Measure Algebras and Applications

Ultrafilters on the collection of compact subsets of a topological space

Mahmoud Mohammadzadeh Jafarabadi[1] , **Mohammad Akbari Tootkaboni**[2]✉

1. Department of Mathematics, University of Guilan, Rasht, Guilan, Iran.
   Email: mohammadzadeh.j.m@gmail.com
2. Corresponding Author, Department of Mathematics, University of Guilan, Rasht, Guilan, Iran.
   Email: tootkaboni@guilan.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 11 September 2024
Received in revised form:
24 November 2024
Accepted: 17 December 2024
Published Online:
21 December 2024

Keywords:
Stone-$\check{C}$ech compactification,
Minimal Ideal,
Syndetic Set,
Piecewise Syndetic Set,
Ultrafilter

2020 Mathematics Subject Classification:
54D80, 54B20

ABSTRACT

Let X be a Hausdorff topological space and let $\mathcal{I} = \mathcal{P}_c(X)$ denote the collection of all non-empty compact subsets of X. Let $\beta\mathcal{I}$ denote the collection of all ultrafilters on the set $\mathcal{I}$ and let $(\beta\mathcal{I}, \uplus)$ be the compact Hausdorff right topological semigroup that is the Stone-$\check{C}$ech compactification of the semigroup $(\mathcal{I}, \cup)$ equipped with discrete topology. A. D. Grainger and S. Koppelberg considered $(\beta\mathcal{I}, \uplus)$ when X is a discrete space and obtained some results about it. In this paper we study $(\beta\mathcal{I}, \uplus)$ when X is a topological space and obtain some results from [2], [3] and [6].

Cite this article: Mohammadzadeh Jafarabadi, M., & Akbari Tootkaboni, M. (2024). Ultrafilters on the collection of compact subsets of a topological space. *Measure Algebras and Applications*, 2(2), 151–161. http://doi.org/10.22091/maa.2025.13139.1036

©The Author(s).
Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/maa.2025.13139.1036

Extended Abstract

Introduction

For every discrete semigroup S, the set βS of all ultrafilters on S is naturally a compact right-topological semigroup. Grainger characterized the minimal ideal of Stone-$\check{C}$ech compactification of the finite subsets of an infinite set.

We denote the set of finite ordinals by ω and the set of natural (counting) numbers by $\mathbb{N}$. Let X be a non-compact Hausdorff topological space, and let $\mathcal{I} = \mathcal{P}_c(X)$, i.e., $\mathcal{I}$ is the collection of all non-empty compact subsets of X. We denote by $\mathcal{P}_f(X)$ the collection of all non-empty finite subsets of X. Clearly, $\mathcal{P}_f(X) \subseteq \mathcal{P}_c(X) = \mathcal{I}$. We are now ready to state some definitions and theorems from [2, 3].

Let $a \in X$, we denote $\dot{a} = \{i \in \mathcal{I} : a \in i\}$ and $B^\dagger = \bigcap_{a\in B} \dot{a}$. For $A \subseteq X$, define

$$\mathcal{G}_A = \{B^\dagger : B \in \mathcal{P}_c(A)\} \cup \{\mathcal{I} - B^\dagger : B \in \mathcal{P}_c(X - A)\}$$

and

$$\mathcal{G}_A^f = \{B^\dagger : B \in \mathcal{P}_f(A)\} \cup \{\mathcal{I} - B^\dagger : B \in \mathcal{P}_f(X - A)\}.$$

It is obvious that $A^\dagger = \{B \in \mathcal{I} : A \subseteq B\}$. Let X be a Hausdorff topological space, then for $A \subseteq X$, $cl_X(A)$ is compact if and only if $A^\dagger \neq \emptyset$. Also $A^\dagger \cap B^\dagger = (A \cup B)^\dagger$, $\{a\}^\dagger = \dot{a}$ and $\mathcal{G}_A^f \subseteq \mathcal{G}_A$. Define $\mathcal{H} = \{\mathcal{I} - [X]^A : A \in \mathcal{I}\}$, where $[X]^A = \{B \subseteq X : B$ is homeomorphic with $A\}$. We denote $\mathcal{H}_f = \{\mathcal{I} - [X]^A : A$ is finite$\}$. It is obvious $\mathcal{H}_f \subseteq \mathcal{H}$.

As an important example, let $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ be a subset of $\mathbb{R}$ with natural topology and $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Then $\mathcal{I} - [X]^A = \mathcal{P}_f(X - \{0\})$ and so $\mathcal{G}_A \cup \mathcal{H}$ does not have the finite intersection property.

***Proposition* 0.1.** *Let $A \subseteq X$, $F \subseteq A$ and $G \subseteq X - A$ be non-empty compact subsets of X. Then there exists a compact subset K of X such that $F \subseteq K$, $K \cap G = \emptyset$ and $K \notin \bigcup_{i=1}^n [X]^{C_i}$ for each $C_1, ..., C_n \in \mathcal{I}$ if and only if $\mathcal{G}_A \cup \mathcal{H}$ has the finite intersection property. In particular, $\mathcal{G}_A$, $\mathcal{G}_A^f$, $\mathcal{G}_A^f \cup \mathcal{H}_f$ and $\mathcal{G}_A \cup \mathcal{H}_f$ have the finite intersection property.*

Note that if B is a finite subset of A, and $|B| < |A|$, then there exists $C \in \mathcal{P}_c(A)$ such that $|B| + 1 \leq |C|$ and $\bigcap_{a\in C} \dot{a} \cap [X]^B = \emptyset$. Therefore, if A is non-compact, then $\mathcal{G}_A \cup \{[X]^C\}$ does not have the finite intersection property for any $C \in \mathcal{P}_f(A)$. By Proposition 2.4 in [2] we have:
i) Let $A, B \in \mathcal{P}_f(X)$ such that $|A| \leq |B|$. Then $\mathcal{G}_A^f \cup \{[X]^B\}$ has the finite intersection property.
ii) Let $A, B \in \mathcal{I}$. If $A^\dagger \cap [X]^B \cap (\mathcal{I} - C^\dagger) \neq \emptyset$ for each $C \in \mathcal{P}_c(X - A)$, then $\mathcal{G}_A \cup \{[X]^B\}$ has the finite intersection property.

Now, let $A \subseteq X$ and $B \in \mathcal{I}$. We say that B has the finite intersection property respect to A if $\mathcal{G}_A \cup \{[X]^B\}$ has the finite intersection property, then we write $[A, B] \neq \emptyset$. If $A \subseteq X$ is non-compact and $B \subseteq A$, then $\{\mathcal{P}_c(A)\} \cup \mathcal{G}_B \cup \mathcal{H}$ has the finite intersection property (see Proposition 3.1 in [3]). Let X be a topological space and $\mathcal{I} = \mathcal{P}_c(X)$. Let $\mathcal{I}_C = \{a \in \mathcal{I} : a \cap C \neq \emptyset\}$ for $C \subseteq X$. Define the collection

$$\mathcal{W}_X = \{\mathcal{I}_C : C \subseteq \text{ X is non-compact}\}.$$

Observe that each element of $\mathcal{W}_X$ is an ideal of $(\mathcal{I}, \cup)$ and $\mathcal{I}_C = \mathcal{I} - \mathcal{P}_c(X - C)$. For any $A \subseteq X$, then $\mathcal{W}_X \cup \mathcal{G}_A \cup \mathcal{H}$ has the finite intersection property, also if C is non compact, then $\{\mathcal{I} - \mathcal{P}_c(X - C)\} \cup \mathcal{G}_A \cup \mathcal{H}$

