Measure Algebras and Applications

Tensor products for α-duals of g-frames and fusion frames in Hilbert C^*-modules

Fatemeh Zamani Mirarkoulaei[1]

1. Department of Mathematics, Kharazmi University, Tehran, Iran. Email: std_zamani243@khu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 21 April 2024
Received in revised form:
23 June 2024
Accepted: 01 July 2024
Published Online:
20 August 2024

Keywords:
Hilbert C^*-module,
G-frame,
Fusion frame,
α-dual,
Tensor product

2020 Mathematics Subject Classification:
42C15

ABSTRACT

In this paper, we show that the tensor product of a finite number of α-duals for standard g-frames (resp. standard fusion frames) is an α-dual for the tensor product of the standard g-frames (resp. the standard fusion frames) in the tensor product of Hilbert C^*-modules.

Cite this article: Zamani Mirarkoulaei, F. (2024). Tensor products for α-duals of g-frames and fusion frames in Hilbert C^*-modules. *Measure Algebras and Applications*, 2(1), 154–164. http://doi.org/10.22091/maa.2024.11097.1023

Publisher: University of Qom

DOI: 10.22091/maa.2024.11097.1023

Extended Abstract

Introduction

Let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space and let I be a finite or countable index set. A family $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ is a frame for $\mathcal{H}$, if there exist $0 < A_{\mathcal{F}} \leq B_{\mathcal{F}} < \infty$, such that

$$A_{\mathcal{F}}\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq B_{\mathcal{F}}\|f\|^2,$$

for each $f \in \mathcal{H}$. The sequence $\mathcal{F}$ is called a *Bessel sequence* if only the second inequality is required (see [4]).

For each $i \in I$, let $\mathcal{H}_i$ be a Hilbert space and let $L(\mathcal{H}, \mathcal{H}_i)$ be the set of all bounded operators from $\mathcal{H}$ into $\mathcal{H}_i$. We call $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}_i) : i \in I\}$ a *g-frame* for $\mathcal{H}$ with respect to $\{\mathcal{H}_i : i \in I\}$ if there exist two positive constants A and B such that

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} \|\Lambda_i f\|^2 \leq B\|f\|^2,$$

for each $f \in \mathcal{H}$. If only the second inequality is required, we call it a *g-Bessel sequence* with upper bound B (see [13]).

Another important generalization of frames is the fusion frame introduced in [2].

Let $\{W_i\}_{i\in I}$ be a family of closed subspaces of a Hilbert space $\mathcal{H}$, and $\{\omega_i\}_{i\in I}$ be a family of weights, i.e., $\omega_i > 0$ for each $i \in I$. Then $\mathcal{W} = \{(W_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ is a *fusion frame*, if there are two positive numbers A and B such that for each $f \in \mathcal{H}$,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} \omega_i^2 \|\pi_{W_i}(f)\|^2 \leq B\|f\|^2,$$

where π_{W_i} is the orthogonal projection onto the subspace W_i. If only the right-hand inequality is required, then $\mathcal{W}$ is called a *Bessel fusion sequence*.

It is easy to see that if $\mathcal{W} = \{(W_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ is a Bessel fusion sequence, then the operator $S_{\mathcal{W}}$ defined on $\mathcal{H}$ by $S_{\mathcal{W}} f = \sum_{i\in I} \omega_i^2 \pi_{W_i} f$ is well-defined, bounded and positive. Also, if $\mathcal{W}$ is a fusion frame, then $S_{\mathcal{W}}$ is invertible.

Note that $\mathcal{W} = \{(W_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ is a fusion frame if and only if $\Lambda_{\mathcal{W}} := \{\omega_i \pi_{W_i}\}_{i\in I}$ is a g-frame.

Tensor products of g-frames and fusion frames in Hilbert spaces were considered in [7] and α-duals of g-frames and fusion frames in Hilbert spaces were studied in [1, 12].

Hilbert C^*-modules are generalizations of Hilbert spaces by allowing the inner product to take values in a C^*-algebra rather than in the field of complex numbers.

Let $\mathfrak{A}$ be a unital C^*-algebra and suppose that E is a left $\mathfrak{A}$-module such that the linear structures of $\mathfrak{A}$ and E are compatible. Then E is called a pre-Hilbert $\mathfrak{A}$-module if E is equipped with an $\mathfrak{A}$-valued inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathfrak{A}$, such that

(i) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$, for each $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ and $x, y, z \in E$;

(ii) $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$, for each $a \in \mathfrak{A}$ and $x, y \in E$;

(iii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^*$, for each $x, y \in E$;

(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0$, for each $x \in E$ and if $\langle x, x\rangle = 0$, then $x = 0$.

For each $x \in E$, we define $\|x\| = \|\langle x, x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$. If E is complete with $\|.\|$, it is called a *Hilbert $\mathfrak{A}$-module* or a *Hilbert C^*-module* over $\mathfrak{A}$.

Let E be a Hilbert $\mathfrak{A}$-module. A family $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I} \subseteq E$ is a *frame* for E, if there exist real constants $0 < A_{\mathcal{F}} \leq B_{\mathcal{F}} < \infty$, such that for each $x \in E$,

$$A_{\mathcal{F}}\langle x, x\rangle \leq \sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle\langle f_i, x\rangle \leq B_{\mathcal{F}}\langle x, x\rangle.$$

If the second inequality is required, $\mathcal{F}$ is a *Bessel sequence*. If the series $\sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle\langle f_i, x\rangle$ is convergent with respect to the norm, then $\mathcal{F}$ is called a *standard frame* (see [5]).

