Measure Algebras and Applications

Topological groups with three relative commutativity degrees

Seyyed Ali Moosavi[1]

1. Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran. Email: s.a.mousavi@qom.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 20 April 2024
Received in revised form:
22 June 2024
Accepted: 29 June 2024
Published Online:
20 August 2024

Keywords:
Commutativity degree,
Relative commutativity degree,
Topological group,
Compact group,
Closed subgroup

2020 Mathematics Subject Classification:
20P05, 20D60, 28A60

ABSTRACT

Suppose that G is a compact Hausdorff topological group and H is a closed subgroup of G. The relative commutativity degree of H in G, denoted by $\Pr(H,G)$, represents the probability that an element of H commutes with an element of G. Let $\mathcal{D}(G)$ be the set of all relative commutativity degrees of subgroups of G. In this paper, we will study the structure of topological groups that have exactly three relative commutativity degrees for their subgroups. In particular, we will show that for such groups, the centralizer of every non-central element is a maximal abelian subgroup. We will also provide examples of groups that have three relative commutativity degrees.

Cite this article: Moosavi, S.A. (2024). Topological groups with three relative commutativity degrees. *Measure Algebras and Applications*, 2(1), 142–153. http://doi.org/10.22091/maa.2024.11077.1022

Publisher: University of Qom

DOI: 10.22091/maa.2024.11077.1022

Extended Abstract

Introduction

Suppose that G is a finite group and we define

$$C = \{(x, y) \in G \times G \mid xy = yx\}. \tag{1.1}$$

The commutativity degree of the finite group G, denoted by $\Pr(G)$, is defined as

$$\Pr(G) = \frac{|C|}{|G|^2}.$$

The commutativity degree represents the probability that two randomly selected elements of G commute. Suppose that H is a subgroup of G. The concept of relative commutativity degree of the subgroup, as a generalization of commutativity degree, was defined in [3] as

$$\Pr(H, G) = \frac{|\{(x, y) \in H \times G \mid xy = yx\}|}{|H||G|}.$$

These concepts have been the basis for extensive research on finite groups, for example in [2, 4, 6, 8]. As the above definitions show, the cardinalities of the sets play a crucial role in these definitions, therefore these definitions are not directly applicable to infinite groups.

To address this issue, one can employ the notion of measure in the definitions. For the first time, Gustafson in [6] defined the notion of commutativity degree in the more general way for a compact topological group, and established several properties similar to the finite case. In [5, 9], similar approaches have been used to study the concept of the relative commutativity degree.

Suppose that G is a compact Hausdorff topological group, and μ is the unique probability Haar measure on G (note that μ is actually the left Haar measure with the normalization condition $\mu(G) = 1$, and for any x in G, we have $\mu(xE) = \mu(E)$). On the product space $G \times G$, we consider the product measure $\mu \times \mu$. For each subgroup H of non-zero measure and every Borel subset D of G, we set

$$\mu_H(D) := \frac{\mu(H \cap D)}{\mu(H)}.$$

It can be easily observed that μ_H is the normalized Haar measure on H and μ_G will be the same as the measure μ. In [7], the relative commutativity degree of the subgroup H, denoted by $\Pr(H, G)$, is defined as follows:

$$\Pr(H, G) := \mu_H \times \mu(C) = \int_{G \times G} \chi_C(x, y)\, d\mu_H(x)\, d\mu(y)$$

where C is the set defined in equation (1.1) and χ_C is the characteristic function on C. The relative commutativity degree of the subgroup can be defined in a more general way when $H \leq K \leq G$ as:

$$\Pr(H, K) := \mu_H \times \mu_K(C) = \int_{G \times G} \chi_C(x, y)\, d\mu_H(x)\, d\mu_K(y).$$

In particular, $\Pr(H, H)$ is the same as $\Pr(H)$. We define

$$\mathcal{D}(G) = \{\Pr(H, G) \quad | \quad H \leq G\},$$

which means that $\mathcal{D}(G)$ is the set of all relative commutativity degrees of the subgroups of G. For finite groups, the study of groups whose set $\mathcal{D}(G)$ has a specific number of elements has been of great interest to many researchers. One can refer to [1, 3] for example.

In this paper, we will study the structure of compact topological groups whose set $\mathcal{D}(G)$ has exactly three elements. First, we will show that there is no group whose set $\mathcal{D}(G)$ is a set of two elements, and then we will examine the groups with three relative commutativity degrees. Also, the set $\mathcal{D}(G)$ will be computed for a class of groups with this property. We will observe that many properties will be similar to the results obtained in the finite case.