has the finite intersection property [Corollary 3.6 in [3]]. Let X be a topological space and $\mathcal{I} = \mathcal{P}_c(X)$. For $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{P}(\mathcal{I})$, define $\mathcal{A} \subseteq_{ess} \mathcal{B}$ if and only if for every $A \in \mathcal{A}$, there exists a family $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ such that $\bigcap \mathcal{U} \subseteq A$ (we say that $\mathcal{A}$ is essentially contained in $\mathcal{B}$). Also, define $\mathcal{A} =_{ess} \mathcal{B}$ if and only if $\mathcal{A} \subseteq_{ess} \mathcal{B}$ and $\mathcal{B} \subseteq_{ess} \mathcal{A}$. It is obvious that if $\mathcal{A} \subseteq_{ess} \mathcal{B}$ and $\mathcal{B}$ has the finite intersection property, then $\mathcal{A}$ has the finite intersection property and $\mathcal{A} =_{ess} \mathcal{B}$ implies that $\mathcal{A}$ has the finite intersection property if and only if $\mathcal{B}$ has the finite intersection property. Also, if $\mathcal{A} \subseteq_{ess} \mathcal{B}$ and $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I})$, then $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} =_{ess} \mathcal{B}$ and $\mathcal{A} \cup \mathcal{C} \subseteq_{ess} \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. Let X be a topological space and $\mathcal{I} = \mathcal{P}_c(X)$. For $A \subseteq X$, define

$$\mathcal{X}_A = \mathcal{W}_X \cup \mathcal{V} \cup \{B^\dagger : B \in \mathcal{P}_c(A)\},$$

where $B^\dagger = \bigcap_{a \in B} \dot{a} = \{k \in \mathcal{I} : B \subseteq k\}$ for $B \in \mathcal{I}$ and $\mathcal{V} = \{V_A : A \in \mathcal{I}\}$ for

$$V_A = \bigcap_{B \in \mathcal{P}_c(A)} \mathcal{I} - [X]^B = \mathcal{I} - \bigcup_{B \in \mathcal{P}_c(A)} [X]^B.$$

It is obvious that $\mathcal{W}_X \cup \{B^\dagger : B \in \mathcal{P}_c(A)\}$ is a collection of ideals of $(\mathcal{I}, \cup)$. Let A be homeomorphic with X. Then $\bigcup_{B \in \mathcal{P}_c(A)} [X]^B = \mathcal{P}_c(X) = \mathcal{I}$ and so $V_A = \emptyset$. Hence $\mathcal{X}_A$ is not a collection of ideals of $(\mathcal{I}, \cup)$. But if A is a discrete subset of X, then $\mathcal{V}_A$ is a collection of ideals of $(\mathcal{I}, \cup)$. If $A \subseteq X$, then $\mathcal{X}_A \cup \mathcal{G}_A$ has the finite intersection property. In particular, $\mathcal{X}_A$ has the finite intersection property. If A and B are subsets of X such that $A \subseteq B$, then $\mathcal{X}_A \cup \mathcal{G}_B$ has the finite intersection property.

***Theorem* 0.2** (Koppelberg)**.** *Let X be a non-compact Hausdorff topological space and $\mathcal{I} = \mathcal{P}_c(X)$. For semigroup $(\beta\mathcal{I}, \uplus)$, $K(\beta\mathcal{I}) = \beta_X(\mathcal{I})$, where $\beta_X(\mathcal{I}) = \{p \in \beta\mathcal{I} : \mathcal{G}_X \subseteq p\}$ and $\beta_X^f(\mathcal{I}) = \{p \in \beta\mathcal{I} : \mathcal{G}_X^f \subseteq p\}$.*

Conclusion

In this paper, we introduced and analyzed the families $\mathcal{G}_A$, $\mathcal{H}$, and $\mathcal{X}_A$ of compact-subset ideals in a non-compact Hausdorff space X, establishing necessary and sufficient conditions for their finite intersection property and demonstrating essential containment relations among them. These results provide a unified framework for understanding the ideal structure of compact-subset spaces and Stone-$\check{C}$ech compactification of the compact subsets of the non-compact topological space.

Acknowledgment

We thank A. D. Grainger for providing us with his paper.

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۳، دوره ۲، شماره ۲، ص ۱۶۱-۱۵۱

ابرفیلترها روی خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های فشرده از فضای توپولوژیک

محمود محمدزاده جعفرآبادی [۱] ، محمد اکبری توتکابنی [۲]✉

۱. دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، گیلان، ایران. رایانامه: Mohammadzadeh. j. m@gmail. com
۲. نویسندهٔ مسئول، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، گیلان، ایران. رایانامه: tootkaboni@guilan. ac. ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۶/۲۱
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۹/۴
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۹/۲۷
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۱۰/۱

کلمات کلیدی:
فشرده‌سازی استون-چخ،
ایده‌آل مینیمال،
مجموعه متصل،
مجموعه تکه‌ای متصل،
ابرفیلتر

رده‌بندی ریاضی:
54D80, 54B20

چکیده

فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی هاسدورف و $\mathcal{I} = \mathcal{P}_c(X)$ نمایانگر مجموعه تمام زیرمجموعه‌های فشرده و ناتهی X باشد. فرض کنید $\beta\mathcal{I}$ مجموعه تمام ابرفیلترها بر روی مجموعه $\mathcal{I}$ باشد و $(\beta\mathcal{I}, \uplus)$ فشرده‌سازی استون-چخ آن از نیم‌گروه $(\mathcal{I}, \cup)$ باشد. اِی. دی. گرینجر و اس. کوپلبرگ، نیم‌گروه $(\beta\mathcal{I}, \uplus)$ را در حالتی که X یک فضای گسسته است بررسی کرده و نتایجی درباره آن به دست آوردند. در این مقاله، ما به مطالعه $(\beta\mathcal{I}, \uplus)$ در حالتی که X یک فضای توپولوژیکی است می‌پردازیم و برخی نتایج از [۲]، [۳] و [۶] را به دست می‌آوریم.

استناد: محمدزاده جعفرآبادی، محمود.، اکبری توتکابنی، محمد. (۱۴۰۳). ابرفیلترها روی خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های فشرده از فضای توپولوژیک. جبرهای اندازه و کاربردها، ۲(۲)، ۱۶۱-۱۵۱.

http://doi.org/10.22091/maa.2025.13139.1036

ناشر: دانشگاه قم.

© نویسندگان.

۱ مقدمه

برای هر نیم‌گروه گسسته S، مجموعه تمام ابرفیلترها روی S تشکیل یک نیم‌گروه توپولوژیک راست فشرده می‌دهد که آن را با βS نشان می‌دهیم.

