



Derivations on Banach algebras related to certain class of topological semigroup

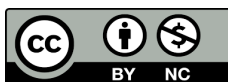
Ahmad Alinejad¹ 

1. Department of Engineering, College of Farabi, University of Tehran, Iran.

Email: alinejad.ahmad@ut.ac.ir

Article Info	ABSTRACT
Article type: Research Article Article history: Received: 1 August 2024 Received in revised form: 24 October 2024 Accepted: 31 October 2024 Published Online: 21 December 2024 Keywords: Derivation, Foundation semigroup, Compactly cancellative semi- group, Semigroup algebra, Measure algebra 2020 Mathematics Subject Classification: 43A20, 13N15	In this paper, we investigate derivations on the Banach algebra $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$ for certain class of topological semigroup. We show that any derivation on $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$ maps it into its radical and a derivation on $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$ is continuous if and only if its restriction to the right annihilator of $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$ is continuous. Finally, we prove that the zero map is the only centralizing derivation on $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$.

Cite this article: Alinejad, A. (2024). Derivations on Banach algebras related to certain class of topological semigroup. *Measure Algebras and Applications*, 2(2), 69–81. <http://doi.org/10.22091/maa.2025.13014.1032>



©The Author(s).

DOI: 10.22091/maa.2025.13014.1032

Publisher: University of Qom

Extended Abstract

Introduction

Let $\mathcal{A}$ be a Banach algebra. By a derivation on $\mathcal{A}$, we mean a linear map $d: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ satisfying

$$d(ab) = d(a)b + ad(b)$$

for all $a, b \in \mathcal{A}$. Derivations on Banach algebras are studied in several aspects. A fundamental question for derivations concerns their image and automatic continuity. Singer and Wermer [16] obtained that on a commutative Banach algebra the range of a continuous derivation is contained in the radical of algebra. In the same paper, they made a very insightful conjecture that the assumption of continuity is unnecessary. In [20] Thomas proved this conjecture. Non-commutative version of Singer–Wermer Theorem was generalized by Posner [15] by considering prime rings. He has shown that the zero map is the only centralizing derivation on a non-commutative prime ring (Posner’s second theorem). These result have been generalized in various derivations by several authors; see for instance [4, 5, 7, 12, 17, 21].

Mehdipour and Saeedi study derivations on group algebras of a locally compact abelian group [14]. They proved that any derivation on $L_0^\infty(G)^*$ maps it into its radical [14, Theorem 1] and a derivation on $L_0^\infty(G)^*$ is continuous if and only if its restriction to the right annihilator of $L_0^\infty(G)^*$ is continuous. They also showed that the zero map is the only centralizing derivation on $L_0^\infty(G)^*$.

Can we apply the well-known results concerning derivations of commutative Banach algebra and derivations of prime rings to $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$ for certain class of topological semigroup S ? This question seems natural, Because $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$ is neither a commutative Banach algebra nor a prime ring, when S is a non-discrete topological semigroup. In this paper, we study the truth of these results for $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$, these generalizes the results in [14]. An outline of the present paper is as follows:

We investigate the singer–Wermer conjecture and automatic continuity on $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$ for certain class of topological semigroups. We show that the range of a derivation on the commutative Banach algebra $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$ is contained in the radical of $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$. Also we prove that a derivation on $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$ is continuous if and only if its restriction to $\text{Ann}_r(L_0^\infty(S; M_a(S))^*)$, the right annihilator of $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$, is continuous. Finally, we investigate Posner’s second theorem and show that the zero map is the only centralizing derivation on $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$.

Conclusion

In this paper, the following definitions are stated:

Definition 0.1. Let S be a topological semigroup and $M_a(S)$ be all measures μ in the measure algebra $M(S)$ such that the mappings $x \longrightarrow \delta_x * |\mu|$ and $x \longrightarrow |\mu| * \delta_x$ from S into $M(S)$ are weakly continuous. S is called foundation semigroup if $\bigcup \{\text{supp}(\mu); \mu \in M_a(S)\}$ is dense in S .

Definition 0.2. A topological semigroup S is called compactly cancellative if the sets $C^{-1}D$ and CD^{-1} are compact subsets of S for all compact subsets C and D of S , where

$$C^{-1}D = \{x \in S; Cx \cap D \neq \emptyset\},$$

$$CD^{-1} = \{x \in S; xD \cap C \neq \emptyset\}.$$

Let S be topological semigroup. Denote by $L^\infty(S, M_a(S))$ the space of all functions f on S such that f is bounded and μ -measurable for all $\mu \in M_a(S)$.

Definition 0.3. Let S be a topological semigroup. A function $f \in L^\infty(S, M_a(S))$ vanishes at infinity if for each $\varepsilon > 0$, there is a compact subset C of S for which $\|f\chi_{S \setminus K}\|_\infty < \varepsilon$.

We denote by $[m, n] := m \cdot n - n \cdot m$ for all $m, n \in L_0^\infty(S; M_a(S))^*$.

Definition 0.4. For any positive integer k , a mapping $T: L_0^\infty(S; M_a(S))^* \rightarrow L_0^\infty(S; M_a(S))^*$ is called k -centralizing if

$$[T(m), m^k] \in \mathcal{Z}(L_0^\infty(S; M_a(S))^*),$$

for all $m \in L_0^\infty(S; M_a(S))^*$; in a special case when $[T(m), m^k] = 0$ for all $m \in L_0^\infty(S; M_a(S))^*$, T is called k -commuting.

Also, the next theorems, propositions and corollaries are presented:

Theorem 0.5. Let S be a commutative compactly cancellative foundation semigroup with identity, $\hat{S}$ separates the points of S and D be a derivation on $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$. Then D has its image in the right annihilator of $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$.

Corollary 0.6. Let S be a commutative compactly cancellative foundation semigroup with identity, $\hat{S}$ separates the points of S . Then the following statements hold.

- (i) Every derivation on $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$ maps it into its radical.
- (ii) Primitive ideals of $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$ are invariant under derivations on $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$.
- (iii) Every derivation on $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$ is spectrally bounded.
- (iv) The composition of two derivations on $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$ is always a derivation on $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$.

Theorem 0.7. Let S be a commutative compactly cancellative foundation semigroup with identity, $\hat{S}$ separates the points of S and D be a derivation on $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$. Then the following statements hold.