A closed submodule M of E is *orthogonally complemented* if $E = M \oplus M^{\perp}$. In this case $\pi_M \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}(E, M)$, where $\pi_M : E \longrightarrow M$ is the projection onto M.
Suppose that $\{\omega_i : i \in I\} \subseteq \mathfrak{A}$ is a family of weights, i.e., each ω_i is a positive, invertible element from the center of $\mathfrak{A}$, and $\{W_i : i \in I\}$ is a family of orthogonally complemented submodules of E. Then $\{(W_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ is a *fusion frame* if there exist positive numbers A and B such that

$$A.\langle x, x\rangle \leq \sum_{i\in I}\omega_i^2\langle \pi_{W_i}(x), \pi_{W_i}(x)\rangle \leq B.\langle x, x\rangle,$$

for each $x \in E$. If we only require to have the upper bound, then $\{(W_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ is called a *Bessel fusion sequence* with upper bound B.

Let $\{E_i\}_{i\in I}$ be a sequence of Hilbert $\mathfrak{A}$–modules. A sequence $\Lambda = \{\Lambda_i \in \mathfrak{L}(E, E_i) : i \in I\}$ is called a *g-frame* for E with respect to $\{E_i : i \in I\}$ if there exist real constants $A, B > 0$ such that for each $x \in E$,

$$A.\langle x, x\rangle \leq \sum_{i\in I}\langle \Lambda_i x, \Lambda_i x\rangle \leq B.\langle x, x\rangle.$$

If only the second-hand inequality is required, then Λ is called a *g-Bessel sequence*. Standard g-frames and fusion frames are defined similar to frames.

If $W = \{(W_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ is a standard Bessel fusion sequence, then the operator $S_W : E \longrightarrow E$ which is defined by $S_W x = \sum_{i\in I}{\omega_i}^2\pi_{W_i}x$ is adjointable and called the *operator* of W. For a standard g-Bessel sequence Λ, the operator $S_\Lambda : E \longrightarrow E$ which is defined by $S_\Lambda(x) = \sum_{i\in I}\Lambda_i^*\Lambda_i(x)$ is adjointable and it is called the *operator* of Λ. If Λ is a standard (A, B) g-frame, then $A.Id_E \leq S_\Lambda \leq B.Id_E$. For more results about fusion frames and g-frames in Hilbert C^*-modules, see [6, 11].

In this paper, all C^*-algebras are unital and Hilbert C^*-modules are finitely or countably generated. All fusion frames, g-frames and Bessel sequences are standard.

Throughout this paper I and I_k, for each $1 \leq k \leq n$, are subsets of $\mathbb{N}$. $\mathfrak{A}_k$ is a unital C^*-algebra, E, E_k and $E_{i(k)}$ are finitely or countably generated Hilbert C^*-modules, for each $k \in \{1, \dots, n\}$ and $i(k) \in I_k$.

Recall that if $\mathfrak{A}_k$ is a C^*-algebra, for each $1 \leq k \leq n$, then $\otimes_{k=1}^n\mathfrak{A}_k$ is a C^*-algebra with the spatial norm and for each $a_k \in \mathfrak{A}_k$, we have $\|a_1 \otimes \ldots \otimes a_n\| = \Pi_{k=1}^n\|a_k\|$. The multiplication and involution on simple tensors are defined by $(\otimes_{k=1}^n a_k)(\otimes_{k=1}^n b_k) = \otimes_{k=1}^n(a_k b_k)$ and $(\otimes_{k=1}^n a_k)^* = \otimes_{k=1}^n a_k^*$, respectively.

Now, if E_k is a Hilbert $\mathfrak{A}_k$-module, for each $1 \leq k \leq n$, then the (Hilbert C^*-module) tensor product $\otimes_{k=1}^n E_k = E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ is a Hilbert $(\otimes_{k=1}^n\mathfrak{A}_k)$-module. The module action and inner product for simple tensors are defined by

$$\begin{aligned}(\otimes_{k=1}^n a_k)(\otimes_{k=1}^n x_k) &= (a_1x_1) \otimes \ldots \otimes (a_nx_n)\\ &= \otimes_{k=1}^n(a_kx_k),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & \langle \otimes_{k=1}^{n} x_k, \otimes_{k=1}^{n} y_k \rangle \\ = & \langle x_1, y_1 \rangle \otimes \ldots \otimes \langle x_n, y_n \rangle \\ = & \otimes_{k=1}^{n} \langle x_k, y_k \rangle, \end{aligned}$$

respectively, where $a_k \in \mathfrak{A}_k$ and $x_k, y_k \in E_k$. For more results, see [8].