مجموعه اعداد حسابی را با ω و مجموعه اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}$ نشان می‌دهیم. فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی هاسدورف غیرفشرده باشد. در این صورت مجموعه تمام زیرمجموعه‌های فشرده ناتهی و تمام زیرمجموعه‌های متناهی ناتهی از X را به ترتیب با $\mathcal{I} = \mathcal{P}_c(X)$ و $\mathcal{P}_f(X)$ نمایش می‌دهیم. بدیهی است که $\mathcal{P}_f(X) \subseteq \mathcal{P}_c(X) = \mathcal{I}$. حال به بیان تعاریف و قضایایی از [۲] و [۳] می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱. فرض کنید $a \in X$. در این صورت $\dot{a} = \{i \in \mathcal{I} : a \in i\}$ و $B^\dagger = \bigcap_{a\in B} \dot{a}$. برای $A \subseteq X$، تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{G}_A = \{B^\dagger : B \in \mathcal{P}_c(A)\} \cup \{\mathcal{I} - B^\dagger : B \in \mathcal{P}_c(X - A)\}$$

و

$$\mathcal{G}_A^f = \{B^\dagger : B \in \mathcal{P}_f(A)\} \cup \{\mathcal{I} - B^\dagger : B \in \mathcal{P}_f(X - A)\}.$$

بدیهی است که $A^\dagger = \{B \in \mathcal{I} : A \subseteq B\}$. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد، آنگاه برای هر زیرمجموعه مانند A از X، $cl_X(A)$ فشرده است اگر و تنها اگر $A^\dagger \neq \emptyset$. همچنین $A^\dagger \cap B^\dagger = (A \cup B)^\dagger$ و $\{a\}^\dagger = \dot{a}$. بدیهی است که $\mathcal{G}_A^f \subseteq \mathcal{G}_A$.

تعریف ۲.۱. تعریف می‌کنیم $\mathcal{H} = \{\mathcal{I} - [X]^A : A \in \mathcal{I}\}$ که در آن $[X]^A = \{B \subseteq X :$ A با B همئومورفیک است$\}$. همچنین قرار می‌دهیم

$$\mathcal{H}_f = \{\mathcal{I} - [X]^A : A \text{ متناهی است}\}.$$

به‌راحتی دیده می‌شود که $\mathcal{H}_f \subseteq \mathcal{H}$.

مثال ۳.۱. فرض کنید $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ با توپولوژی طبیعی باشد و $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. آنگاه

$$\mathcal{I} - [X]^A = \mathcal{P}_f(X - \{0\})$$

درنتیجه $\mathcal{G}_A \cup \mathcal{H}$ خاصیت مقطع متناهی ندارد.

گزاره ۴.۱. فرض کنید برای $A \subseteq X$، $F \subseteq A$ و $G \subseteq X - A$ مجموعه‌های فشرده ناتهی از X باشند. آنگاه زیرمجموعه فشرده K از X به قسمی موجود است که $K \cap G = \emptyset$ و به‌ازای هر $C_1, C_2, \cdots, C_n \in \mathcal{I}$ داشته باشیم $K \notin \bigcup_{i=1}^n [X]^{C_i}$ اگر و تنها اگر $\mathcal{G}_A \cup \mathcal{H}$ دارای خاصیت مقطع متناهی باشد. به‌ویژه، مجموعه‌های $\mathcal{G}_A$، $\mathcal{G}_A^f$، $\mathcal{G}_A^f \cup \mathcal{H}_f$ و $\mathcal{G}_A \cup \mathcal{H}_f$ دارای خاصیت مقطع متناهی باشند.

اثبات. فرض کنید $F \subset \mathcal{P}_c(A)$ و $G \subseteq \mathcal{P}_c(X-A)$ مجموعه‌های متناهی باشند که $F \cup G \neq \emptyset$. فرض کنید $\{A_1, ..., A_n\} \subseteq \mathcal{I}$ به قسمی که $[X]^{A_i} \cap [X]^{A_j} = \emptyset$ که $1 \leq i \neq j \leq n$. زیرمجموعه فشرده K از X به قسمی موجود است که $\cup F \subseteq K$، $K \cap (\cup G) = \emptyset$ و $K \notin \bigcup_{i=1}^n [X]^{A_i}$. درنتیجه

$$K \in \left(\bigcap_{D\in F} D^\dagger\right) \cap \left(\bigcap_{C\in G} \mathcal{I} - C^\dagger\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \mathcal{I} - [X]^{A_i}\right).$$

□

توجه کنید که اگر B زیرمجموعه‌ای متناهی از A باشد و $|B| < |A|$، آنگاه $C \in \mathcal{P}_c(A)$ به قسمی موجود است که $|B|+1 \leq |C|$ و $\bigcap_{a\in C} \dot{a} \cap [X]^B = \emptyset$. بنابراین، اگر A فشرده نباشد، آنگاه به‌ازای هر $C\mathcal{P}_f(A)$، $\mathcal{G}_A \cup \{[X]^C\}$ دارای خاصیت مقطع متناهی نیست.

گزاره ۵.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد.

(الف) فرض کنید $A, B \in \mathcal{P}_f(X)$ به‌طوری‌که $|A| \leq |B|$. آنگاه $\mathcal{G}_A^f \cup \{[X]^B\}$ دارای خاصیت مقطع متناهی است.

(ب) فرض کنید $A, B \in \mathcal{I}$. اگر برای هر $C \in \mathcal{P}_c(X-A)$ داشته باشیم $A^\dagger \cap [X]^B \cap (\mathcal{I} - C^\dagger) \neq \emptyset$، آنگاه $\mathcal{G}_A \cup \{[X]^B\}$ دارای خاصیت مقطع متناهی است.

اثبات. برای مشاهده روند اثبات (الف) به گزاره ۴.۲ در [۲] رجوع کنید. اثبات (ب) نیز بدیهی است. □

مثال ۶.۱. فرض کنید $X = [0, 1] \cup \{2\} \subset \mathbb{R}$ مجموعه‌ای با توپولوژی نسبی باشد. فرض کنید $A = \{2\}$ و $B = [0, 1]$. آنگاه $\dot{2} = \{C \in \mathcal{I} : 2 \in C\}$ و $[X]^B = \{[a, b] : [a, b] \subseteq [0, 1]\}$. بدیهی است که $\dot{2} \cap [X]^B = \emptyset$.

تعریف ۷.۱. فرض کنید $A \subseteq X$ و $B \in \mathcal{I}$. اگر $\mathcal{G}_A \cup \{[X]^B\}$، آنگاه B دارای خاصیت مقطع متناهی نسبت به A است و می‌نویسیم $[A, B] \neq \emptyset$.

گزاره ۸.۱. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای غیرفشرده از فضای هاسدورف X باشد و $B \subseteq A$. آنگاه $\{\mathcal{P}_c(A)\} \cup \mathcal{G}_B \cup \mathcal{H}$ دارای خاصیت مقطع متناهی است.

اثبات. به گزاره ۱.۳ در [۳] رجوع کنید. □

تعریف ۹.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد و $\mathcal{I} = \mathcal{P}_c(X)$ فرض کنید برای $C \subseteq X$، $\mathcal{I}_C = \{a \in \mathcal{I} : a \cap C \neq \emptyset\}$ در این صورت

$$\mathcal{W}_X = \{\mathcal{I}_C : C \subseteq X \text{ فشرده نباشد}\}.$$

توجه کنید که هر عنصر از $\mathcal{W}_X$ یک ایده‌آل از نیم‌گروه $(\mathcal{I}, \cup)$ است و همچنین داریم:

$$\mathcal{I}_C = \mathcal{I} - \mathcal{P}_c(X - C).$$

گزاره ۱۰.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد.

الف) فرض کنید $A \subseteq X$. در این صورت $\mathcal{W}_X \cup \mathcal{G}_A \cup \mathcal{H}$ دارای خاصیت مقطع متناهی است.

ب) فرض کنید $A \subseteq X$ و $C \subseteq X$. اگر C فشرده نباشد، آنگاه $\{\mathcal{I} - \mathcal{P}_c(X - C)\} \cup \mathcal{G}_A \cup \mathcal{H}$ دارای خاصیت مقطع متناهی است.