- (i) For every $E \in \mathcal{E}_0(S)$ $D|_{E \cdot L_0^\infty(S; M_a(S))^*}$ is automatically continuous.
- (ii) D is continuous if and only if $D|_{\text{Ann}_r(L_0^\infty(S; M_a(S))^*)}$ is continuous.

Theorem 0.8. Let S be a commutative compactly cancellative foundation semigroup with identity, $\hat{S}$ separates the points of S , D be a derivation on $L_0^\infty(S; M_a(S))^*$ and let k be a positive integer. The the following statements are equivalent.

- (i) $D = 0$.
- (ii) D is k -centralizing.
- (iii) D is k -commuting.



اشتقاق‌ها روی جبرهای باناخ وابسته به رده خاصی از نیم‌گروه‌های توپولوژیکی

احمد علی نژاد^۱

۱. دانشکده مهندسی، دانشکدگان فارابی، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: alinejad.ahmad@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۵/۱۱ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۸/۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۸/۱۰ تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۱۰/۱ کلمات کلیدی: اشتقاق، نیم‌گروه اساسی، نیم‌گروه به‌طور فشرده حذفی، جبر نیم‌گروهی، جبر اندازه رده‌بندی ریاضی: 43A20, 13N15	در این مقاله به مطالعه اشتقاق‌ها روی جبر باناخ $L^\infty(S; M_a(S))^*$ برای رده خاصی از نیم‌گروه‌های توپولوژیک جابجایی S می‌پردازیم. ما ثابت می‌کنیم که تصویر هر اشتقاق روی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ در رادیکالش قرار دارد. همچنین اشتقاق روی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ پیوسته است اگر و تنها اگر تحدید آن اشتقاق به پوچساز راست $L^\infty(S; M_a(S))^*$ پیوسته باشد. درنهایت یکی از یافته‌های اصلی این مقاله نتیجه می‌دهد که تنها اشتقاق مرکز ساز روی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ نگاشت صفر است.

استناد: علی نژاد، احمد. (۱۴۰۳). اشتقاق‌ها روی جبرهای باناخ وابسته به رده خاصی از نیم‌گروه‌های توپولوژیکی. جبرهای اندازه و کاربردها، ۲(۲)، ۸۱-۶۹.

<http://doi.org/10.22091/maa.2025.13014.1032>



ناشر: دانشگاه قم.

© نویسندگان.

۱ مقدمه

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد. منظور ما از اشتقاق روی $\mathcal{A}$ ، یک نگاشت خطی $d: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ است به‌طوری‌که برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ در رابطه

$$d(ab) = d(a)b + ad(b)$$

صدق کند. اشتقاق‌ها روی جبرهای باناخ از جنبه‌های گوناگون مطالعه می‌شوند. یک سؤال اساسی برای اشتقاق‌ها مربوط به پیوستگی خودکار و تصویر آن‌ها است. سینگر و ورمر در [۱۶] به دست آوردند که روی جبرهای باناخ جابجایی، برد یک اشتقاق پیوسته در رادیکال جبر قرار دارد. در همان مقاله، حدس بسیار ارزشمندی مطرح نمودند که فرض پیوستگی غیرضروری است. توماس در [۲۰] این حدس را ثابت کرد. نسخه غیر جابجایی قضیه سینگر-ورمر توسط پوسنر [۱۵] با در نظر گرفتن حلقه‌های اول، تعمیم داده شد. او نشان داده است که نگاشت صفر تنها اشتقاق مرکزساز بر روی یک حلقه اول غیر جابجایی است (قضیه دوم پوسنر). این نتایج برای دیگر مفاهیم اشتقاق‌ها روی جبرهای باناخ گوناگون توسط چندین نویسنده تعمیم داده شده است. برای مثال به [۴، ۵، ۷، ۱۲، ۱۷، ۲۱] مراجعه کنید.

در سال ۲۰۱۶ مهدی پور و سعیدی به مطالعه و بررسی اشتقاق‌ها روی جبر گروهی $L^\infty(G)^*$ وابسته به گروه‌های فشرده موضعی جابجایی پرداختند [۱۴]. آن‌ها ثابت نمودند که هر اشتقاق روی $L^\infty(G)^*$ آن را به رادیکال خود می‌نگارد [۱۴]، قضیه ۱ و همچنین هر اشتقاق روی $L^\infty(G)^*$ پیوسته است اگر و تنها اگر تحدید آن به پوچساز راست $L^\infty(G)^*$ پیوسته باشد [۱۴]، قضیه ۲. آن‌ها همچنین نشان دادند که تنها اشتقاق مرکزساز روی $L^\infty(G)^*$ نگاشت صفر است [۱۴]، نتیجه ۳.

این سؤال طبیعی به نظر می‌رسد که آیا می‌توانیم نتایج شناخته‌شده مربوط به اشتقاق‌ها روی جبرهای باناخ جابجایی و حلقه‌های اول را برای جبر باناخ $L^\infty(S; M_a(S))^*$ برای رده خاصی از نیم‌گروه‌های توپولوژیکی S اعمال کنیم؟ زیرا $L^\infty(S; M_a(S))^*$ برای نیم‌گروه توپولوژیکی غیر گسسته S نه جبر باناخ جابجایی و نه یک حلقه اول است. در این مقاله، ما صحت این نتایج را روی جبر باناخ $L^\infty(S; M_a(S))^*$ بررسی خواهیم نمود که تعمیم نتایج به‌دست‌آمده در [۱۴] است. طرح کلی مقاله حاضر به شرح زیر است:

در این مقاله ما به بررسی مسئله سینگر-ورمر و پیوستگی خودکار روی جبر $L^\infty(S; M_a(S))^*$ برای رده خاصی از نیم‌گروه‌های توپولوژیک خواهیم پرداخت. ما نشان می‌دهیم که برد یک اشتقاق روی جبر باناخ جابجایی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ مشمول در رادیکال $L^\infty(S; M_a(S))^*$ و اشتقاق روی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ پیوسته است اگر و تنها اگر تحدید آن به $\text{Ann}_r(L^\infty(S; M_a(S))^*)$ پوچساز راست $L^\infty(S; M_a(S))^*$ پیوسته باشد. در ادامه به بررسی قضیه دوم پوسنر روی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ خواهیم پرداخت و به‌عنوان یک نتیجه اساسی نشان می‌دهیم که نگاشت صفر تنها اشتقاق مرکز ساز روی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ است.