In this paper $\Phi^{(k)} = \{\Lambda_{i(k)} \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}_k}(E_k, E_{i(k)})\}_{i(k)\in I_k}$, $\Psi^{(k)} = \{\Gamma_{i(k)} \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}_k}(E_k, E_{i(k)}) : i(k) \in I_k\}$, $\mathcal{W}^{(k)} = \{(W_{i(k)}, \omega_{i(k)})\}_{i(k)\in I_k}$ $\mathcal{V}^{(k)} = \{(V_{i(k)}, \upsilon_{i(k)}) : i(k) \in I_k\}$, where $W_{i(k)}$ and $V_{i(k)}$ are orthogonally complemented submodules of E_k and $\omega_{i(k)}$ and $\upsilon_{i(k)}$ are weights in $\mathfrak{A}_k$, for each $1 \leq k \leq n$. $\otimes_{k=1}^{n} \Phi^{(k)}$ and $\otimes_{k=1}^{n} \mathcal{W}^{(k)}$ are

$$\{\Lambda_{i(1)} \otimes \ldots \otimes \Lambda_{i(n)} \in \mathfrak{L}_{(\mathfrak{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{A}_n)}(\otimes_{k=1}^{n} E_k, E_{i(1)} \otimes \ldots \otimes E_{i(n)}), (i(1), \ldots, i(n)) \in (I_1 \times \ldots \times I_n)\},$$

$$\{(W_{i(1)} \otimes \ldots \otimes W_{i(n)}, \omega_{i(1)} \otimes \ldots \otimes \omega_{i(n)}) : (i(1), \ldots, i(n)) \in (I_1 \times \ldots \times I_n)\}.$$

Tensor products of g-frames and fusion frames in Hilbert C^*-modules were studied in [9]. Here, we consider the tensor product of α-duals in Hilbert C^*-modules. Indeed, some obtained results in [12] are generalized to Hilbert C^*-modules.

Conclusion

In the present paper, the following definitions and theorems are stated:

***Definition* 0.1.** *Let $\alpha \in \mathbb{Z}$ and let $\Lambda = \{\Lambda_i \in \mathfrak{L}(E, E_i) : i \in I\}$ be a g-frame. A g-frame $\Gamma = \{\Gamma_i \in \mathfrak{L}(E, E_i) : i \in I\}$ is called an α-dual of $\{\Lambda_i\}_{i\in I}$ if $\sum_{i\in I} \Lambda_i^* \Gamma_i f = S_\Lambda^\alpha f$, for each $f \in E$.*

***Theorem* 0.2.** *Suppose that $\Phi^{(k)}$'s and $\Psi^{(k)}$'s are g-frames. If $\Psi^{(k)}$ is an α-dual of $\Phi^{(k)}$, for each $k \in \{1, \ldots, n\}$, then $\otimes_{k=1}^{n} \Psi^{(k)}$ is an α-dual of $\otimes_{k=1}^{n} \Phi^{(k)}$.*

***Definition* 0.3.** *Let $\alpha \in \mathbb{Z}$ and $\mathcal{W} = \{(W_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ and $\mathcal{V} = \{(V_i, \upsilon_i)\}_{i\in I}$ be two fusion frames for E. Then, $\mathcal{V}$ is called an α-dual of $\mathcal{W}$ if $\sum_{i\in I} \upsilon_i \omega_i \pi_{W_i} \pi_{V_i} f = S_{\mathcal{W}}^\alpha f$, for each $f \in E$.*

***Theorem* 0.4.** *Suppose that $\mathcal{W}^{(k)}$'s and $\mathcal{V}^{(k)}$'s are fusion frames. If $\mathcal{V}^{(k)}$ is an α-dual of $\mathcal{W}^{(k)}$, for each $k \in \{1, \ldots, n\}$, then $\otimes_{k=1}^{n} \mathcal{V}^{(k)}$ is an α-dual of $\otimes_{k=1}^{n} \mathcal{W}^{(k)}$.*

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۳، دوره ۲، شماره ۱، ص ۱۶۴-۱۵۴

حاصل‌ضرب‌های تانسوری برای α-دوگان‌های g-قاب‌ها و قاب‌های مخلوط در C^*-مدول‌های هیلبرت

فاطمه زمانی میرارکلائی [۱]

۱. گروه ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. رایانامه: std_zamani243@khu.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۲/۲
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۴/۳
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۴/۱۱
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۵/۳۰

کلمات کلیدی:
C^*-مدول هیلبرت،
g-قاب،
قاب مخلوط،
α-دوگان،
حاصل‌ضرب تانسوری

رده‌بندی ریاضی:
42C15

در این مقاله، نشان می‌دهیم که حاصل‌ضرب تانسوری تعداد متناهی از α-دوگان‌های g-قاب‌های استاندارد (قاب‌های مخلوط استاندارد) یک α-دوگان برای حاصل‌ضرب تانسوری g-قاب‌ها (قاب‌های مخلوط) در فضای حاصل‌ضرب تانسوری C^*-مدول‌های هیلبرت است.

استناد: زمانی میرارکلائی، فاطمه. (۱۴۰۳). حاصل‌ضرب‌های تانسوری برای α-دوگان‌های g-قاب‌ها و قاب‌های مخلوط در C^*-مدول‌های هیلبرت. جبرهای اندازه و کاربردها، ۲(۱)، ۱۶۴-۱۵۴.
http://doi.org/10.22091/maa.2024.11097.1023

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

در سال ۱۹۵۲، دافین و شیفر که در حال بررسی چند مسئلهٔ اساسی در مورد سری‌های فوریهٔ غیرهارمونیک بودند، احساس نیاز به معرفی مفهومی کردند و آن را یک قاب فضای هیلبرت نامیدند ([۴]). اما ارزش قاب‌ها در فضاهای هیلبرت پس از چاپ مقالهٔ دوبچیز، گراسمان و میِر ([۳]) در سال ۱۹۸۶ بیش‌ازپیش مشخص شد.