اثبات. (الف) فرض کنید $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{W}_X$، $F \subseteq \mathcal{P}_c(A)$ و $G \subseteq \mathcal{P}_c(X - A)$ زیرمجموعه‌های متناهی ناتهی باشند و برای $k \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\{A_1, ..., A_k\} \subset \mathcal{I}$. بدون کاستن از کلیت فرض کنید $\mathcal{E} \neq \emptyset$. فرض کنید $E_\mathcal{E} = \{C \subseteq X : \mathcal{I}_C \in \mathcal{E}\}$. برای هر $C \in E_\mathcal{E}$، $b_C \in C$ را به قسمی در نظر می‌گیریم که $b_C \notin \bigcup G$. تعریف می‌کنیم $Q_\mathcal{E} = \left[\bigcup_{C \in E_\mathcal{E}} C\right] \cap [X - \bigcup G]$. مشاهده می‌شود که $Q_\mathcal{E}$ نامتناهی است و $\{b_C\}_{C \in E_\mathcal{E}} \subset Q_\mathcal{E}$. ازآنجایی‌که $(\bigcup F) \cup Q_\mathcal{E} \subseteq X - G$، $i \in \mathcal{I}$ به قسمی موجود است که برای هر $j = 1, ..., k$، $i \notin [X]^{A_j}$، $i \subseteq (\bigcup F) \cup Q_\mathcal{E}$، $\{b_C\}_{C \in E_\mathcal{E}} \cup (\bigcup F) \subseteq i$، و $i \notin [X]^{A_j}$. بنابراین

$$i \in \left[\bigcap_{C \in E_\mathcal{E}} I_C\right] \cap \left[\bigcap_{a \in F} \dot{a}\right] \cap \left[\bigcap_{a \in G} \mathcal{I} - \dot{a}\right] \cap \left[\bigcap_{j=1}^{k} \mathcal{I} - [X]^{A_j}\right].$$

(ب) به نتیجه‌ی ۶.۳ در [۳] رجوع کنید. □

تعریف ۱۱.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد و $\mathcal{I} = \mathcal{P}_c(X)$. برای $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I})$، می‌گوییم $\mathcal{A}$ به‌طور اساسی در $\mathcal{B}$ جای دارد و می‌نویسیم $\mathcal{A} \subseteq_{\text{ess}} \mathcal{B}$ اگر و تنها اگر برای هر $A \in \mathcal{A}$، خانواده‌ای $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ به قسمی موجود باشد که $\bigcap \mathcal{U} \subseteq A$. همچنین $\mathcal{A} =_{\text{ess}} \mathcal{B}$ اگر و تنها اگر $\mathcal{A} \subseteq_{\text{ess}} \mathcal{B}$ و $\mathcal{B} \subseteq_{\text{ess}} \mathcal{A}$.

بدیهی است که اگر $\mathcal{A} \subseteq_{\text{ess}} \mathcal{B}$ و $\mathcal{B}$ دارای خاصیت مقطع متناهی باشد، آنگاه $\mathcal{A}$ نیز دارای خاصیت مقطع متناهی است و $\mathcal{A} =_{\text{ess}} \mathcal{B}$، ایجاب می‌کند $\mathcal{A}$ دارای خاصیت مقطع متناهی است اگر و تنها اگر $\mathcal{B}$ دارای خاصیت مقطع متناهی باشد. همچنین، اگر $\mathcal{A} \subseteq_{\text{ess}} \mathcal{B}$ و $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I})$، آنگاه

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} =_{\text{ess}} \mathcal{B}, \quad \text{و} \quad \mathcal{A} \cup \mathcal{C} \subseteq_{\text{ess}} \mathcal{B} \cup \mathcal{C}.$$

تعریف ۱.۱۲. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد و $\mathcal{I} = \mathcal{P}_c(X)$. برای $A \subseteq X$، تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{X}_A = \mathcal{W}_X \cup \mathcal{V} \cup \{B^\dagger : B \in \mathcal{P}_c(A)\},$$

که برای $B \in \mathcal{I}$، $B^\dagger = \bigcap_{a \in B} \dot{a} = \{k \in \mathcal{I} : B \subseteq k\}$ و برای $V_A = \bigcap_{B \in \mathcal{P}_c(A)} \mathcal{I} - [X]^B = \mathcal{I} - \bigcup_{B \in \mathcal{P}_c(A)} [X]^B$، $\mathcal{V} = \{V_A : A \in \mathcal{I}\}$.

بدیهی است که $\mathcal{W}_X \cup \{B^\dagger : B \in \mathcal{P}_c(A)\}$ یک مجموعه از ایده‌آل‌های $(\mathcal{I}, \cup)$ است. فرض کنید A با X هم‌ریخت باشد. در این صورت، $\bigcup_{B \in \mathcal{P}_c(A)} [X]^B = \mathcal{P}_c(X) = \mathcal{I}$ و $V_A = \emptyset$. درنتیجه، $\mathcal{X}_A$ مجموعه‌ای از ایده‌آل‌های $(\mathcal{I}, \cup)$ نیست. اما اگر A زیرمجموعه‌ای گسسته از X باشد، آنگاه V_A یک مجموعه از ایده‌آل‌های $(\mathcal{I}, \cup)$ خواهد بود.

گزاره ۱.۱۳. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد.

الف) اگر $A \subseteq X$، آنگاه $\mathcal{X}_A \cup \mathcal{G}_A$ دارای خاصیت مقطع متناهی است. به‌ویژه، $\mathcal{X}_A$ دارای خاصیت مقطع متناهی است.

ب) اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از X باشند به قسمی که $A \subseteq B$، آنگاه $\mathcal{X}_A \cup \mathcal{G}_B$ دارای خاصیت مقطع متناهی است.

۲ یک افراز از $\beta\mathcal{I}$

تعریف ۱.۲. فرض کنید برای $A \subseteq X$، $\beta_A(\mathcal{I}) = \{p \in \beta\mathcal{I} : \mathcal{G}_A \subseteq p\}$ و $\beta_A^f(\mathcal{I}) = \{p \in \beta\mathcal{I} : \mathcal{G}_A^f \subseteq p\}$.

بدیهی است که $\beta_A(\mathcal{I}) \subseteq \beta_A^f(\mathcal{I})$.

گزاره ۲.۲. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد.

الف) مجموعه $\{\beta_A^f(\mathcal{I}) : A \subseteq X\}$ یک افراز از $\beta\mathcal{I}$ است.

ب) مجموعه $\{\beta_A(\mathcal{I}) : A \subseteq X\}$ یک افراز از $\beta\mathcal{I}$ است.

اثبات. (الف) فرض کنید برای $p \in \beta\mathcal{I}$، $A = \{a \in X : \dot{a} \in p\}$. در این صورت $p \in \beta_A^f(\mathcal{I})$. فرض کنید برای زیرمجموعه‌های A و B از X که $A \neq B$، $a_\circ \in A - B$. بنابراین برای هر $p \in \beta_A^f(\mathcal{I})$، $\dot{a}_\circ \in p$ و برای هر $p \in \beta_B^f(\mathcal{I})$، داریم $\mathcal{I} - \dot{a}_\circ \in p$ لذا $\beta_A^f(\mathcal{I}) \cap \beta_B^f(\mathcal{I}) = \emptyset$.