۲ تعاریف و مقدمات

در سرتاسر این مقاله S یک نیم‌گروه توپولوژیک فشرده موضعی هاوسدورف است. $C_*(S)$ مجموعه همه توابع مختلط مقدار روی S که در بی‌نهایت صفر می‌شوند، را با نرم سوپریمم در نظر بگیرید. فرض کنید $C_*(S)^* = M(S)$ یعنی $M(S)$ که شامل همه اندازه‌های مختلط بول منظم کران‌دار روی S است، دوگان توپولوژیک $C_*(S)$ باشد [۶]. $M(S)$ با نرم

$$\|\mu\| = \sup \{ |\mu(f)|; f \in C_*(S), \|f\| = 1 \}$$

و ضرب پیچشی $*$ که برای هر $\mu, \nu \in M(S)$ به‌صورت

$$\mu * \nu(f) = \int_S \int_S f(xy) d\mu(x) d\nu(y) \quad (f \in C_*(S))$$

تعریف می‌شود، یک جبر باناخ است.

برای هر $x \in S$ و $A \subseteq S$ ، قرار دهید

$$x^{-1}A = \{y \in S; xy \in A\}, \quad Ax^{-1} = \{y \in S; yx \in A\}.$$

به‌ازای هر $\mu \in M(S)$ و $x \in S$ ، $\mu * \delta_x$ نمایش ضرب پیچشی μ با اندازه δ_x ، اندازه دیراک در x ، است و

$$\mu * \delta_x(F) = \mu(x^{-1}F), \quad \delta_x * \mu(F) = \mu(Fx^{-1})$$

و همچنین

$$\langle \mu * \delta_x, f \rangle = \langle \mu, f_x \rangle, \quad \langle \delta_x * \mu, f \rangle = \langle \mu, {}_x f \rangle \quad (f \in C_0(S)).$$

فرض کنید $M_a(S)$ مجموعه اندازه‌های $\mu \in M(S)$ است به‌طوری‌که نگاشت‌های $x \rightarrow |\mu| * \delta_x$ و $x \rightarrow \delta_x * |\mu|$ از S به‌توی $M(S)$ به‌طور ضعیف پیوسته باشند. به‌طور معادل مجموعه اندازه‌های $\mu \in M(S)$ به‌طوری‌که نگاشت‌های $x \rightarrow |\mu|(x^{-1}F)$ و $x \rightarrow |\mu|(F x^{-1})$ برای هر زیرمجموعه فشرده $F \subseteq S$ پیوسته باشند. نیم‌گروه توپولوژیک فشرده موضعی S را اساسی گوئیم هرگاه، $\bigcup \{\text{supp}(\mu); \mu \in M_a(S)\}$ در S چگال باشد. هر گروه توپولوژیک فشرده موضعی و هر نیم‌گروه گسسته را می‌توان به‌عنوان مثال‌هایی از نیم‌گروه اساسی در نظر گرفت. علاوه بر این $M_a(S)$ ایده‌آل بسته دوطرفه در جبر اندازه $M(S)$ است [۳، قضیه ۶.۲]. برای یک نیم‌گروه توپولوژیک اساسی با عنصر همانی e ، جبر $M_a(S)$ دارای یک واحد تقریبی کران‌دار است [۱۹، قضیه ۵.۱۶] و همچنین به‌ازای هر $\mu \in M_a(S)$ ، نگاشت‌های $x \rightarrow \delta_x * |\mu|$ و $x \rightarrow |\mu| * \delta_x$ از S به‌توی $M(S)$ نسبت به توپولوژی نرم پیوسته هستند [۱۹، قضیه ۶.۵]. لازم به ذکر است وقتی که S یک نیم‌گروه جابجایی اساسی باشد، جبر نیم‌گروهی $M(S)$ نیم‌ساده است اگر و تنها اگر $\hat{S}$ ، نیم‌گروه نیم‌مشخصه‌های S ، نقاط S را جدا سازد [۲، قضیه ۶.۳].

تابع مختلط-مقدار f روی S را $M_a(S)$ -اندازه‌پذیر گوئیم، هرگاه f نسبت به هر $\mu \in M_a(S)$ اندازه‌پذیر باشد. مجموعه همه توابع کران‌دار و $M_a(S)$ -اندازه‌پذیر را با $L^\infty(S; M_a(S))$ نمایش می‌دهیم که در آن تابع‌هایی که برای هر $\mu \in M_a(S)$ تقریباً همه‌جا برابر هستند را یکسان در نظر می‌گیریم. اگر $\|\cdot\|_{\infty, |\mu|}$ نمایش نرم سوپریمم اساسی نسبت به اندازه $|\mu|$ باشد، آنگاه برای هر $f \in L^\infty(S; M_a(S))$ قرار دهید؛

$$\|f\|_\infty = \sup \left\{ \|f\|_{\infty, |\mu|}; \mu \in M_a(S) \right\}.$$

فضای $L^\infty(S; M_a(S))$ با عمل‌های جمع و ضرب نقطه‌ای، نرم $\|\cdot\|_\infty$ و مزدوج مختلط به‌عنوان برگشت یک C^* -جبر جابجایی و یک‌دار است. نگاشت دوگان کانونی برای هر $\mu \in M_a(S)$ و $f \in L^\infty(S; M_a(S))$ به‌صورت $f d\mu = \int_S f d\mu$ است. اسلیچین نشان داد که اگر S یک نیم‌گروه اساسی توپولوژیک فشرده موضعی با عضو همانی e باشد، آنگاه نگاشت کانونی از $L^\infty(S; M_a(S))$ به‌توی $M_a(S)^*$ یکرخت طولیا است [۱۸].

در سال ۱۹۹۰، لائو و پیم برای یک گروه توپولوژیک فشرده موضعی G ، زیرفضای $L^\infty(G)$ را فضای همه توابع به‌طور اساسی کران‌دار و اندازه‌پذیر در نظر گرفتند که در بی‌نهایت صفر می‌شوند [۱]. آن‌ها نشان دادند که $L^\infty(G)$ یک C^* -زیرجبر $L^\infty(G)$ است و $L^\infty(G)^*$ دوگان $L^\infty(G)$ ، یک جبر باناخ است. برای اطلاعات بیشتر به [۸] مراجعه شود. در سال ۲۰۰۹، مقصودی و نصرافهانی در [۹] شبیه به آن را برای نیم‌گروه‌های توپولوژیک معرفی و مورد بررسی قرار دادند.