Conclusion

In this paper, the following results have been obtained:

***Lemma* 0.1.** *Suppose that $H \leq K \leq G$, then for every x in G we have*

$$\frac{\mu(C_K(x))}{\mu(K)} \leq \frac{\mu(C_H(x))}{\mu(H)}.$$

***Lemma* 0.2.** *Suppose that $H \leq K \leq G$, then we have $\Pr(H, G) \leq \Pr(K, G)$ and the equality holds if and only if for every x in G we have $K = HC_K(x)$.*

***Lemma* 0.3.** *Suppose that G is a non-abelian group and $x \in G \setminus Z(G)$. Then*

$$\Pr(\langle x \rangle, G) \notin \{1, \Pr(G)\}.$$

***Corollary* 0.4.** *Suppose that G is a non-abelian group, then $|\mathcal{D}(G)| \neq 2$.*

***Lemma* 0.5.** *Suppose that G is a non-abelian group and $\mathcal{D}(G) = \{1, d, \Pr(G)\}$. If H is a subgroup of G such that $\Pr(H, G) = d$, then H is abelian.*

***Theorem* 0.6.** *Suppose that G is a group such that $|\mathcal{D}(G)| = 3$. Then for every $x \in G \setminus Z(G)$, the subgroup $C_G(x)$ is a maximal abelian subgroup of G.*

***Theorem* 0.7.** *Suppose that G is a group such that $|\mathcal{D}(G)| = 3$ and $\mathcal{D}(G) = \{1, d, \Pr(G)\}$. If H is a subgroup of G such that $\Pr(H, G) = d$, $x \in H \setminus Z(G)$ and $M = C_G(x)$, then*

$$\mathcal{D}(G) = \left\{1, \frac{\mu(Z)}{\mu(M)} + \mu(M \setminus Z), \Pr(G)\right\},$$

where $Z = M \cap Z(G)$.

***Example* 0.8.** *Let*

$$G_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Then G_1 with the usual multiplication of complex numbers and the usual topology of complex numbers is a compact topological group. Let p be an odd prime number and consider $G = G_1 \times D_{2p}$, where D_{2p} is the dihedral group of order $2p$ given by

$$D_{2p} = \langle a, b | a^p = b^2 = id, bab = a^{-1} \rangle = \{id, a, \cdots, a^{p-1}, b, ab, \cdots, a^{p-1}b\}.$$

By computing commutativity degrees of subgroups of G we have

$$\mathcal{D}(G) = \left\{1, \frac{p+1}{2p}, \frac{p+3}{4p}\right\}.$$

So G is a group whose $\mathcal{D}(G)$ has exactly three elements.

***Remark* 0.9.** *By comparing the results obtained in this article and [1], it is observed that all these theorems also hold in the finite case. Since every finite group with the discrete topology is a compact topological group, one can consider the proof of these theorems in the finite case as a special case of this article. However, since in the finite case, the finiteness of the order of the group is an effective tool, one can obtain more results regarding the structure of these groups, as can be seen in [1].*

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۳، دوره ۲، شماره ۱، ص ۱۵۳-۱۴۲

گروه‌های توپولوژیک با سه درجه جابه‌جایی نسبی

سید علی موسوی [۱]

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: s.a.mousavi@qom.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۲/۱
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۴/۲
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۴/۹
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۵/۳۰

کلمات کلیدی:
درجهٔ جابه‌جایی،
درجهٔ جابه‌جایی نسبی،
گروه توپولوژیک،
گروه فشرده،
زیرگروه بسته

رده‌بندی ریاضی:
20P05, 20D60, 28A60

چکیده

فرض کنید G یک گروه توپولوژیک فشردهٔ هاسدورف و H زیرگروهی بسته از G باشد. درجهٔ جابه‌جایی نسبی H در G که با نماد $\Pr(H,G)$ نمایش داده می‌شود، احتمال جابه‌جایی یک عضو H با یک عضو G را نشان می‌دهد. فرض کنید $\mathcal{D}(G)$ مجموعهٔ تمام درجات نسبی زیرگروه‌های G باشد. در این مقاله به بررسی گروه‌هایی خواهیم پرداخت که دارای دقیقاً سه درجهٔ جابه‌جایی نسبی برای زیرگروه‌های خود هستند. به‌ویژه نشان خواهیم داد که برای چنین گروه‌هایی مرکزساز هر عضو غیرمرکزی یک زیرگروه ماکسیمال آبلی خواهد بود. همچنین مثال‌هایی از گروه‌هایی که دارای سه درجهٔ جابه‌جایی نسبی هستند را معرفی خواهیم کرد.