تعریف ۱.۱. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر باشد. دنبالهٔ $\mathcal{F}=\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب گسسته برای H نامیده می‌شود اگر دو عدد مثبت $A_{\mathcal{F}}$ و $B_{\mathcal{F}}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر $f\in H$ داشته باشیم:

$$A_{\mathcal{F}}\|f\|^۲\leq\sum_{i\in I}|\langle f,f_i\rangle|^۲\leq B_{\mathcal{F}}\|f\|^۲.$$

قاب‌های تعمیم‌یافته یا g-قاب‌ها به‌عنوان یکی از تعمیم‌های مهم قاب‌ها در [۱۳] معرفی شدند.

تعریف ۲.۱. فرض کنیم به‌ازای هر $i\in I$، H_i یک فضای هیلبرت باشد. دنبالهٔ $\Lambda=\{\Lambda_i\in L(H,H_i):i\in I\}$ یک g-قاب برای H نسبت به $\{H_i\}_{i\in I}$ نامیده می‌شود اگر دو عدد مثبت A و B موجود باشند به‌طوری‌که برای هر $f\in H$، نامساوی زیر برقرار باشد:

$$A\|f\|^۲\leq\sum_{i\in I}\|\Lambda_i f\|^۲\leq B\|f\|^۲.$$

در این حالت Λ را یک (A,B) g-قاب می‌نامیم.
A و B کران‌های g-قاب نامیده می‌شوند (A را یک کران پایین و B را یک کران بالا می‌نامیم). اگر در تعریف فوق Λ در نامساوی سمت راست صدق کند، آنگاه Λ را یک g-دنبالهٔ بسل می‌نامیم.

C^*-مدول‌های هیلبرت، تعمیم‌هایی از فضاهای هیلبرت هستند که همانند فضاهای هیلبرت دارای یک ضرب داخلی هستند با این تفاوت که ضرب داخلی دو عضو از یک C^*-مدول هیلبرت عضوی از یک C^*-جبر است و اگر این C^*-جبر میدان اعداد مختلط باشد، آنگاه این C^*-مدول هیلبرت، یک فضای هیلبرت خواهد بود.

تعریف ۳.۱. فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک C^*-جبر و E یک $\mathfrak{A}$-مدول چپ باشد. E را یک پیش C^*-مدول هیلبرت گوییم اگر ضرب داخلی $\mathfrak{A}$-مقدار $\langle .,.\rangle:E\times E\to\mathfrak{A}$ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x,y,z\in E$ ، $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ و $a\in\mathfrak{A}$ داشته باشیم:

(آ) $\langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$؛

(ب) $\langle ax,y\rangle=a\langle x,y\rangle$؛

(پ) $\langle x,y\rangle^*=\langle y,x\rangle$؛

(ت) $\langle x,x\rangle\geq ۰$ و اگر $\langle x,x\rangle=۰$، آنگاه $x=۰$.

برای هر $x\in E$، تعریف می‌کنیم $\|x\|:=\|\langle x,x\rangle\|^{\frac{۱}{۲}}$. اگر E با این نرم کامل باشد، آنگاه E را یک $\mathfrak{A}$-مدول هیلبرت یا یک C^*-مدول هیلبرت روی $\mathfrak{A}$ می‌نامیم. برای هر $a\in\mathfrak{A}$، داریم $|a|=(a^*a)^{\frac{۱}{۲}}$ و اینک برای هر $x\in E$ تعریف می‌کنیم $|x|:=\langle x,x\rangle^{\frac{۱}{۲}}$.

تعریف ۴.۱. فرض کنیم E و F دو C^*-مدول هیلبرت باشند. عملگر $T:E\to F$ را الحاقی‌پذیر گوییم اگر یک عملگر $T^*:F\to E$ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x\in E$ و $y\in F$ تساوی زیر برقرار باشد

$$\langle T(x),y\rangle=\langle x,T^*(y)\rangle.$$

عملگر T^* را الحاقی T می‌نامیم.

هر عملگر الحاقی‌پذیر مانند T کران‌دار و خطی است (یعنی به‌ازای هر $a\in\mathfrak{A}$ و $x\in E$ داریم $T(ax)=aT(x)$). مجموعهٔ تمام عملگرهای الحاقی‌پذیر از E به F را با $\mathfrak{L}(E,F)$ یا با $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}(E,F)$ نمایش می‌دهیم. دقت شود که $\mathfrak{L}(E,E)$ یک C^*-جبر است که آن را با $\mathfrak{L}(E)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱. فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک C^*-جبر باشد.

(آ) $\mathfrak{A}$-مدول هیلبرت E را به‌طور متناهی تولیدشده گوییم اگر زیرمجموعهٔ متناهی $\{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq E$ موجود باشد به‌طوری‌که هر $x \in E$ را بتوان به‌صورت یک ترکیب $\mathfrak{A}$-خطی مانند $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$، $a_i \in \mathfrak{A}$ نوشت.

(ب) $\mathfrak{A}$-مدول هیلبرت E را به‌طور شمارا تولیدشده گوییم اگر زیرمجموعهٔ شمارایی مانند $\{x_i\}_{i\in I}$ موجود باشد به‌طوری‌که هر $x \in E$، در بستار غلاف $\mathfrak{A}$-خطی $\{x_i\}_{i\in I}$ باشد.

برای مطالعهٔ بیشتر در مورد C^*-مدول‌های هیلبرت به [۸] رجوع کنید.
قاب‌ها و g-قاب‌ها در C^*-مدول‌های هیلبرت به‌ترتیب در [۵] و [۶] معرفی شدند. همچنین قاب‌های مخلوط در C^*-مدول‌های هیلبرت نیز در [۶] معرفی شده‌اند.