تعریف ۱.۲. فرض کنید $f \in L^\infty(S; M_a(S))$. اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، زیرمجموعه فشرده $K \subseteq S$ موجود باشد به‌طوری‌که $\|f \chi_{S \setminus K}\|_\infty < \varepsilon$ ، آنگاه گوئیم f در بی‌نهایت صفر می‌شود. یعنی؛ به‌ازای هر $\mu \in M_a(S)$

$$|f(x)| \leq \varepsilon \quad (x \in S \setminus K \text{ تقریباً همه جا } - \mu).$$

مجموعه همه توابع $f \in L^\infty(S; M_a(S))$ که در بی‌نهایت صفر می‌شوند را با $L^\infty_0(S; M_a(S))$ نمایش می‌دهیم. فضای $L^\infty_0(S; M_a(S))$ یک C^* -زیرجبر $L^\infty(S; M_a(S))$ است [۹]. نیم‌گروه توپولوژیک فشرده موضعی S را به‌طور فشرده حذفی گوئیم هرگاه، به‌ازای زیرمجموعه‌های فشرده $C, D \subseteq S$ ، مجموعه‌های $C^{-1}D$ و CD^{-1} فشرده باشند که در آن،

$$\begin{aligned} C^{-1}D &= \{x \in S; cx = d, d \in D \text{ و } c \in C \text{ برای}\} \\ CD^{-1} &= \{x \in S; c = xd, d \in D \text{ و } c \in C \text{ برای}\}. \end{aligned}$$

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و X یک زیرمدول نرم بسته در $\mathcal{A}^*$ است. برای هر $\Psi \in X^*$ و $\lambda \in X$ عنصر $\lambda \in \mathcal{A}^*$ $\Psi \cdot \lambda$ را به‌صورت زیر تعریف کنید؛

$$\langle \Psi \cdot \lambda, a \rangle = \langle \Psi, \lambda \cdot a \rangle \quad (a \in \mathcal{A}).$$

تعریف ۲.۲. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و X یک زیرمدول نرم بسته در $\mathcal{A}^*$ است. اگر برای هر $\Psi \in X^*$ و $\lambda \in X$ داشته باشیم $\Psi \cdot \lambda \in X$ ، آنگاه X را زیر فضای درون‌گرای چپ توپولوژیک $\mathcal{A}^*$ گوئیم.

دوگان زیرفضای درون‌گرای چپ توپولوژیک را می‌توان به‌عنوان یک جبر باناخ در نظر گرفت. در حقیقت، برای هر $\Psi, \Phi \in X^*$ قرار دهید $\Phi \cdot \Psi \in X^*$ که،

$$\langle \Phi \cdot \Psi, \lambda \rangle = \langle \Phi, \Psi \cdot \lambda \rangle \quad (\lambda \in X).$$

در حالت خاص $X = \mathcal{A}^*$ ، ضرب روی X^* همان ضرب آرئز اول است. در حالتی که S یک نیم‌گروه اساسی به‌طور فشرده حذفی با عنصر همانی باشد، $L^\infty(S; M_a(S))$ زیرفضای درون‌گرای چپ توپولوژیک فضای $L^\infty(S; M_a(S))$ است [۹، گزاره ۲.۳]. علاوه‌بر این برای نیم‌گروه اساسی به‌طور فشرده حذفی با عنصر همانی S ، جبر $M_a(S)$ یک ایده‌آل بسته دوطرفه در $L^\infty(S; M_a(S))^*$ است [۹، گزاره ۳.۳]. برای اطلاعات بیشتر در مورد زیرفضای $L^\infty(S; M_a(S))$ به منابع [۹، ۱۰] مراجعه شود.

فرض کنید S یک نیم‌گروه اساسی به‌طور فشرده حذفی با عنصر همانی و نشاننده طبیعی $\iota: C_0(S) \rightarrow L^\infty(S; M_a(S))$ را در نظر بگیرید. در آن صورت هم‌ریختی ضعیف * - ضعیف * پیوسته $M(S) \rightarrow L^\infty(S; M_a(S))^* \rightarrow P = \iota^*: L^\infty(S; M_a(S))^* \rightarrow M(S)$ روی $M_a(S)$ همانی است [۱۱]. فرض کنید $\mathcal{E}(S)$ نمایش مجموعه همه نقاط ضعیف * - انباشتگی همانی تقریبی کران‌دار در $M_a(S)$ با کران ۱ باشد. به‌راحتی می‌توان نشان داد که اگر $E \in \mathcal{E}(S)$ ، آنگاه برای هر $m \in L^\infty(S; M_a(S))^*$ و $\mu \in M_a(S)$ روابط

$$m \cdot E = m, \quad E \cdot \mu = \mu$$

برقرار هستند. یعنی اینکه $\mathcal{E}(S)$ مجموعه همه همانی‌های راست در $M_a(S)^{**}$ است. همچنین $\mathcal{E}_1(S)$ را نمایش عناصر در $\mathcal{E}(S)$ با نرم ۱ در نظر می‌گیریم. علاوه‌بر این، همانی‌های راست با نرم ۱ در جبر مربوط به دوگان دوم $M_a(S)$ ، مشمول در $L^\infty(S; M_a(S))^*$ هستند [۱۰، نتیجه ۴.۲].