استناد: موسوی، سید علی. (۱۴۰۳). گروه‌های توپولوژیک با سه درجه جابه‌جایی نسبی. جبرهای اندازه و کاربردها، ۲(۱)، ۱۵۳-۱۴۲.
http://doi.org/10.22091/maa.2024.11077.1022

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و قرار می‌دهیم

$$C = \{(x, y) \in G \times G \mid xy = yx\}. \tag{۱.۱}$$

درجهٔ جابه‌جایی گروه متناهی G که با نماد $\Pr(G)$ نمایش داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Pr(G) = \frac{|C|}{|G|^{۲}}.$$

درجهٔ جابه‌جایی احتمال جابه‌جا شدن دو عضو از G که به‌صورت تصادفی انتخاب شده باشند را نشان می‌دهد. فرض کنید که H زیرگروهی از G باشد. مفهوم درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه به‌عنوان تعمیمی از درجهٔ جابه‌جایی در [۳] به‌صورت زیر تعریف شد

$$\Pr(H, G) = \frac{|\{(x, y) \in H \times G \mid xy = yx\}|}{|H||G|}.$$

مفاهیم فوق زمینهٔ تحقیقات زیادی در گروه‌های متناهی بوده که برای نمونه می‌توان به [۲، ۴، ۶، ۸] مراجعه کرد. همان‌طور که در تعاریف فوق مشخص است تعداد اعضای مجموعه‌ها نقش اساسی در تعاریف فوق دارند که باعث می‌شوند تعاریف فوق در حالت گروه‌های نامتناهی قابل بیان نباشند. جهت رفع این مشکل می‌توان مفهوم اندازه را در تعاریف فوق به کار گرفت.

اولین بار گوستافسون در [۶] درجهٔ جابه‌جایی را در حالت کلی‌تر برای یک گروه توپولوژیک فشرده تعریف کرد و با استفاده از آن چند خاصیت مشابه حالت متناهی را برای این گروه‌ها ثابت کرد. در [۵، ۹] با رویکرد مشابهی مفاهیم درجهٔ جابه‌جایی نسبی مورد بررسی قرار گرفته است.

فرض کنید G یک گروه توپولوژیک فشرده و هاسدورف باشد و فرض کنید μ اندازهٔ احتمال منحصربه‌فرد G باشد (توجه کنید که μ در حقیقت اندازهٔ هار چپ است که شرط نرمال‌سازی $\mu(G) = ۱$ روی آن لحاظ شده است. همچنین به‌ازای هر x از گروه G داریم $\mu(xE) = \mu(E)$). روی فضای $G \times G$ اندازهٔ حاصل‌ضرب $\mu \times \mu$ را در نظر می‌گیریم. به‌ازای هر زیرگروه H از اندازهٔ غیرصفر و هر زیرمجموعهٔ بورل D از G قرار می‌دهیم

$$\mu_H(D) := \frac{\mu(H \cap D)}{\mu(H)},$$

در این صورت به‌راحتی می‌توان مشاهده کرد که μ_H اندازهٔ هار نرمال‌شده روی H است و μ_G همان اندازهٔ μ خواهد بود. در [۷] درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه H که با نماد $\Pr(H, G)$ نمایش داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف شده است

$$\Pr(H, G) := \mu_H \times \mu(C) = \int_{G \times G} \chi_C(x, y) d\mu_H(x) d\mu(y), \tag{۲.۱}$$

که C همان مجموعهٔ تعریف‌شده در رابطه (۱.۱) و χ_C تابع مشخصه روی C است. درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه را می‌توان در حالت کلی‌تر برای وقتی که $H \leq K \leq G$، به‌صورت زیر تعریف کرد

$$\Pr(H, K) := \mu_H \times \mu_K(C) = \int_{G \times G} \chi_C(x, y) d\mu_H(x) d\mu_K(y), \tag{۳.۱}$$

به‌ویژه $\Pr(H, H)$ همان $\Pr(H)$ خواهد بود. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{D}(G) = \{\Pr(H, G) \quad | \quad H \leq G\},$$

یعنی $\mathcal{D}(G)$ مجموعهٔ تمام درجات نسبی زیرگروه‌های G است. در گروه‌های متناهی بررسی گروه‌هایی که مجموعهٔ $\mathcal{D}(G)$ آن‌ها دارای تعداد مشخصی عضو است مورد توجه محققان زیادی بوده است. برای نمونه می‌توان به [۱، ۳] مراجعه کرد.