تعریف ۶.۱. فرض کنیم E یک C^*-مدول هیلبرت باشد. دنبالهٔ $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq E$ را یک قاب برای E گوییم اگر دو عدد مثبت A و B موجود باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in E$، نامساوی زیر برقرار باشد:

$$A\langle x, x\rangle \leq \sum_{i\in I} \langle x, f_i\rangle\langle f_i, x\rangle \leq B\langle x, x\rangle.$$

در این حالت $\{f_i\}_{i\in I}$ را یک (A, B)-قاب می‌نامیم.

A و B را کران‌های قاب می‌نامیم (A را یک کران پایین و B را یک کران بالا گوییم). اگر نامساوی سمت راست برقرار باشد $\{f_i\}_{i\in I}$ را یک دنبالهٔ بسل می‌نامیم. اگر به‌ازای هر $x \in E$، سری $\sum_{i\in I} \langle x, f_i\rangle\langle f_i, x\rangle$ با نرم همگرا باشد، آنگاه قاب را استاندارد گوییم.

تعریف ۷.۱. فرض کنیم $\{E_i\}_{i\in I}$ دنباله‌ای از C^*-مدول‌های هیلبرت باشد. دنبالهٔ $\Lambda = \{\Lambda_i \in \mathfrak{L}(E, E_i) : i \in I\}$ یک g-قاب برای E نسبت به $\{E_i\}_{i\in I}$ نامیده می‌شود اگر دو عدد مثبت A و B موجود باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in E$، نامساوی زیر برقرار باشد

$$A\langle x, x\rangle \leq \sum_{i\in I} \langle \Lambda_i x, \Lambda_i x\rangle \leq B\langle x, x\rangle.$$

در این حالت Λ را یک (A, B) g-قاب می‌نامیم. A و B را کران‌های g-قاب می‌نامیم. g-قاب Λ را استاندارد گوییم اگر برای هر $x \in E$، سری $\sum_{i\in I} \langle \Lambda_i x, \Lambda_i x\rangle$ با نرم همگرا باشد. همچنین اگر نامساوی سمت راست برقرار باشد، آنگاه Λ را یک g-دنبالهٔ بسل می‌نامیم.

تعریف ۸.۱. فرض کنیم $\{\omega_i : i \in I\} \subseteq \mathfrak{A}$ خانواده‌ای از وزن‌ها باشد یعنی هر ω_i یک عضو مثبت و وارون‌پذیر در مرکز $\mathfrak{A}$ باشد و $\{W_i : i \in I\}$ خانواده‌ای از زیرمدول‌های به‌طور متعامد مکمل‌دار در E باشد. در این صورت $\{(W_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ را یک قاب مخلوط می‌نامیم اگر اعداد A و B موجود باشند به‌طوری‌که برای هر $x \in E$ داشته باشیم:

$$A.\langle x, x\rangle \leq \sum_{i\in I} \omega_i^2 \langle \pi_{W_i}(x), \pi_{W_i}(x)\rangle \leq B.\langle x, x\rangle.$$

اگر $W = \{(W_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ یک قاب مخلوط باشد، آنگاه عملگر

$$S_W : E \longrightarrow E, \quad S_W x = \sum_{i\in I} {\omega_i}^2 \pi_{W_i} x$$

الحاقی‌پذیر است. همچنین اگر Λ یک g-دنبالهٔ بسل باشد، آنگاه

$$S_\Lambda : E \longrightarrow E, \quad S_\Lambda(x) = \sum_{i\in I} \Lambda_i^* \Lambda_i(x)$$

الحاقی‌پذیر است. برای مطالعهٔ بیشتر مراجع [۱۰، ۱۱] را مطالعه نمایید.

۲ نتایج اصلی

حاصل‌ضرب‌های تانسوری g-قاب‌ها و قاب‌های مخلوط برای فضاهای هیلبرت در مقاله [۷] و برای C^*-مدول‌های هیلبرت در مقاله [۹] بررسی شدند. همچنین α-دوگان‌های g-قاب‌ها و قاب‌های مخلوط برای فضاهای هیلبرت در [۱، ۱۲] مورد مطالعه قرار گرفتند.

در این مقاله، با استفاده از نتایج به‌دست‌آمده در مقالات فوق، نتایج مشابهی در مورد α-دوگان‌ها در C^*-مدول‌های هیلبرت به دست می‌آوریم.

در این مقاله I و I_k (برای $۱ \leq k \leq n$) زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{N}$ هستند. $\mathfrak{A}_k$ یک C^*-جبر یکدار است، E، E_k و $E_{i(k)}$ C^*-مدول‌های هیلبرت به‌طور متناهی یا شمارا تولیدشده هستند (برای $k \in \{۱, \ldots, n\}$ و $i(k) \in I_k$).
$\Psi^{(k)} = \{\Gamma_{i(k)} \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}_k}(E_k, E_{i(k)}) : i(k) \in I_k\}$، $\Phi^{(k)} = \{\Lambda_{i(k)} \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}_k}(E_k, E_{i(k)})\}_{i(k)\in I_k}$،
$\mathcal{V}^{(k)} = \{(V_{i(k)}, \upsilon_{i(k)}) : i(k) \in I_k\}$ و $\mathcal{W}^{(k)} = \{(W_{i(k)}, \omega_{i(k)})\}_{i(k)\in I_k}$، که در آن‌ها $W_{i(k)}$ و $V_{i(k)}$ زیرمدول‌های به‌طور متعامد مکمل‌دار در E_k هستند و $\omega_{i(k)}$ و $\upsilon_{i(k)}$ وزن‌هایی در $\mathfrak{A}_k$ هستند. $\otimes_{k=۱}^n \Phi^{(k)}$ و $\otimes_{k=۱}^n \mathcal{W}^{(k)}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\{\Lambda_{i(۱)} \otimes \ldots \otimes \Lambda_{i(n)} \in \mathfrak{L}_{(\mathfrak{A}_۱\otimes\ldots\otimes\mathfrak{A}_n)}(\otimes_{k=۱}^n E_k, E_{i(۱)} \otimes \ldots \otimes E_{i(n)}), (i(۱), \ldots, i(n)) \in (I_۱ \times \ldots \times I_n)\},$$