فرض کنید S یک نیم‌گروه توپولوژیک اساسی با عضو همانی e باشد. نگاشت نشاننده طبیعی $\iota: L^\infty(S; M_a(S)) \rightarrow M_a(S)^*$ را در نظر بگیرید. بنابراین نگاشت الحاقی $L^\infty(S; M_a(S))^* \rightarrow M_a(S)^{**} \rightarrow L^\infty(S; M_a(S))^*$ $\pi = \iota^*: M_a(S)^{**} \rightarrow L^\infty(S; M_a(S))^*$ پوشا و علاوه‌بر این برای هر همانی راست $E, \pi(E) = \delta_e$ و $\pi(E) = \delta_e$ روی $M_a(S)$ همانی است. فرض کنید S یک نیم‌گروه توپولوژیک اساسی با عنصر همانی باشد. آنگاه برای هر $E \in \mathcal{E}(S)$ ، نگاشت π ، یکرختی پیوسته از $E \cdot M_a(S)^{**}$ به‌روی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ است. همچنین،

$$M_a(S)^{**} = E \cdot M_a(S)^{**} \oplus \ker(\pi), \quad (۱.۲)$$

مجموع مستقیم جبری ایده‌آل راست نرم بسته $EM_a(S)^{**}$ و ایده‌آل ضعیف ستاره بسته $\ker(\pi)$ است و اگر $\|E\| = ۱$ ، آنگاه یکرختی π طولپا است. علاوه‌بر این، همانی‌های راست با نرم ۱ در جبر مربوط به دوگان دوم $M_a(S)$ ، مشمول در $L^\infty(S; M_a(S))^*$ هستند [۱۰، نتیجه ۴.۲]. بنابراین با تلفیق مطالب بالا، به‌راحتی می‌توان نشان داد که $\pi^{-1}(L^\infty(S; M_a(S))^*) = M(S)$.

۳ نتایج اصلی

این بخش را با قضیه اساسی زیر شروع می‌کنیم که به بررسی قضیه سینگر-ورمر برای جبر باناخ $L^\infty(S; M_a(S))^*$ خواهد پرداخت.

قضیه ۱.۳. فرض کنید S یک نیم‌گروه جابجایی اساسی به‌طور فشرده حذفی با عنصر همانی باشد که $\hat{S}$ نقاط S را جدا می‌کند. در آن صورت تصویر هر اشتقاق روی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ مشمول در پوچساز راست $L^\infty(S; M_a(S))^*$ است.

اثبات. فرض کنید $E \in \mathcal{E}_1(S)$. تابع $D: M(S) \rightarrow M(S)$ را با ضابطه $D(\mu) = \mathcal{P} \circ \tilde{d} \circ \mathcal{P}_E^{-1}(\mu)$ که در آن $\tilde{d}$ و $\mathcal{P}_E$ به ترتیب تحدید D و $\mathcal{P}$ به $L^\infty(S; M_a(S))^*$ هستند را در نظر بگیرید. فرض کنید $\mu, \nu \in M(S)$. لذا عناصر $m, n \in L^\infty(S; M_a(S))^*$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\mathcal{P}_E(E \cdot (m \cdot n)) = \mu * \nu$ بنابراین خواهیم داشت

$$\begin{aligned} D(\mu * \nu) &= \mathcal{P} \circ \tilde{d} \circ \mathcal{P}_E^{-1}(\mu * \nu) \\ &= \mathcal{P} \circ \tilde{d}(E \cdot (m \cdot n)) \\ &= \mathcal{P} \circ \tilde{d}((E \cdot m) \cdot (E \cdot n)) \\ &= \mathcal{P}(\tilde{d}(E \cdot m) \cdot (E \cdot n) + (E \cdot m) \cdot \tilde{d}(E \cdot n)) \\ &= \mathcal{P} \circ \tilde{d}(E \cdot m) * \mathcal{P}(E \cdot n) + \mathcal{P}(E \cdot m) * \mathcal{P} \circ \tilde{d}(E \cdot n) \\ &= \mathcal{P} \circ \tilde{d} \circ \mathcal{P}_E^{-1}(\mu) * \nu + \mu * \mathcal{P} \circ \tilde{d} \circ \mathcal{P}_E^{-1}(\nu) \\ &= D(\mu) * \nu + \mu * D(\nu). \end{aligned}$$

بنابراین D یک اشتقاق روی جبر باناخ جابجایی نیم ساده $M(S)$ است. لذا $D = 0$. در نتیجه

$$\tilde{d} \circ \mathcal{P}_E^{-1}(M(S)) \subseteq \text{Ann}_r(L^\infty(S; M_a(S))^*).$$

از آنجایی که نگاشت $\mathcal{P}_E$ از $E \cdot L^\infty(S; M_a(S))^*$ به $M(S)$ یکرخت است لذا پوشا است. در نتیجه خواهیم داشت

$$D(E \cdot L^\infty(S; M_a(S))^*) \subseteq \text{Ann}_r(L^\infty(S; M_a(S))^*).$$

از طرفی دیگر، به ازای هر $m \in L^\infty(S; M_a(S))^*$ و $r \in \text{Ann}_r(L^\infty(S; M_a(S))^*)$ تساوی

$$m \cdot D(r) = D(m \cdot r) - D(m) \cdot r = 0$$

برقرار است. چون $L^\infty(S; M_a(S))^*$ به صورت مجموع مستقیم فضای باناخ $E \cdot L^\infty(S; M_a(S))^*$ و $\text{Ann}_r(L^\infty(S; M_a(S))^*)$ است، در نتیجه داریم $D(\text{Ann}_r(L^\infty(S; M_a(S))^*)) \subseteq \text{Ann}_r(L^\infty(S; M_a(S))^*)$ یعنی حکم برقرار است. $\square$

قبل از اینکه به بیان نتیجه جالبی از قضیه ۱.۳ بپردازیم، یادآوری می‌کنیم که نگاشت خطی T روی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ را به طور طیفی کران دار می‌نامیم هرگاه برای هر $m \in L^\infty(S; M_a(S))^*$ عدد حقیقی نامنفی α وجود داشته باشد به طوری که نامساوی

$$r(T(M) \leq \alpha r(m),$$

که در آن $r(\cdot)$ نمایش شعاع طیفی است برقرار باشد.

نتیجه ۲.۳. فرض کنید S یک نیم گروه جابجایی اساسی به طور فشرده حذفی با عنصر همانی باشد که $\hat{S}$ نقاط S را جدا می‌کند. در آن صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند.

- (الف) هر اشتقاق روی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ ، آن را به رادیکال خود می‌نگارد.
- (ب) ایده‌آل‌های اولیه $L^\infty(S; M_a(S))^*$ ، تحت اشتقاق‌های روی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ پایا هستند.
- (پ) هر اشتقاق روی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ به طور طیفی کران دار است.
- (ت) همیشه ترکیب دو اشتقاق روی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ یک اشتقاق روی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ است.