در این مقاله به بررسی ساختار گروه‌های توپولوژیک فشرده‌ای خواهیم پرداخت که مجموعهٔ $\mathcal{D}(G)$ آن‌ها دقیقاً دارای سه عضو است. در ابتدا نشان خواهیم داد که هیچ گروهی وجود ندارد که مجموعهٔ $\mathcal{D}(G)$ آن یک مجموعهٔ دو عضوی باشد و سپس گروه‌های با سه درجهٔ جابه‌جایی نسبی را بررسی خواهیم کرد. همچنین رده‌ای از گروه‌ها که چنین ویژگی دارند را معرفی خواهیم کرد. مشاهده خواهیم کرد که بسیاری از ویژگی‌ها با نتایج به‌دست‌آمده در حالت متناهی مشابه خواهد بود.

۲ احکام و قضایای مقدماتی

در این بخش به بیان احکام و قضایای مقدماتی خواهیم پرداخت که در مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت. در سراسر مقاله همواره منظور از گروه G، یک گروه توپولوژیک هاسدورف با اندازهٔ احتمال μ است و زیرگروه H همواره زیرگروهی بسته از اندازهٔ غیرصفر در نظر گرفته می‌شود و μ_H همان اندازهٔ تعریف‌شده در بخش مقدمه است. مرکزساز عضو x در G را با نماد $C_G(x)$ نشان داده و برای مرکز گروه از نماد $Z(G)$ استفاده می‌کنیم. همچنین $|G:H|$ نشان‌دهندهٔ شاخص زیرگروه H در گروه G خواهد بود. در ابتدا چند لم مربوط به گروه‌ها را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۲ (حکم ۵.۳.۱ از [۱۰]). فرض کنید G یک گروه باشد و H و K زیرگروه‌هایی از G باشند به‌طوری‌که $K \leq H \leq G$. در این صورت داریم

$$|G:K| = |G:H||H:K|.$$

قضیه ۲.۲ (حکم ۱۱.۳.۱ از [۱۰]). فرض کنید G یک گروه باشد و H و K زیرگروه‌هایی از G باشند. در این صورت داریم

$$|G:H\cap K| \leq |G:H||G:K|,$$

و تساوی اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر $G = HK$.

لم ۳.۲ (لم ۲.۲ از [۹]). فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از G باشد. در این صورت

$$\mu(H) = \begin{cases} \frac{1}{|G:H|} & \text{اگر } |G:H| < \infty \\ 0 & \text{اگر } |G:H| = \infty \end{cases}.$$

لم ۴.۲. فرض کنید H زیرگروهی از G باشد. در این صورت داریم

$$\Pr(H,G) = \frac{1}{\mu(H)}\int_G \mu(C_H(y))d\mu(y) = \frac{1}{\mu(H)}\int_H \mu(C_G(x))d\mu(x). \tag{۱.۲}$$

اثبات. به لم ۳.۳ از [۷] مراجعه شود. □

قضیه ۵.۲ (قضیه ۲.۴ از [۷]). فرض کنید G یک گروه غیرآبلی و H زیرگروهی از آن باشد. اگر $H \subseteq Z(G)$، آنگاه $\Pr(H,G) = 1$.

۳ نتایج اصلی

در این بخش به بررسی گروه‌هایی خواهیم پرداخت که دارای دقیقاً سه درجهٔ جابه‌جایی نسبی هستند. در ابتدا به اثبات یک لم خواهیم پرداخت که در نتایج بعدی مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