$$\{(W_{i(۱)} \otimes \ldots \otimes W_{i(n)}, \omega_{i(۱)} \otimes \ldots \otimes \omega_{i(n)}) : (i(۱), \ldots, i(n)) \in (I_۱ \times \ldots \times I_n)\}.$$

یادآوری می‌کنیم که اگر $\mathfrak{A}_k$ یک C^*-جبر باشد، آنگاه $\otimes_{k=۱}^n \mathfrak{A}_k$ یک C^*-جبر است و برای هر $a_k \in \mathfrak{A}_k$ داریم $\|a_۱ \otimes \ldots \otimes a_n\| = \Pi_{k=۱}^n \|a_k\|$. ضرب و برگشت روی تانسورهای ساده به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$(\otimes_{k=۱}^n a_k)(\otimes_{k=۱}^n b_k) = \otimes_{k=۱}^n (a_k b_k)$$

و

$$(\otimes_{k=۱}^n a_k)^* = \otimes_{k=۱}^n a_k^*.$$

اکنون اگر E_k یک C^*-مدول هیلبرت باشد (برای $۱ \leq k \leq n$)، آنگاه حاصل‌ضرب تانسوری $\otimes_{k=۱}^n E_k = E_۱ \otimes \ldots \otimes E_n$ یک $(\otimes_{k=۱}^n \mathfrak{A}_k)$-مدول هیلبرت است. اعمال مدولی و ضرب داخلی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}(\otimes_{k=۱}^n a_k)(\otimes_{k=۱}^n x_k) &= (a_۱x_۱) \otimes \ldots \otimes (a_nx_n)\\ &= \otimes_{k=۱}^n (a_kx_k),\end{aligned}$$

و

$$\langle \otimes_{k=۱}^n x_k, \otimes_{k=۱}^n y_k \rangle = \langle x_۱, y_۱ \rangle \otimes \ldots \otimes \langle x_n, y_n \rangle = \otimes_{k=۱}^n \langle x_k, y_k \rangle.$$

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $\alpha \in \mathbb{Z}$ و $\Lambda = \{\Lambda_i \in \mathfrak{L}(E, E_i) : i \in I\}$ یک g-قاب باشد. g-قاب $\Gamma = \{\Gamma_i \in \mathfrak{L}(E, E_i) : i \in I\}$ یک α-دوگان $\{\Lambda_i\}_{i\in I}$ نامیده می‌شود اگر برای هر $f \in E$ داشته باشیم:

$$\sum_{i\in I} \Lambda_i^* \Gamma_i f = S_\Lambda^\alpha f.$$

قضیه ۲.۲. فرض کنیم $\Phi^{(k)}$ها و $\Psi^{(k)}$ها g-قاب باشند. اگر $\Psi^{(k)}$ یک α-دوگان برای $\Phi^{(k)}$ باشد (به‌ازای هر $k \in \{۱, \ldots, n\}$)، آنگاه $\otimes_{k=۱}^n \Psi^{(k)}$ یک α-دوگان برای $\otimes_{k=۱}^n \Phi^{(k)}$ است.

اثبات. کافی است قضیه را برای $n = ۲$ ثابت کنیم. فرض کنیم $B_۱$ و $B_۲$ کران‌های بالا برای $\Phi^{(۱)}$ و $\Phi^{(۲)}$ باشند، $I_۱ := \{i_{۱۱}, \ldots, i_{۱p}, \ldots\}$ و $I_۲ := \{i_{۲۱}, \ldots, i_{۲q}, \ldots\}$. سپس برای $x \in E_۱$ و $y \in E_۲$ تعریف می‌کنیم $S_{۱p}x = \sum_{r=۱}^p \Lambda_{i_{۱r}}^* \Lambda_{i_{۱r}} x$ و $S_{۲q}y = \sum_{t=۱}^q \Lambda_{i_{۲t}}^* \Lambda_{i_{۲t}} y$. اکنون برای هر $p, q \in \mathbb{N}$ داریم $\|S_{۱p}\| \leq \|S_{\Phi^{(۱)}}\|$ و $\|S_{۲q}\| \leq \|S_{\Phi^{(۲)}}\|$ و چون $\Phi^{(۱)}$ و $\Phi^{(۲)}$ g-قاب‌های استاندارد هستند، پس برای $k \in \{۱, ۲\}$ خواهیم داشت $۰ \leq S_{\Phi^{(k)}} \leq B_k.Id_{E_k}$ درنتیجه

$$\circ \leq S_{\Phi^{(1)}} \otimes S_{\Phi^{(2)}} \leq B_1 B_2 . Id_{(E_1 \otimes E_2)}.$$