اثبات. با توجه به اینکه مجموعه عناصر پوچ توان حاوی رادیکال جبر است، لذا گزاره (الف) از قضیه ۱.۳ نتیجه می‌شود. برای اثبات (پ) فرض کنید D یک اشتقاق روی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ است. بنابراین برای هر $m \in L^\infty(S; M_a(S))^*$ و $i \geq 2$ داریم $D(m)^i = 0$. بنابراین گزاره (پ) از قضیه ۱.۳ نتیجه می‌شود. گزاره‌های (ب) و (ت) به راحتی از ۱.۳ حاصل می‌شوند. $\square$

در ادامه نتیجه دیگری از قضیه ۱.۳ ارائه خواهد شد.

نتیجه ۳.۳. فرض کنید S یک نیم گروه جابجایی اساسی به طور فشرده حذفی با عنصر همانی باشد که $\hat{S}$ نقاط S را جدا می‌کند. در آن صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند.

- (الف) اگر D یک اشتقاق روی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ باشد، آنگاه $D|_{M_a(S)}$ برابر صفر است.
- (ب) تنها اشتقاق ضعیف* — ضعیف* پیوسته روی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ نگاشت صفر است.

اثبات. (الف) به ازای هر $r \in \text{Ann}_r(L^\infty(S; M_a(S))^*)$ و $\mu \in M_a(S)$ داریم

$$r \cdot \mu = \mu \cdot r = 0.$$

بنابراین اگر D یک اشتقاق روی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ باشد، آنگاه

$$D(\mu_1 * \mu_2) = D(\mu_1) \cdot \mu_2 + \mu_1 \cdot D(\mu_2) = 0.$$

در نتیجه با توجه به قضیه تجزیه کوهن حکم برقرار است.

(ب) با توجه به اینکه $M_a(S)$ در $L^\infty(S; M_a(S))^*$ ضعیف* چگال است، حکم از قضیه گلدشتاین و قسمت (الف) نتیجه می‌شود. $\square$

قضیه ۴.۳. فرض کنید S یک نیم‌گروه جابجایی اساسی به‌طور فشرده حذفی با عنصر همانی و D یک اشتقاق روی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ باشد. در آن صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند.

(الف) به‌ازای هر $E \in \mathcal{E}_1(S)$ اشتقاق $E|_{E \cdot L^\infty(S; M_a(S))^*}$ به‌طور خودکار پیوسته است.
 (ب) اشتقاق D پیوسته است اگر و فقط اگر $D|_{\text{Ann}_r(L^\infty(S; M_a(S))^*)}$ پیوسته باشد.

اثبات. (الف) فرض کنید $E \in \mathcal{E}_1(S)$ و $(E \cdot m_\alpha)_{\alpha \in I}$ یک تور در $E \cdot L^\infty(S; M_a(S))^*$ باشد به‌طوری‌که $E \cdot m_\alpha \rightarrow 0$. در آن صورت به‌ازای هر $\alpha \in I$ با استفاده از قضیه ۱.۳ داریم

$$\begin{aligned} \|D(E \cdot m_\alpha)\| &= \|D(E \cdot E \cdot m_\alpha)\| \\ &= \|D(E) \cdot E \cdot m_\alpha\| \\ &\leq \|D(E)\| \|E \cdot m_\alpha\|. \end{aligned}$$

بنابراین $D(E \cdot m_\alpha) \rightarrow 0$ یعنی $D|_{E \cdot L^\infty(S; M_a(S))^*}$ پیوسته است.
 (ب) فرض کنید $E \in \mathcal{E}_1(S)$ و $m \in L^\infty(S; M_a(S))^*$ در آن صورت $m \cdot E \cdot m$ عضوی از $\text{Ann}_r(L^\infty(S; M_a(S))^*)$ است. اگر $D|_{\text{Ann}_r(L^\infty(S; M_a(S))^*)}$ پیوسته باشد، آنگاه $\alpha > 0$ موجود است به‌طوری‌که

$$\|D(m - E \cdot m)\| \leq \alpha \|m - E \cdot m\| \leq 2\alpha \|m\|.$$

درنتیجه با استفاده از قسمت (الف)، $\beta > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\|D(E \cdot m)\| \leq \beta \|E \cdot m\| \leq \beta \|m\|.$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\|D(m)\| = \|D(E \cdot m) + D(m - E \cdot m)\| \leq (2\alpha + \beta) \|m\|.$$

□

این نشان می‌دهد که D پیوسته است.

به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیه قبل پیوستگی خودکار اشتقاق‌های روی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ به دست می‌آید.

نتیجه ۵.۳. فرض کنید S یک نیم‌گروه جابجایی اساسی به‌طور فشرده حذفی با عنصر همانی باشد. در آن صورت هر اشتقاق روی $L^\infty(S; M_a(S))^*$ به‌طور خودکار پیوسته است.

در ادامه این بخش به بررسی قضیه دوم پوسنر روی جبر باناخ $L^\infty(S; M_a(S))^*$ می‌پردازیم. به این منظور به دو گزاره زیر نیاز داریم.

گزاره ۶.۳. اگر S نیم‌گروه توپولوژیک به‌طور فشرده حذفی اساسی با عنصر همانی e باشد، آنگاه

$$\bigcap_{E \in \mathcal{E}_1(S)} E \cdot L^\infty(S; M_a(S))^* = M_a(S).$$

اثبات. فرض کنید $E \in \mathcal{E}_1(S)$ ، در آن صورت خواهیم داشت $E \cdot L^\infty(S; M_a(S))^* = E \cdot M(S)$. این به این معنا است که $\bigcap_{E \in \mathcal{E}_1(S)} E \cdot M(S) = M_a(S)$. بنابراین کافی است نشان دهیم $\bigcap_{E \in \mathcal{E}_1(S)} E \cdot L^\infty(S; M_a(S))^* = \bigcap_{E \in \mathcal{E}_1(S)} E \cdot M(S)$.
 به این منظور اگر $\mu \in M_a(S)$ ، آنگاه $\mu \cdot E = \mu \in M_a(S)$ ، بنابراین $E \cdot \mu = \mu \in M_a(S)$ ، $\mu \in \bigcap_{E \in \mathcal{E}_1(S)} E \cdot M(S)$.