(ب) فرض کنید برای $p \in \beta\mathcal{I}$، $\mathcal{U} = \{C \in \mathcal{I} : C^\dagger \in p\}$ و $A = \bigcup \mathcal{U}$. در این صورت $p \in \beta_A(\mathcal{I})$. فرض کنید برای زیرمجموعه‌های A و B از X که $A \neq B$، $a_\circ \in A - B$. بنابراین برای هر $p \in \beta_A(\mathcal{I})$، $\dot{a}_\circ \in p$ و برای هر $p \in \beta_B(\mathcal{I})$، $\mathcal{I} - \dot{a}_\circ \in p$ لذا $\beta_A(\mathcal{I}) \cap \beta_B(\mathcal{I}) = \emptyset$. □

گزاره ۳.۲. اگر $A \subseteq X$، آنگاه $\beta_A(\mathcal{I}) = \bigcap_{F \in \mathcal{G}_A} \widehat{F}$، $\beta_A^f(\mathcal{I}) = \bigcap_{F \in \mathcal{G}_A^f} \widehat{F}$. به‌ویژه، $\beta_A(\mathcal{I})$ و $\beta_A^f(\mathcal{I})$ بسته هستند.

اثبات. فرض کنید $p \in \beta\mathcal{I}$. لذا $p \in \beta_A(\mathcal{I})$ اگر و تنها اگر برای هر $F \in \mathcal{G}_A$، داشته باشیم $F \in p$ اگر و تنها اگر $p \in \widehat{F}$ برای هر $F \in \mathcal{G}_A$. □

بدیهی است که اگر $A \subseteq X$ فشرده نباشد، آنگاه $\bigcap \mathcal{G}_A = \emptyset$ و نیز $\bigcap \mathcal{G}_\emptyset = \emptyset$. درنتیجه ابرفیلتر $\beta_\emptyset(\mathcal{I})$ و $\beta_A(\mathcal{I})$ برای زیرمجموعه غیرفشرده A از X ابرفیلتر اصلی نیستند. یعنی این مجموعه‌ها زیرمجموعه‌هایی بسته از $\mathcal{I}^* = \beta\mathcal{I} - \mathcal{I}$ هستند.

گزاره ۴.۲. اگر $a \in \mathcal{I}$، آنگاه $\bigcap \mathcal{G}_a = \{a\}$.

اثبات. بدیهی است که $a \in \bigcap \mathcal{G}_a$. اگر $k \in \bigcap \mathcal{G}_a$، آنگاه $a \subseteq k$ و $k \subseteq a$. □

۳ ویژگی‌های $\beta_\circ^{(A)}(\mathcal{I})$ و $\beta_B^{(A)}(\mathcal{I})$ برای $A \subseteq X$ و $B \in \mathcal{I}$

تعریف ۱.۳. فرض کنید برای $A \subseteq X$ و $B \in \mathcal{I}$، $\beta_\circ^{(A)}(\mathcal{I}) = \{p \in \beta\mathcal{I} : \mathcal{G}_A \cup \mathcal{H} \subseteq p\}$، $\beta_f^{(A)}(\mathcal{I}) = \{p \in \beta\mathcal{I} : \mathcal{G}_A^f \cup \mathcal{H}_f \subseteq p\}$ و $\beta_B^{(A)}(\mathcal{I}) = \{p \in \beta\mathcal{I} : [X]^B \in p$ و $\mathcal{G}_A \subseteq p\}$.

توجه داشته باشید که برای $B \in \mathcal{I}$ و $A \subseteq X$، $\beta_\circ^{(A)}(\mathcal{I}) \subseteq \beta_f^{(A)}(\mathcal{I})$، $\beta_\circ^{(A)}(\mathcal{I}) \subseteq \beta_A(\mathcal{I})$ و $\beta_B^{(A)}(\mathcal{I}) \subseteq \beta_A(\mathcal{I})$. همچنین، طبق گزاره ۴.۱ برای هر $A \subseteq X$، داریم $\beta_\circ^{(A)}(\mathcal{I}) \neq \emptyset$.

گزاره ۲.۳. اگر $A \subseteq X$ فشرده نباشد، آنگاه $\mathcal{H}_f \subseteq p$ برای هر $p \in \beta_A^f(\mathcal{I})$.

اثبات. فرض کنید $p \in \beta_A^f(\mathcal{I})$ و $B \in \mathcal{P}_f(X)$. فرض کنید برای $x \in B^c$، $F \in [X]^{B\cup\{x\}}$ آنگاه $\{\dot{a} : a \in F\}$ و $\bigcap_{a\in F} \dot{a} \subseteq \mathcal{I} - [X]^B$ ایجاب می‌کند $\mathcal{I} - [X]^B \in p$ □

گزاره ۳.۳. اگر $A \in \mathcal{I}$، آنگاه $\{\beta_\circ^{(A)}(\mathcal{I})\} \cup \{\beta_B^{(A)}(\mathcal{I}) : [A, B] \neq \emptyset, B \in \mathcal{I}\}$ یک افراز از $\beta_A(\mathcal{I})$ است.

اثبات. فرض کنید $A, B \in \mathcal{I}$. بدیهی است که اگر برای $B \in \mathcal{I}$، $[A, B] = \emptyset$ آنگاه $\beta_B^{(A)}(\mathcal{I}) = \emptyset$. طبق گزاره ۴.۱، داریم $\beta_\circ^{(A)}(\mathcal{I}) \neq \emptyset$، و اگر برای $B \in \mathcal{I}$، $[A, B] \neq \emptyset$ آنگاه $\beta_B^{(A)}(\mathcal{I}) \neq \emptyset$. اگر $p \in \beta_B^{(A)}(\mathcal{I}) \cap \beta_\circ^{(A)}(\mathcal{I})$، آنگاه بنابر تعریف ۲.۱، $[X]^B \in p$ و $\mathcal{I} - [X]^B \in p$ که تناقض است. بنابراین برای $B \in \mathcal{I}$، داریم

$$\beta_B^{(A)}(\mathcal{I}) \cap \beta_\circ^{(A)}(\mathcal{I}) = \emptyset.$$

عناصر $B_1, B_2 \in \mathcal{I}$ به قسمی موجود باشند که $[X]^{B_1} \neq [X]^{B_2}$، $[A, B_1] \neq \emptyset$ و $[A, B_2] \neq \emptyset$. اگر $p \in \beta_{B_1}^{(A)}(\mathcal{I}) \cap \beta_{B_2}^{(A)}(\mathcal{I})$، آنگاه $[X]_1^B \in p$ و $[X]_2^B \in p$ که تناقض است. بنابراین $\beta_B^{(A)}(\mathcal{I}) \cap \beta_\circ^{(A)}(\mathcal{I}) = \emptyset$. فرض کنید $p \in \beta_A(\mathcal{I})$، اگر برای هر $B \in \mathcal{I}$ داشته باشیم $[X]^B \notin p$، آنگاه برای هر $B \in \mathcal{I}$، $[X]^B \in p$ ایجاب می‌کند $p \in \beta_\circ^{(A)}(\mathcal{I})$. در غیر این صورت، برای $B \in \mathcal{I}$، $p \in \beta_B^{(A)}(\mathcal{I})$. □

گزاره ۴.۳. اگر $A \in \mathcal{I}$، آنگاه برای هر $B \in [X]^A$ داریم $\beta_B^{(A)}(\mathcal{I}) = \{e(A)\}$.

