدار است؛ بنابراین طبق قضیه ۲.۲ میانگین‌پذیر است و در نتیجه مشخصه میانگین‌پذیر است. حال طبق نکتهٔ پس از [۶، قضیه ۳۸] می‌توان نتیجه گرفت که X متناهی است. عکس قضیه به‌وضوح برقرار است. $\square$

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. در این صورت مجموعهٔ

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ \circ & c \end{bmatrix} : \ a, b, c \in A \right\}$$

همراه با جمع و ضرب ماتریسی و نرم زیر تشکیل یک جبر باناخ می‌دهد که آن را جبر باناخ مثلثی می‌نامیم

$$\left\| \begin{bmatrix} a & b \\ \circ & c \end{bmatrix} \right\| = \|a\| + \|b\| + \|c\|.$$

فارست و مارکو در [۲] میانگین‌پذیری ضعیف و منظم آرنز بودن این جبرها را بررسی کردند. در قضیهٔ زیر $\mathcal{T}^{**}$ -دوتصویری این جبرها را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱۴.۲. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(A)$. اگر A، φ -میانگین‌پذیر داخلی باشد، آنگاه جبر مثلثی $\mathcal{T}$، $\mathcal{T}^{**}$ -دوتصویر نیست.

اثبات. به برهان خلف فرض کنیم $\mathcal{T}$ یک جبر $\mathcal{T}^{**}$ -دوتصویر باشد. چون A، φ -میانگین‌پذیر داخلی است پس تور کران‌دار (a_α) در A وجود دارد به‌طوری‌که برای $a \in A$

$$aa_\alpha - a_\alpha a \to \circ \qquad \varphi(a_\alpha) \to ۱.$$

قرار می‌دهیم $t_\alpha = \begin{bmatrix} a_\alpha & \circ \\ \circ & a_\alpha \end{bmatrix}$. در این صورت (t_α) یک تور کران‌دار در $\mathcal{T}$ است که

$$tt_\alpha - t_\alpha t \to \circ \qquad \psi(t_\alpha) \to ۱,$$

که در اینجا $\psi \in \Delta(\mathcal{T})$ با ضابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\psi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ \circ & c \end{bmatrix}\right) = \varphi(c).$$

پس $\mathcal{T}$ یک جبر ψ -میانگین‌پذیر داخلی است و از قضیه ۲.۲ نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{T}$ یک جبر ψ -میانگین‌پذیر چپ است. قرار می‌دهیم

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} \circ & b \\ \circ & c \end{bmatrix} : \ b, c \in A \right\}.$$

به‌وضوح I یک ایده‌آل بسته در $\mathcal{T}$ است که $\psi|_I \neq \circ$. حال چون $\mathcal{T}$، ψ -میانگین‌پذیر چپ است؛ لذا طبق [۱۰، لم ۳.۱] I نیز $\psi|_I$ -میانگین‌پذیر چپ است. یعنی تور کران‌دار $i_\alpha = \begin{bmatrix} \circ & b_\alpha \\ \circ & c_\alpha \end{bmatrix}$ در I وجود دارد به‌طوری‌که

$$ii_\alpha - \psi(i)i_\alpha \to \circ, \qquad \psi(i_\alpha) \to ۱.$$

عنصر دلخواه $i = \begin{bmatrix} \circ & b \\ \circ & c \end{bmatrix}$ را در I در نظر می‌گیریم. با قرار دادن آن در معادلهٔ فوق خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \circ & b \\ \circ & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \circ & b_\alpha \\ \circ & c_\alpha \end{bmatrix} - \psi\left(\begin{bmatrix} \circ & b \\ \circ & c \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \circ & b_\alpha \\ \circ & c_\alpha \end{bmatrix} \to \circ$$

و همچنین

$$\psi\left(\begin{bmatrix} a & b_\alpha \\ \circ & c_\alpha \end{bmatrix}\right) = \varphi(c_\alpha) \to ۱.$$

از معادلهٔ فوق نتیجه می‌شود که برای b, c_α در A، $bc_\alpha - \varphi(c)b_\alpha \to \circ$. حال فرض کنید $b_\circ \in A$ به‌طوری‌که $\varphi(b_\circ) = ۱$ و $c_\circ \in \ker\varphi$. در نتیجه $b_\circ c_\alpha - \varphi(c_\circ)b_\alpha \to \circ$. با اعمال φ بر طرفین معادلهٔ فوق خواهیم داشت

$$\varphi(b_\circ)\varphi(c_\alpha) - \varphi(c_\circ)\varphi(b_\alpha) = \varphi(c_\alpha) \to \circ,$$

و به تناقض می‌رسیم؛ بنابراین جبر $\mathcal{T}$، $\mathcal{T}^{**}$-دوتصویر نیست.