برای عکس شمول، در نظر بگیرید $\mu \in \bigcap_{E \in \mathcal{E}_1(S)} E \cdot M(S)$. در آن صورت برای هر $\mu \in M(S)$ ، $E \cdot \mu = \mu$ فرض کنید $\mu \notin M_a(S)$. با توجه به تعریف $M_a(S)$ ، تابع $x \mapsto |\mu| * \delta_x$ از S به‌توی $M(S)$ نسبت به توپولوژی نرم پیوسته نیست. می‌توان فرض کرد که اندازه μ حقیقی مقدار است. بنابراین تابع حقیقی مقدار ψ وجود دارد به‌گونه‌ای که تابع $F(x) = \int_S \psi d\mu * \delta_x$ در e پیوسته نیست. بدون از دست دادن کلیت می‌توان در نظر گرفت $\limsup_{V \downarrow e, x \in V} = 1$ و $\liminf_{V \downarrow e, x \in V} = 0$. فرض کنید V همسایگی از

e باشد و در نظر بگیرید $K = \{x \in V; F(x) \geq \frac{3}{4}\}$ و $H = \{x \in V; F(x) \leq \frac{1}{4}\}$. فرض کنید $(U_\alpha) \subset S$ یک تور به سمت پایین سودار از همسایگی‌های فشرده e باشد و (μ_α) و (ν_β) تورهایی از اندازه احتمال در $M_a(S)$ باشند به گونه‌ای که $\text{supp } \nu_\beta \subseteq U_\beta \cap H$ و $\text{supp } \mu_\alpha \subseteq U_\alpha \cap K$ واضح است که (μ_α) و (ν_β) همانی‌های تقریبی کران‌دار با نرم ۱ در $M_a(S)$ هستند و از آنجایی که گوی واحد ضعیف فشرده است، بنابراین زیرتورهایی مانند $(\mu_{\alpha_i}) \subseteq (\mu_\alpha)$ و $(\nu_{\beta_j}) \subseteq (\nu_\beta)$ وجود دارند به گونه‌ای که نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره $E_1 \rightarrow \mu_{\alpha_i}$ و $E_2 \rightarrow \nu_{\beta_j}$ ، بنابراین E_1 و E_2 همانی‌های راست در $M_a(S)^{**}$ هستند. از طرفی دیگر، $\langle \mu_{\alpha_i}, F \rangle = \int_S F d\mu_{\alpha_i} \geq \frac{3}{4}$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} \langle E_1 \cdot \mu, \psi \rangle &= \lim_i \langle \mu_{\alpha_i} * \mu, \psi \rangle \\ &= \lim_i \int_S \int_S \psi d(\mu * \delta_x) d(\mu_{\alpha_i})(x) \\ &= \lim_i \langle \mu_{\alpha_i}, F \rangle \\ &\geq \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که $\langle E_2 \cdot \mu, \psi \rangle \leq \frac{1}{4}$. بنابراین داریم $E_1 \cdot \mu \neq E_2 \cdot \mu$ که در تناقض با همانی راست بودن E_1 و E_2 است. نتیجه اینکه $\mu \in M_a(S)$ و اثبات کامل است. $\square$

در ادامه فرض کنید $\mathcal{Z}(L^\infty(S; M_a(S))^*)$ مرکز $L^\infty(S; M_a(S))^*$ باشد؛ یعنی مجموعه همه $m \in L^\infty(S; M_a(S))^*$ به‌طوری‌که برای هر $n \in L^\infty(S; M_a(S))^*$ داشته باشیم $m \cdot n = n \cdot m$.

گزاره ۷.۳. فرض کنید S نیم‌گروه به‌طور فشرده حذفی اساسی جابجایی با عنصر همانی باشد. در آن صورت

$$\mathcal{Z}(L^\infty(S; M_a(S))^*) = M_a(S).$$

اثبات. فرض کنید $E \in \mathcal{E}_1(S)$. چون $M_a(S)$ در $L^\infty(S; M_a(S))^*$ ایده‌آل است و نگاشت π روی $M_a(S)$ همانی است، بنابراین به‌ازای هر $\mu \in M_a(S)$ و $m \in L^\infty(S; M_a(S))^*$ داریم

$$\begin{aligned} \mu \cdot m &= \pi(\mu \cdot m) = \pi(\mu) * \pi(m) \\ &= \pi(m) * \pi(\mu) = \pi(m \cdot \mu) = m \cdot \mu. \end{aligned}$$

بنابراین $M_a(S)$ مشمول در $\mathcal{Z}(L^\infty(S; M_a(S))^*)$ است. برای عکس شمول برای هر $m \in \mathcal{Z}(L^\infty(S; M_a(S))^*)$ داریم

$$m = m \cdot E = E \cdot m.$$

این بدان معنی است که $m \in \bigcap_{E \in \mathcal{E}_1(S)} E \cdot L^\infty(S; M_a(S))^*$. بنابراین با توجه به گزاره ۶.۳ نتیجه می‌شود $\mathcal{Z}(L^\infty(S; M_a(S))^*)$ مشمول در $M_a(S)$ است. $\square$

در ادامه برای هر $m, n \in L^\infty(S; M_a(S))^*$ جابه‌جاگر m, n را با نماد $[m, n] = m \cdot n - n \cdot m$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۸.۳. برای هر عدد صحیح مثبت k ، نگاشت $T: L^\infty(S; M_a(S))^* \rightarrow L^\infty(S; M_a(S))^*$ را k -مرکز ساز می‌نامیم هرگاه برای هر $m \in L^\infty(S; M_a(S))^*$ تساوی

$$[T(m), m^k] \in \mathcal{Z}(L^\infty(S; M_a(S))^*),$$

برقرار باشد. در حالت خاص، اگر برای هر $m \in L^\infty(S; M_a(S))^*$ تساوی $[T(m), m^k] = 0$ برقرار باشد نگاشت T را k -جابه‌جاگر می‌نامیم.

قضیه ۹.۳. فرض کنید S یک نیم‌گروه جابجایی اساسی به‌طور فشرده حذفی با عنصر همانی باشد که $\hat{S}$ نقاط S را جدا می‌کند. اگر D یک اشتقاق روی $L^\infty_\circ(S; M_a(S))^*$ باشد، آنگاه گزاره‌های زیر معادل هستند.

(الف) $D = \circ$.

(ب) D یک نگاشت k -مرکز ساز است.

(پ) D یک نگاشت k -جابه‌جاگر است.