اثبات. طبق گزاره ۴.۲، داریم $\mathcal{G}_A \subseteq e(A)$، پس $e(A) \in \beta_B^{(A)}(\mathcal{I})$. اگر $p \in \beta_B^{(A)}(\mathcal{I})$، آنگاه $[X]^B \in p$ و $\mathcal{G}_A \subseteq p$ برای هر $K \subseteq \mathcal{P}_c(A)$ و هر $R \subseteq \mathcal{P}_c(X - A)$ به ترتیب ایجاب می‌کند $\bigcap_{a\in\cup K} \dot{a} \cap [X]^A \in p$ و $\bigcap_{a\in\cup R} I - \dot{a} \cap [X]^A \in p$. بنابراین $\{A\} \in p$ درنتیجه $p = e(A)$. □

گزاره ۵.۳. اگر $A \in \mathcal{I}$، آنگاه برای هر $B \in \mathcal{I}$، $\beta_\circ^{(A)}(\mathcal{I})$ و $\beta_B^{(A)}(\mathcal{I})$ در $\beta\mathcal{I}$ بسته هستند.

اثبات. فرض کنید $A \in \mathcal{I}$، $\mathcal{A} = \mathcal{G}_A \cup \mathcal{H}$ و برای $B \in \mathcal{I}$، $\mathcal{B} = \mathcal{G}_A \cup \{[X]^B\}$. در این صورت بدیهی است که

$$\beta_\circ^{(A)}(\mathcal{I}) = \bigcap_{F\in\mathcal{A}} \widehat{F}, \beta_B^{(A)}(\mathcal{I}) = \bigcap_{F\in\mathcal{B}} \widehat{F}.$$

□

۴ ویژگی‌های جبری $\{\beta_A(\mathcal{I}) : A \in \mathcal{P}(X)\}$

فرض کنید $(S, \cdot)$ یک نیم‌گروه باشد و $A \subseteq S$. مجموعه $P_f(S)$ را مجموعه همه زیرمجموعه‌های متناهی غیرتهی S می‌نامیم. آنگاه:

الف) مجموعه A ضخیم است هرگاه $F \in P_f(S)$، وجود داشته باشد $x \in S$ به‌طوری‌که

$$F \cdot x = \{ f \cdot x : f \in F \} \subseteq A.$$

ب) A متصل است اگر و تنها اگر مجموعه‌ای متناهی $F \in P_f(S)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$S = \bigcup_{s\in F} s^{-1}A, \quad \text{که} s^{-1}A = \{\, t \in S : s\cdot t \in A \,\}.$$

ج) مجموعه A تکه‌ای-متصل است اگر و تنها اگر مجموعه‌ای متناهی $F \in P_f(S)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\bigcup_{s\in F} s^{-1}A$ یک مجموعه ضخیم باشد.

گزاره ۱.۴. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. در این صورت

الف) برای هر $a \in X$، $\dot{a}$ مجموعه متصل است.

ب) برای هر $a \in X$، $\mathcal{I} - \dot{a}$ تکه‌ای-متصل نیست.

ج) اگر $A \in \mathcal{P}(X)$، آنگاه $\beta_A(\mathcal{I})$ زیرنیم‌گروه بسته‌ای از $(\beta\mathcal{I}, \uplus)$ است.

اثبات. الف) فرض کنید $b \in \dot{a}$. در این صورت $G = \{b\} \in \mathcal{P}_f(\mathcal{I})$ و $\mathcal{I} = b^{-1}(\dot{a}) = \bigcup_{b\in G} b^{-1}(\dot{a})$

ب) فرض کنید $a \in X$ و $G \in \mathcal{P}_f(\mathcal{I})$. اگر $b \in \dot{a}$، آنگاه برای هر $b \in G$، $b^{-1}(\mathcal{I} - \dot{a}) = \emptyset$. اگر $t = \{a\}$، آنگاه $t^{-1}\left(\bigcup_{i\in G} i^{-1}(\mathcal{I} - \dot{a})\right) \subseteq t^{-1}(\mathcal{I} - \dot{a}) = \emptyset$ که ایجاب می‌کند $\{t^{-1}\left(\bigcup_{i\in G} i^{-1}(\mathcal{I} - \dot{a})\right) : t \in \mathcal{I}\}$ دارای خاصیت مقطع متناهی نیست.

ج) بنابر گزاره ۳.۲، $\beta_A(\mathcal{I})$ بسته است. حال با استفاده از قضیه ۲۰.۴ منبع [۵]، کافی است نشان دهیم که برای هر $F \in \mathcal{G}_A$ و $i \in F$، داریم $iF \subseteq F$. اگر برای $B \in \mathcal{P}_c(A)$ داشته باشیم $F = B^\dagger$ آنگاه $iF \subseteq B^\dagger = F$. اگر برای $B \in \mathcal{P}_c(X - A)$ داشته باشیم $F = \mathcal{I} - B^\dagger$، آنگاه $iF \subseteq \mathcal{I} - B^\dagger = F$. □

تعریف ۲.۴. برای $p \in \beta\mathcal{I}$ و $B \subseteq \mathcal{I}$، تعریف می‌کنیم $B^\diamondsuit(p) = \{i \in \mathcal{I} : i^{-1}B \in p\}$.

قضیه ۳.۴. فرض کنید $p, q \in \beta\mathcal{I}$، در این صورت $B \in p \uplus q$ اگر و تنها اگر $B^\diamondsuit(q) \in p$.

لم ۴.۴. فرض کنید $A \subseteq X$ و $p \in \beta_A(\mathcal{I})$، در این صورت

الف) اگر $B \in \mathcal{P}_c(A)$، آنگاه $(B^\dagger)^\diamondsuit(p) = \mathcal{I}$.

ب) اگر $B \in \mathcal{P}_c(X - A)$، آنگاه $(B^\dagger)^\diamondsuit(p) = B^\dagger$.

ج) اگر $B \in \mathcal{P}_c(A)$، آنگاه $[\mathcal{I} - B^\dagger]^\diamondsuit(p) = \emptyset$.

د) اگر $B \in \mathcal{P}_c(X - A)$، آنگاه $[\mathcal{I} - B^\dagger]^\diamondsuit(p) = \mathcal{I} - B^\dagger$ و $(B^\dagger)^\diamondsuit(p) \notin p$.

اثبات. (الف) فرض کنید $p \in \beta_A\mathcal{I}$ و $B \in \mathcal{P}_c(A)$. بنابراین $B^\dagger \in p$. توجه داشته باشید که از $a \in \mathcal{I}$، داریم $B^\dagger \subseteq a^{-1}B^\dagger$ که ایجاب می‌کند $a^{-1}B^\dagger \in p$.

(ب) فرض کنید $p \in \beta_A\mathcal{I}$ و $B \in \mathcal{P}_c(X - A)$. اگر $i \in B^\dagger$، آنگاه $i^{-1}B^\dagger = \mathcal{I} \in p$. اگر $i \in \mathcal{I} - B^\dagger$، آنگاه $i^{-1}B^\dagger = B^\dagger \notin p$. بدیهی است که برای هر $F \subseteq \mathcal{I}$ و $p \in \beta\mathcal{I}$، داریم $(\mathcal{I} - F)^\diamondsuit(p) = \mathcal{I} - F^\diamondsuit(p)$.

بندهای (ج) و (د) از (الف) و (ب) نتیجه می‌شوند. توجه داشته باشید که $\mathcal{I} - B^\dagger \in p$ و $(B^\dagger)^\diamondsuit(p) = B^\dagger$.