□

References

[1] Dashti, M., Nasr Isfahani, R., & Soltani Renani, S. (2014). Character amenability of Lipschitz algebras. *Canad. Math. Bull*, 57(1), 37–41. DOI: https://doi.org/10.4153/CMB-2012-015-3.

[2] Forrest, B.E., & Marcoux, L.W. (2002). Weak amenability of triangular Banach algebras. *Trans. Amer. Soc*, 354(4), 1435–1452. DOI: https://doi.org/10.1090/s0002-9947-01-02957-9.

[3] Ghahramani, F., Loy, R.J., & Willis, G.A. (1996). Amenability and weak amenability of second conjugate Banach algebras. *Proc. Amer. Math. Soc*, 124, 1489–1497. DOI: https://doi.org/10.1090/s0002-9939-96-03177-2.

[4] Gourdeau, F. (1992). Amenability of Lipschitz algebras. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc*, 112, 581–588. DOI: https://doi.org/10.1017/s0305004100071267.

[5] Helemskii, A.Ya. (1989). The Homology of Banach and Topological Algebras. *Kluwer Academic Publishers, Holland*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-009-2354-6.

[6] Hu, Z., Monfared, M.S., & Traynor, T. (2009). On character amenable Banach algebras. *Studia Math*, 193, 53–78. DOI: https://doi.org/10.4064/sm193-1-3.

[7] Jabbari, A., Mehdi Abad, T., & Zaman Abadi, M. (2011). On ϕ-inner amenable Banach algebras. *Colloq. Math*, 122, 1–10. DOI: https://doi.org/10.4064/cm122-1-1.

[8] Johnson, B.E. (1972). Cohomology in Banach algebras. *Mem. Amer. Math. Soc*, 127.

[9] Johnson, B.E. (1972). Approximate diagonals and cohomology of certain annihilator Banach algebras. *Amer. J. Math*, 94, 685–698. DOI: https://doi.org/10.2307/2373751.

[10] Kaniuth, E., Lau, A.T., & Pym, J. (2008). On ϕ-amenability of Banach algebras. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc*, 144, 85–96. DOI: https://doi.org/10.1017/S0305004107000874.

[11] Kaniuth, E., Lau, A.T., & Pym, J. (2008). On character amenability of Banach algebras. *J. Math. Anal. Appl*, 344, 942–955. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.03.037.

[12] Lau, A.T. (1983). Analysis on a class of Banach algebras with applications to harmonic analysis on locally compact groups and semigroups. *Fund. Math*, 118, 161–175. DOI: https://doi.org/10.4064/FM-118-3-161-175.

[13] Monfared, M.S. (2008). Character amenability of Banach algebras. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc*, 144, 697–706. DOI: https://doi.org/10.1017/S0305004108001126.

[14] Nasr-Isfahani, R. (2001). Inner amenability of Lau algebras. *Arch. Math*, (Brno) 37, 45–55.

[15] Sherbert, D.R. (1963). Banach algebras of Lipschitz functions. *Pacifc J. Math*, 13(4), 1387–1399. DOI: https://doi.org/10.2140/pjm.1963.13.1387.

Measure Algebras and Applications

Table of Contents

Measure Algebras and Applications

Scientific Biannual Journal at the University of Qom

Vol 1. Issue 1. Autumn & Winter (September 2023).

Publisher: University of Qom
Director in Charge: Alireza Bagheri Salec (Ph.D)
Editor in Chief: Morteza Mirzaee Azandaryani (Ph.D)

- ”Measure Algebras and Applications” (MAA) presents papers that treat mathematical analysis, especially the ones related to measure spaces (in Persian with English Extended Abstract).
- The authors are fully responsible for the content of their papers.
- The content of MAA is open to be cited on the condition that the source is mentioned.
- MAA is free to edit, summarize and revise the papers.

Address: University of Qom, Qom, Iran.
Tel: 00982532103360
Website: maa.qom.ac.ir ∗ Email: maa@qom.ac.ir