لم ۱.۳. فرض کنید $H \leq K \leq G$، در این صورت به‌ازای هر x از G داریم

$$\frac{\mu(C_K(x))}{\mu(K)} \leq \frac{\mu(C_H(x))}{\mu(H)}.$$

اثبات. رابطهٔ فوق معادل با این است که

$$\mu(H)\mu(C_K(x)) \leq \mu(K)\mu(C_H(x)).$$

اگر $|G:C_K(x)| = \infty$ آنگاه $\mu(C_K(x)) = 0$ و در این حالت حکم برقرار است. پس فرض کنید $|G:C_K(x)| \neq \infty$. چون $C_H(x) = H\cap C_K(x)$، با توجه به قضایای ۱.۲ و ۲.۲ می‌توان نوشت

$$|K:H||H:C_H(x)| = |K:C_H(x)| \leq |K:H||K:C_K(x)|, \tag{۱.۳}$$

و در این رابطه تساوی برقرار است اگر و تنها اگر به‌ازای هر x داشته باشیم $K = HC_K(x)$. با ضرب طرفین رابطهٔ فوق در $|G:K|$ خواهیم داشت

$$|G:K||K:H||H:C_H(x)| \leq |G:K||K:H||K:C_K(x)|,$$

که نتیجه می‌دهد

$$|G:H||H:C_H(x)| \leq |K:H||G:C_K(x)|.$$

این رابطه معادل با این است که

$$|G:C_H(x)| \leq |K:H||G:C_K(x)|.$$

حال اگر طرفین رابطهٔ بالا را دوباره در $|G:K|$ ضرب کنیم داریم

$$|G:K||G:C_H(x)| \leq |G:H||G:C_K(x)|,$$

و با معکوس کردن دوطرف نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{|G:H|}\frac{۱}{|G:C_K(x)|} \leq \frac{۱}{|G:K|}\frac{۱}{|G:C_H(x)|},$$

که با توجه به لم ۳.۲ همان نتیجهٔ مورد نظر است. همچنین با توجه به اینکه نامساوی فوق معادل با رابطه (۱.۳) است لذا تساوی برقرار است اگر و تنها اگر به‌ازای هر x از G داشته باشیم $K = HC_K(x)$. □

لم ۲.۳. فرض کنید $H \leq K \leq G$، در این صورت داریم $\Pr(H,G) \leq \Pr(K,G)$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر به‌ازای هر x از G داشته باشیم $K = HC_K(x)$.

اثبات. با توجه به لم ۱.۳ داریم

$$\frac{\mu(C_K(x))}{\mu(K)} \leq \frac{\mu(C_H(x))}{\mu(H)},$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر به‌ازای هر x از G داشته باشیم $K = HC_K(x)$. از ترکیب رابطهٔ فوق و لم ۴.۲ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\Pr(K,G) &= \frac{۱}{\mu(H)}\int_G \mu(C_K(y))d\mu(y)\\ &= \int_G \frac{\mu(C_K(y))}{\mu(K)}d\mu(y)\\ &\leq \int_G \frac{\mu(C_H(y))}{\mu(H)}d\mu(y) = \Pr(H,G),\end{aligned}$$

و نامساوی مورد نظر ثابت شد. همچنین تساوی برقرار است اگر و تنها اگر به‌ازای هر x از G داشته باشیم $K = HC_K(x)$. □

لم ۳.۳. فرض کنید G یک گروه غیرآبلی باشد و $x \in G \setminus Z(G)$. در این صورت

$$\Pr(\langle x\rangle, G) \notin \{۱, \Pr(G)\}.$$

اثبات. ابتدا توجه می‌کنیم که چون x یک عضو غیرمرکزی است لذا $\langle x\rangle$ زیرمجموعهٔ مرکز گروه نیست و درنتیجه $\Pr(\langle x\rangle, G) \neq ۱$. حال فرض کنید $\Pr(\langle x\rangle, G) = \Pr(G)$، در این صورت با توجه به لم ۲.۳ به‌ازای هر عضو y از G داریم $G = \langle x\rangle C_G(y)$. به‌ویژه اگر قرار دهیم $y = x$ خواهیم داشت $G = \langle x\rangle C_G(x) = C_G(x)$ که نتیجه می‌دهد $x \in Z(G)$ که متناقض با فرض است. بنابراین $\Pr(\langle x\rangle, G) \neq \Pr(G)$ و حکم ثابت شد. □

از لم فوق نتیجهٔ زیر را خواهیم داشت که نشان می‌دهد هیچ گروه غیرآبلی دارای دو درجهٔ جابه‌جایی نسبی نیست.

نتیجه ۴.۳. فرض کنید G یک گروه غیرآبلی باشد، در این صورت $|\mathcal{D}(G)| \neq ۲$.

لم ۵.۳. فرض کنید G گروهی غیرآبلی باشد و $\mathcal{D}(G)=\{1,d,\Pr(G)\}$. اگر H زیرگروهی از G باشد به‌طوری‌که $\Pr(H,G)=d$، در این صورت H آبلی است.