لذا از لم ۱.۴ در [۸]، برای هر $z \in E_1 \otimes E_2$ و $p, q \in \mathbb{N}$ داریم

$$\langle (S_{1p} \otimes S_{2q})z, z\rangle \leq \langle (S_{\Phi^{(1)}} \otimes S_{\Phi^{(2)}})z, z\rangle \leq B_1 B_2 . \langle z, z\rangle. \tag{۱.۲}$$

همچنین به‌سادگی می‌توان مشاهده کرد که برای هر $z = \sum_{l=1}^{m} x_l \otimes y_l \in E_1 \otimes_{alg} E_2$ داریم

$$\lim_{p,q} (S_{1p} \otimes S_{2q})z = (S_{\Phi^{(1)}} \otimes S_{\Phi^{(2)}})z.$$

اینک اگر $z \in E_1 \otimes E_2$، آنگاه با انتخاب مناسب یک $z_\circ \in E_1 \otimes_{alg} E_2$ و با استفاده از نامساوی

$$\begin{aligned} & \|(S_{1p} \otimes S_{2q})z - (S_{\Phi^{(1)}} \otimes S_{\Phi^{(2)}})z\| \\ \leq \ & \|S_{\Phi^{(1)}}\| \|S_{\Phi^{(2)}}\| \|z - z_\circ\| \\ + \ & \|(S_{1p} \otimes S_{2q})z_\circ - (S_{\Phi^{(1)}} \otimes S_{\Phi^{(2)}})z_\circ\| \\ + \ & B_1 B_2 \|z - z_\circ\|, \end{aligned}$$

خواهیم داشت

$$\lim_{p,q} (S_{1p} \otimes S_{2q})z = (S_{\Phi^{(1)}} \otimes S_{\Phi^{(2)}})z.$$

این رابطه نشان می‌دهد سری $\sum_{(i(1),i(2)) \in I_1 \times I_2} \langle (\Lambda_{i(1)} \otimes \Lambda_{i(2)})z, (\Lambda_{i(1)} \otimes \Lambda_{i(2)})z\rangle$ با نرم همگرا است و با استفاده از (۱.۲)، داریم

$$\begin{aligned} & \sum_{(i(1),i(2)) \in I_1 \times I_2} \langle (\Lambda_{i(1)} \otimes \Lambda_{i(2)})z, (\Lambda_{i(1)} \otimes \Lambda_{i(2)})z\rangle \\ & = \langle (S_{\Phi^{(1)}} \otimes S_{\Phi^{(2)}})z, z\rangle \leq B_1 B_2 . \langle z, z\rangle. \end{aligned} \tag{۲.۲}$$

این نشان می‌دهد $\Phi^{(1)} \otimes \Phi^{(2)}$ یک g-دنبالهٔ بسل استاندارد با کران $B_1 B_2$ است.

حال فرض کنیم $\Phi^{(1)}$ و $\Phi^{(2)}$، g-قاب‌های استاندارد با کران‌های پایین A_1 و A_2 باشند. چون

$$\begin{aligned} & A_1 A_2 . Id_{E_1 \otimes E_2} \\ \leq \ & (\|S^{-1}_{\Phi^{(1)}}\|^{-1} \|S^{-1}_{\Phi^{(2)}}\|^{-1}). Id_{E_1 \otimes E_2} \\ = \ & \|(S_{\Phi^{(1)}} \otimes S_{\Phi^{(2)}})^{-1}\|^{-1}. Id_{E_1 \otimes E_2} \\ \leq \ & S_{\Phi^{(1)}} \otimes S_{\Phi^{(2)}}, \end{aligned}$$

با استفاده از (۱.۲) و (۲.۲)، به دست می‌آوریم که $\otimes_{k=1}^{2} \Phi^{(k)}$ یک g-قاب استاندارد با کران پایین $A_1 A_2$ است.

به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که $\otimes_{k=1}^{2} \Psi^{(k)}$ یک g-قاب استاندارد است.

پس تا اینجا نشان دادیم که $\otimes_{k=1}^{n} \Phi^{(k)}$ و $\otimes_{k=1}^{n} \Psi^{(k)}$ g-قاب‌های استاندارد هستند. همچنین از رابطه (۲.۲) به دست می‌آوریم که $\otimes_{k=1}^{n} S_{\Phi^{(k)}} = S_{\otimes_{k=1}^{n} \Phi^{(k)}}$ بنابراین برای هر $m \in \mathbb{N}$ داریم

$$\otimes_{k=1}^{n} S^{m}_{\Phi^{(k)}} = (\otimes_{k=1}^{n} S_{\Phi^{(k)}})^{m} = S^{m}_{\otimes_{k=1}^{n} \Phi^{(k)}},$$

و

$$\otimes_{k=1}^{n} S^{-1}_{\Phi^{(k)}} = (\otimes_{k=1}^{n} S_{\Phi^{(k)}})^{-1} = S^{-1}_{\otimes_{k=1}^{n} \Phi^{(k)}}.$$

لذا برای هر $\alpha \in \mathbb{Z}$ خواهیم داشت

$$\otimes_{k=1}^{n} S^{\alpha}_{\Phi^{(k)}} = (\otimes_{k=1}^{n} S_{\Phi^{(k)}})^{\alpha} = S^{\alpha}_{\otimes_{k=1}^{n} \Phi^{(k)}}.$$