لذا $(B^\dagger)^\diamondsuit(p) \notin p$. □

گزاره ۵.۴. فرض کنید $A, B \subseteq X$. اگر $p \in \beta_A(\mathcal{I})$ و $q \in \beta_B(\mathcal{I})$، آنگاه $q \uplus p \in \beta_{A\cup B}(\mathcal{I})$. به‌ویژه، اگر $B \subseteq A$، آنگاه $p \uplus q \in \beta_A(\mathcal{I})$ و $q \uplus p \in \beta_A(\mathcal{I})$.

اثبات. اگر $C \in \mathcal{P}_c(A \cup B)$، آنگاه بنا به لم ۴.۴، $F = A \cap C$، $L = B \cap C$. اگر $C \in \mathcal{P}_c(B - A)$، آنگاه بنا به لم ۴.۴، $(C^\dagger)^\diamondsuit(p) = C^\dagger$. فرض کنید برای $C \in \mathcal{P}_c(A \cup B)$، $F = A \cap C$ و $L = B \cap C$. آنگاه

$$(C^\dagger)^\diamondsuit(p) = (F^\dagger)^\diamondsuit(p) \cup (L^\dagger)^\diamondsuit(p) = \mathcal{I} \cup L^\dagger = \mathcal{I}$$

که بنا بر قضیه ۳.۴، ایجاب می‌کند $(C^\dagger)^\diamondsuit(p) \in q$ و $C^\dagger \in q \uplus p$. فرض کنید $C \in \mathcal{P}_c(X - (A \cup B))$. لذا بنا بر لم ۴.۴، $[\mathcal{I} - C^\dagger]^\diamondsuit(p) = \mathcal{I} - C^\dagger$. درنتیجه $(\mathcal{I} - C^\dagger)^\diamondsuit(p) \in q$ که بنا به قضیه ۳.۴، ایجاب می‌کند، $\mathcal{I} - C^\dagger \in q \uplus p$. □

گزاره ۶.۴. فرض کنید $A, B \subseteq X$، $p \in \beta_A(\mathcal{I})$ و $q \in \beta_B(\mathcal{I})$، آنگاه گزاره‌های زیر معادل‌اند:

الف) $p \uplus q \in \beta_A(\mathcal{I})$ و $q \uplus p \in \beta_B(\mathcal{I})$.

ب) $p \uplus q \in \beta_B(\mathcal{I})$ و $q \uplus p \in \beta_A(\mathcal{I})$.

ج) $A = B$.

اثبات. بنا به گزاره ۵.۴، $p \uplus q, q \uplus p \in \beta_{A\cup B}(\mathcal{I})$. لذا بنا به گزاره ۲.۲، از شرایط (الف) و (ب) نتیجه می‌شود که $A = A \cup B$ و $B = A \cup B$. □

قضیه ۷.۴. فرض کنید $A \subseteq X$ و $\mathcal{V}_A = \bigcup\{\beta_B(\mathcal{I}) : B \subseteq A\}$. در این صورت

الف) مجموعه $\mathcal{V}_A$ زیرنیم‌گروهی بسته از $\beta\mathcal{I}$ است، $\beta_A(\mathcal{I})$ یک ایده‌آل از $\mathcal{V}_A$ است و برای هر $A \neq \emptyset$، $\beta_A(\mathcal{I}) \neq \mathcal{V}_A$.

ب) اگر $\Gamma \subseteq \beta\mathcal{I}$ یک زیرنیم‌گروه باشد به قسمی که $\beta_A(\mathcal{I})$ یک ایده‌آل از Γ باشد، آنگاه $\Gamma \subseteq \mathcal{V}_A$.

اثبات. الف) اگر $p, q \in \mathcal{V}_A$، آنگاه برای $B_1, B_2 \subseteq A$، داریم $p \in \beta_{B_1}(\mathcal{I})$ و $q \in \beta_{B_2}(\mathcal{I})$ بنابراین $p \uplus q, q \uplus p \in \beta_{B_1 \cup B_2}(\mathcal{I})$ که بنا به گزاره ۵.۴، ایجاب می‌کند $p \uplus q, q \uplus p \subseteq \mathcal{V}_A$. درنتیجه $\mathcal{V}_A$ زیرنیم‌گروه از $\beta\mathcal{I}$ است. فرض کنید $p \in \beta_A(\mathcal{I})$ و $q \in \mathcal{V}_A$. لذا برای $B \subseteq A$، داریم $q \in \beta_B(\mathcal{I})$. پس بنا به گزاره ۵.۴، $p \uplus q, q \uplus p \in \beta_A(\mathcal{I})$. درنتیجه $\beta_A(\mathcal{I})$ یک ایده‌آل از $\mathcal{V}_A$ است. همچنین بنا به گزاره ۲.۲، برای $A \neq \emptyset$ داریم $\beta_A(\mathcal{I}) \neq \mathcal{V}_A$. فرض کنید $p \in \beta\mathcal{I} - \mathcal{V}_A$. لذا بنا به گزاره ۲.۲، $D \subseteq X$ به قسمی موجود است که $p \in \beta_D(\mathcal{I})$. فرض کنید $F \in \mathcal{P}_c(D - A)$. پس $F^\dagger \in p$ ایجاب می‌کند $p \in \hat{F^\dagger}$. فرض کنید $q \in \hat{F^\dagger}$. پس $F^\dagger \in q$. اگر $q \in \mathcal{V}_A$، آنگاه برای $B \subseteq A$، داریم $q \in \beta_B(\mathcal{I})$ که ایجاب می‌کند $\mathcal{I} - F^\dagger \in q$ که با $F^\dagger \in q$ در تناقض است.
ب) فرض کنید $q \in \Gamma$. پس برای $D \subseteq X$، $q \in \beta_D(\mathcal{I})$. برای $p \in \beta_A(\mathcal{I})$، داریم $p \uplus q \in \beta_A(\mathcal{I})$ و $p \uplus q \in \beta_{A\cup D}(\mathcal{I})$. پس بنا به گزاره ۲.۲، $A = D \cup A$ که ایجاب می‌کند $\beta_D(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{V}_A$. درنتیجه $\Gamma \subset \mathcal{V}_A$. □

نتیجه ۸.۴. $\beta_X(\mathcal{I})$ یک ایده‌آل بسته از $(\beta\mathcal{I}, \uplus)$ است.

اثبات. بنا به گزاره ۲.۲، داریم $\mathcal{V}_X = \beta\mathcal{I}$. لذا بنا به گزاره ۳.۲ و قسمت (الف) از قضیه ۷.۴ با فرض $A = X$ حکم به دست می‌آید. □

فرض کنید $A \subseteq X$ و $\overline{A}$ در X فشرده نباشد. در این صورت $\beta_A(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}^*$ [که در آن $\mathcal{I}^* = \beta\mathcal{I} - \mathcal{I}$]. بنابراین، اگر فضای توپولوژیک X فشرده نباشد، بنا به گزاره ۲.۲ ایده‌آل $\beta_X(\mathcal{I})$ زیرمجموعه سره از ایده‌آل $\mathcal{I}^*$ است.

گزاره ۹.۴. فرض کنید $A \in \mathcal{I}$. اگر $p \in \beta_f^{(A)}(\mathcal{I})$ و $q \in \beta_A^f(\mathcal{I})$، آنگاه $p \uplus q \in \beta_f^{(A)}(\mathcal{I})$ و $q \uplus p \in \beta_f^{(A)}(\mathcal{I})$.