اثبات. برقراری گزاره (ب) از (الف) واضح است. اکنون فرض کنید گزاره (ب) برقرار باشد. در آن صورت با توجه به قضیه ۱.۳ و گزاره ۷.۳، برای هر $m \in L^\infty_\circ(S; M_a(S))^*$ داریم

$$\begin{aligned} [D(m), m^k] &= D(m) \cdot m^k \\ &= D(m^{k+1}) \in \text{Ann}_r(L^\infty_\circ(S; M_a(S))^*) \cap M_a(S) = \{\circ\}. \end{aligned}$$

بنابراین گزاره (پ) برقرار است. حال فرض کنید D یک نگاشت k -جابه‌جاگر است. در نظر بگیرید $E \in \mathcal{E}_1(S)$ در آن صورت داریم

$$D(E) = [D(E), E] = [D(E), E^k] = \circ. \quad (۱.۳)$$

از طرف دیگر برای هر $r \in \text{Ann}_r(L^\infty_\circ(S; M_a(S))^*)$ داریم $(r + E) = (r + E)^k$. در نتیجه رابطه

$$D(r) = [D(r + E), (r + E)] = [D(r + E), (r + E)^k] = \circ. \quad (۲.۳)$$

سرانجام برای هر $m \in L^\infty_\circ(S; M_a(S))^*$ با استفاده از رابطه‌های ۱.۳ و ۲.۳ نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} D(m) &= D(E \cdot m) + D(m - E \cdot m) \\ &= D(E) \cdot m + D(m - E \cdot m) \\ &= \circ. \end{aligned}$$

این بدان معنی است که گزاره (الف) از گزاره (پ) نتیجه می‌شود و این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

در پایان با توجه به قضیه ۹.۳ نتیجه اساسی زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۱۰.۳. فرض کنید S یک نیم‌گروه جابجایی اساسی به‌طور فشرده حذفی با عنصر همانی باشد که $\hat{S}$ نقاط S را جدا می‌کند. در آن صورت نگاشت صفر تنها اشتقاق مرکزساز روی $L^\infty_\circ(S; M_a(S))^*$ است.

References

- [1] Baker, A. C., & Baker, J. W. (1969). Algebras of measures on a locally compact semigroup. *J. London Math. Soc.*, 2(1), 249–259. DOI: <https://doi.org/10.1112/jlms/s2-1.1.249>.
- [2] Baker, A. C., & Baker J. W. (1970). Algebra of measures on locally compact semigroups II. *J. London Math. Soc.*, 2(2), 651–659. DOI: https://doi.org/10.1112/jlms/2.Part_4.651.
- [3] Baker, A. C., & Baker J. W. (1972). Algebra of measures on locally compact semigroups III. *J. London Math. Soc.*, 4, 685–695. DOI: <https://doi.org/10.1112/jlms/s2-4.4.685>.
- [4] Bresar, M., & Mathieu, M. (1995). Derivations mapping into the radical III. *J. Funct. Anal.*, 133, 21–29. DOI: <https://doi.org/10.1006/jfan.1995.1116>.

- [5] Fosner, M., & Persin, N. (2012). On a functional equation related to derivations in prime rings. *Monatsh. Math*, 167(2), 189–203. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00605-011-0319-z>.
- [6] Hewitt, E., & Ross, K. A. (1963). Abstract harmonic analysis. Volume I, *Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York*. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8638-2>.
- [7] Jun, K.W., & Kim, H.M. (2007). Approximate derivations mapping into the radical of Banach algebras. *Taiwan. J. Math*, 11, 277–288. DOI: <https://doi.org/10.11650/twjm/1500404652>.
- [8] Lau, A. T.-M., & Pym, J. (1990). Concerning the second dual of the group algebra of a locally compact group. *J. London Math. Soc*, 41, 445–460.
- [9] Maghsoudi, S., & Nasr-Isfahani, R. (2009). The Arens regularity of certain Banach algebras related to compactly cancellative foundation semigroups. *Bull. Belg. Math. Soc*, 16, 205–221. DOI: <https://doi.org/10.36045/bbms/1244038134>.
- [10] Maghsoudi, S., & Nasr-Isfahani, R. (2012). On the second conjugate of the weighted semigroup algebra for a locally compact semigroup. *Quaestiones Mathematicae*, 35, 219–227. DOI: <https://doi.org/10.2989/16073606.2012.697260>.
- [11] Maghsoudi, S., Nasr-Isfahani, R., & Rejali, A. (2008). Arens multiplication on Banach algebras related to locally compact semigroups. *Math. Nachr*, 281, 1495–1510. DOI: <https://doi.org/10.1002/mana.200710691>.
- [12] Mathieu, M., & Murphy, G. J. (1991). Derivations mapping into the radical. *Arch. Math*, 57, 469–474. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01246745>.
- [13] Mathieu, M., & Runde, V. (1992) Derivations mapping into the radical II. *Bull. Lond. Math. Soc*, 24, 485–487.
- [14] Mehdipour, M. J., & Saeedi, Z. (2016). Derivations On group algebras of a locally compact abelian group. *Monatsh Math*, 180, 595–605. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00605-015-0800-1>.
- [15] Posner, E.C. (1957). Derivations in prime rings. *Proc. Amer. Math. Soc*, 8, 1093–1100. DOI: <https://doi.org/10.2307/2032686>.
- [16] Singer, I.M., & Wermer, J. (1955). Derivations on commutative normed algebras. *Math. Ann*, 129, 260–264. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01362370>.
- [17] Sinclair, A.M. (1969). Continuous derivations on Banach algebras. *Proc. Amer. Math. Soc*, 20(1), 166–170. DOI: <https://doi.org/10.2307/2035981>.
- [18] Sleijpen, G. L. G. (1981). The dual of the space of measures with continuous translations. *Semigroup Forum*, 22, 139–150. <http://eudml.org/doc/134473>.
- [19] Sleijpen, G. L. G. (1976). Convolution measure algebras on semigroups. *Ph.D. Thesis Katholike Universiteit, The Netherlands*.
- [20] Thomas, M. (1988). The image of a derivation is contained in the radical. *Ann. Math*, 128, 435–460. DOI: <https://doi.org/10.2307/1971432>.

- [21] Vukman, J. (2008). On left Jordan derivations of rings and Banach algebras. *Aequ. Math*, 75, 260–266. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00010-007-2872-z>.