پس برای هر $\otimes_{k=1}^n f_{i(k)} \in \otimes_{k=1}^n E_k$ داریم:

$$\begin{aligned}&\sum_{(i(1),\ldots,i(n))\in(I_1\times\ldots\times I_n)} (\Lambda_{i(1)}\otimes\ldots\otimes\Lambda_{i(n)})^*(\Gamma_{i(1)}\otimes\ldots\otimes\Gamma_{i(n)})(\otimes_{k=1}^n f_{i(k)})\\ =\ & \otimes_{k=1}^n S^{\alpha}_{\Phi^{(k)}}(\otimes_{k=1}^n f_{i(k)}) = (\otimes_{k=1}^n S_{\Phi^{(k)}})^{\alpha}(\otimes_{k=1}^n f_{i(k)})\\ =\ & S^{\alpha}_{\otimes_{k=1}^n \Phi^{(k)}}(\otimes_{k=1}^n f_{i(k)}).\end{aligned}$$

این رابطه نشان می‌دهد که $\otimes_{k=1}^n \Psi^{(k)}$ یک α-دوگان برای $\otimes_{k=1}^n \Phi^{(k)}$ است. □

تعریف ۳.۲. فرض کنیم $\alpha \in \mathbb{Z}$ و $\mathcal{W} = \{(W_i, \omega_i)\}_{i\in I}$ یک قاب مخلوط باشد. قاب مخلوط $\mathcal{V} = \{(V_i, \upsilon_i)\}_{i\in I}$ یک α-دوگان $\mathcal{W}$ نامیده می‌شود اگر برای هر $f \in E$ داشته باشیم $\sum_{i\in I} \upsilon_i\omega_i\pi_{W_i}\pi_{V_i} f = S^{\alpha}_{\mathcal{W}} f$.

قضیه ۴.۲. فرض کنیم $\mathcal{W}^{(k)}$ها و $\mathcal{V}^{(k)}$ها قاب‌های مخلوط باشند. اگر $\mathcal{V}^{(k)}$ یک α-دوگان برای $\mathcal{W}^{(k)}$ باشد (به‌ازای هر $k \in \{1,\ldots,n\}$)، آنگاه $\otimes_{k=1}^n \mathcal{V}^{(k)}$ یک α-دوگان برای $\otimes_{k=1}^n \mathcal{W}^{(k)}$ است.

اثبات. نتیجه از قضیه ۲.۲ و با استفاده از این حقیقت به دست می‌آید که $\Phi^{(k)} := \{\omega_{i(k)}\pi_{W_{i(k)}}\}_{i(k)\in I_k}$ یک g-قاب استاندارد است (برای هر $1 \le k \le n$) اگر و فقط اگر $\otimes_{k=1}^n \Phi^{(k)} = \{(\omega_{i(1)}\otimes\ldots\otimes\omega_{i(n)})\pi_{(W_{i(1)}\otimes\ldots\otimes W_{i(n)})}\}_{(i(1),\ldots,i(n))\in(I_1\times\ldots\times I_n)}$ یک g-قاب استاندارد باشد ([۹]). □

References

[1] Abdollahpour, M.R., & Najati, A. (2011). G-frames and Hilbert-Schmidt operators. *Bull. Iranian Math. Soc*, 4, 141–155.

[2] Casazza, P., & Kutyniok, G. (2004). Frames of subspaces. *Contemp. Math. Amer. Math. Soc*, 345, 87–113.

[3] Daubechies, I., Grossmann, A., & Meyer, Y. (1986). Painless nonorthogonal expansions. *J. Math. Phys*, 27, 1271–1283. DOI: https://doi.org/10.1063/1.527388.

[4] Duffin, R.J., & Schaeffer, A.C. (1952). A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc*, 72, 341–366. DOI: https://doi.org/10.2307/1990760.

[5] Frank, M., & Larson, D.R. (2002). Frames in Hilbert C^*-modules and C^*-algebras. *J. Operator Theory*, 48, 273–314.

[6] Khosravi, A., & Khosravi, B. (2008). Fusion frames and g-frames in Hilbert C^*-modules. *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process*, 6, 433–446. DOI: https://doi.org/10.1142/S0219691308002458.

[7] Khosravi, A., & Mirzaee Azandaryani, M. (2012). Fusion frames and g-frames in tensor product and direct sum of Hilbert spaces. *Appl. Anal. Discrete Math*, 6, 287–303. DOI: https://doi.org/10.2298/AADM120619014K.

[8] Lance, E.C. (1995). Hilbert C^*-modules: A Toolkit for Operator Algebraists. *Cambridge University Press, Cambridge*.

[9] Mirzaee Azandaryani, M. (2016). Bessel multipliers on the tensor product of Hilbert C^*-modules. *Int. J. Industrial Mathematics*, 8(1), 9–16.

[10] Mirzaee Azandaryani, M. (2018). Invertibility of multipliers in Hilbert C^*-modules. *Filomat*, 32(17), 6073–6085. DOI: https://doi.org/10.2298/FIL1817073M.

[11] Mirzaee Azandaryani, M. (2023). The stability of duals and approximate duals of frames and generalized frames under the action of bounded operators. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 36–52. DOI: http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9513.1007.

[12] Mirzaee Azandaryani, M., & Pourgholamhossein, M. (2023). Duality and α-duality of g-frames and fusion frames in Hilbert spaces. *Mathematical Analysis & Convex Optimization*, 4, 1–6. DOI: http://doi.org/10.22034/maco.4.2.1.

[13] Sun, W. (2006). G-frames and g-Riesz bases. *J. Math. Anal. Appl*, 322, 437–452. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.09.039.