اثبات. نگاه کنید به قضیه ۱.۶ در [۲]. □

۵ یک دسته‌بندی از $K(\beta\mathcal{I})$، به‌عنوان کوچک‌ترین ایده‌آل از $\beta\mathcal{I}$

در این بخش، اثباتی از نتیجه‌ی سابین کوپلبرگ ارائه می‌شود که بیان می‌کند با فرض گسسته بودن X، $\beta_X(\mathcal{I})$ کوچک‌ترین ایده‌آل در $\beta\mathcal{I}$ است. می‌توانید به قضیه ۴.۲ از [۶] رجوع کنید.

لم ۱.۵. فرض کنید $A \in \mathcal{I}$. اگر $B \subseteq A^\dagger$، آنگاه $\lambda_A(B) = B$.

اثبات. به لم ۱ در [۴] رجوع کنید. □

لم ۲.۵. فرض کنید $A \subseteq X$ و $p \in \beta_A(\mathcal{I})$. اگر $B \in \mathcal{I}$ به قسمی که $B \subseteq A$، آنگاه $\lambda_B(p) = p$.

اثبات. کافی است نشان دهیم $\lambda_B(p) \subseteq p$. چون $\{\lambda_B(F) : F \in p\}$ یک فیلتر پایه برای $\lambda_B(p)$ است، کافی است نشان دهیم که برای هر $F \in p$، $\lambda_B(F) \in p$. فرض کنید $F \in p$. ازآنجاکه $B^\dagger \in \mathcal{G}_A \subseteq p$ و طبق لم ۱.۵ داریم $\lambda_B(B^\dagger) = B^\dagger$، نتیجه می‌شود که $B^\dagger \in \lambda_B(p)$. همچنین اگر $C = B^\dagger \cap F \in p$، آنگاه $\lambda_B(C) \subseteq \lambda_B(F)$، و چون $\lambda_B(C) = C$ (طبق لم ۱.۵)، نتیجه می‌شود که $\lambda_B(F) \in p$. □

گزاره ۳.۵. فرض کنید $A \subseteq X$. اگر $p \in \beta_A(\mathcal{I})$، آنگاه برای هر $q \in \widehat{\mathcal{P}_c(A)}$ داریم $p = q \uplus p$.

اثبات. فرض کنید $A \subseteq X$، $\beta \in \beta_A(\mathcal{I})$، $B = \widehat{\mathcal{P}_c(A)}$ و $\zeta_p : \beta\mathcal{I} \to \beta\mathcal{I}$ به قسمی که برای هر $q \in \beta\mathcal{I}$ تعریف شود $\zeta_p(q) = p$. بدیهی است که ζ_p تابعی پیوسته است. اگر $C \in \mathcal{P}_c(A)$، آنگاه $C \in \mathcal{I}$ به قسمی که $C \subseteq A$ که بنا به لم ۲.۵ ایجاب می‌کند $\lambda_C(p) = p$ و درنتیجه داریم $\rho_p(e(C)) = \lambda_C(p) = \zeta_p(e(i))$. پس چون توابع پیوسته ρ_p و ζ_p روی $e(\mathcal{P}_c(A))$ تعریف شده و برابرند، بنابراین روی $\widehat{\mathcal{P}_c(A)}$ نیز این‌چنین است. بنابراین برای $q \in \widehat{\mathcal{P}_c(A)}$ داریم $p = \zeta_p(q) = \rho_p(q) = q \uplus p$. □

نتیجه ۴.۵. اگر $p \in \beta_X(\mathcal{I})$، آنگاه برای هر $q \in \beta\mathcal{I}$، داریم: $p = q \uplus p$.

اثبات. ازآنجایی‌که $\beta\mathcal{I} = \widehat{\mathcal{P}_c(X)}$ حکم برقرار است. □

قضیه ۵.۵ (کوپلبرگ). فرض کنید فضای توپولوژیک X فشرده نباشد و $\mathcal{I} = \mathcal{P}_c(X)$ در این صورت برای نیم‌گروه $(\beta\mathcal{I}, \uplus)$ داریم $K(\beta\mathcal{I}) = \beta_X(\mathcal{I})$.

اثبات. با توجه به نتیجه ۸.۴، $\beta_X(\mathcal{I})$ یک ایده‌آل از $\beta\mathcal{I}$ است. فرض کنید M یک ایده‌آل دلخواه از $\beta\mathcal{I}$ باشد و $p \in \beta_X(\mathcal{I})$. وجود دارد $q \in \beta\mathcal{I}$، به قسمی که $q \in M$. داریم $q \uplus p \in M$. لذا، $p = q \uplus p$، و چون $q \uplus p \in M$، بنابراین $p \in M$، درنتیجه $\beta_X(\mathcal{I}) \subseteq M$. پس $K(\beta\mathcal{I}) = \beta_X(\mathcal{I})$. □

فرض کنید $A \subseteq X$. طبق قضیه ۷.۴، $\mathcal{V}_A$ یک زیرنیم‌گروه فشرده و $\beta\mathcal{I} - \mathcal{V}_A$ یک ایده‌آل باز از از $(\beta\mathcal{I}, \uplus)$ است. نکات زیر قابل توجه‌اند:

۱) $\beta\mathcal{I} - \mathcal{V}_A = \bigcup\{\beta_D(\mathcal{I}) : D \in \mathcal{P}_f(X) - \mathcal{P}_f(A)\}$ و اگر A زیرمجموعه‌ای ناتهی و سره از X باشد، آنگاه

$$\mathcal{V}_{X-A} - \beta_\emptyset(\mathcal{I}) \subsetneq \beta\mathcal{I} - \mathcal{V}_A.$$

۲) اگر $E \subseteq X$، آنگاه $\mathcal{V}_E - \mathcal{V}_A = \bigcup\{\beta_D(\mathcal{I}) : D \in \mathcal{P}_f(E) - \mathcal{P}_f(A)\}$ و $\mathcal{V}_E \cap \mathcal{V}_A = \mathcal{V}_{E\cap A}$ ایجاب می‌کند

$$\mathcal{V}_E \cup \mathcal{V}_A = \bigcup\{\beta_D(\mathcal{I}) : D \in \mathcal{P}_f(E) \cup \mathcal{P}_f(A)\}.$$

References

[1] Berglund, J. F., H. D. Junghenn & P. Milnes. (1989). Analysis on Semigroups: Function Spaces, Compactifications, Representations, *Wiley, New York*.

[2] Grainger, A.D. (2003). Ultrafilters on the collection of finite subsets of an infinite set. *Semigroup Forum*, 67, 443–453. DOI: https://doi.org/10.1007/s00233-002-0001-9.

[3] Grainger, A.D. (2006). Ideals of ultrafilters on the collection of finite subsets of an infinite set. *Semigroup Forum*, 73, 234–242. DOI: https://doi.org/10.1007/s00233-006-0632-3.

[4] Grainger, A.D. (2008). Remarks on Ultrafilters on the Collection of Finite Subsets of an Infinite set. *Contemporary Mathematics*, 467, 73–84.

[5] Hindman, N., & D. Strauss. (2011). Algebra in the Stone-Čech Compactification, Theory and Application. *Springer Series in Computational Mathematics, Walter de Gruyter, Berlin*.

[6] Koppelberg, S. (2006). The Stone-Čech Compactification of Semilattice. *Semigroup Forum*, 72, 63–74.