اثبات. فرض کنید H غیرآبلی باشد و $h\in H\setminus Z(H)$، در این صورت با توجه به لم ۳.۳ داریم $\Pr(\langle h\rangle,G)\neq\Pr(G)$ و چون h مرکزی هم نیست پس $\Pr(\langle h\rangle,G)\neq 1$. بنابراین $\Pr(\langle h\rangle,G)=\Pr(H,G)$. حال لم ۲.۳ نتیجه می‌دهد که به‌ازای هر عضو x از G داریم $H=\langle h\rangle C_H(x)$. به‌ویژه اگر x را با خود h جایگزین کنیم خواهیم داشت $H=C_H(h)$ که نشان می‌دهد $h\in Z(H)$ که متناقض با فرض است. $\square$

قضیه ۶.۳. فرض کنید G یک گروه باشد به‌طوری‌که $|\mathcal{D}(G)|=3$. در این صورت به‌ازای هر $x\in G\setminus Z(G)$، زیرگروه $C_G(x)$ یک زیرگروه ماکسیمال آبلی از G است.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{D}(G)=\{1,d,\Pr(G)\}$ و $x\in G\setminus Z(G)$. اگر $C_G(x)$ یک گروه غیرآبلی باشد آنگاه با توجه به لم ۳.۳ داریم $\Pr(C_G(x),G)\neq d$ و چون $C_G(x)$ مرکزی نیست لذا $\Pr(C_G(x),G)\neq 1$. بنابراین $\Pr(C_G(x),G)=\Pr(G)$. حال لم ۲.۳ نتیجه می‌دهد که به‌ازای هر عضو g از G داریم $G=C_G(x)C_G(g)$. به‌ویژه با قرار دادن $x=g$ خواهیم داشت $C_G(x)=C_G(x)C_G(x)=G$ که نشان می‌دهد $x\in Z(G)$ که متناقض با فرض است. لذا $C_G(x)$ آبلی است. اگر $C_G(x)$ ماکسیمال نباشد آنگاه زیرگروهی مانند M موجود است که $C_G(x)<M<G$. اگر M غیرآبلی باشد آنگاه مشابه برهان قسمت اول، نتیجه می‌شود که $G=MC_G(x)$ که به این معنی است که $G=M$ که تناقض است. پس M آبلی است و درنتیجه $M=C_G(x)$ که بازهم تناقض است. بنابراین $C_G(x)$ ماکسیمال است. $\square$

قضیه ۷.۳. فرض کنید G گروهی باشد که $|\mathcal{D}(G)|=3$ و $\mathcal{D}(G)=\{1,d,\Pr(G)\}$. اگر H زیرگروهی از G باشد به‌طوری‌که $\Pr(H,G)=d$، $x\in H\setminus Z(G)$ و $M=C_G(x)$، آنگاه

$$\mathcal{D}(G)=\left\{1,\frac{\mu(Z)}{\mu(M)}+\mu(M\setminus Z),\Pr(G)\right\},$$

که در آن $Z=M\cap Z(G)$.

اثبات. با توجه به قضیه ۶.۳، M یک زیرگروه آبلی است. قرار دهید $Z=M\cap Z(G)$. به‌ازای هر $y\in Z$ داریم $C_G(y)=G$ و درنتیجه $\mu(C_G(y))=1$. اگر $y\in M\setminus Z$ چون M آبلی ماکسیمال است لذا $C_G(y)=M$. لذا با توجه به تعریف داریم

$$\begin{aligned}\Pr(M,G)&=\frac{1}{\mu(M)}\int_M\mu(C_G(y))d\mu(y)\\&=\frac{1}{\mu(M)}\left(\int_Z\mu(C_G(y))d\mu(y)+\int_{M\setminus Z}\mu(C_G(y))d\mu(y)\right)\\&=\frac{1}{\mu(M)}\left(\int_Z d\mu(y)+\int_{M\setminus Z}\mu(M)d\mu(y)\right)\\&=\frac{\mu(Z)}{\mu(M)}+\mu(M\setminus Z).\end{aligned}$$

$\square$

مثال ۸.۳. فرض کنید $G_1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$، در این صورت G_1 با ضرب معمولی اعداد مختلط و توپولوژی معمولی اعداد مختلط، یک گروه توپولوژیک فشرده است. فرض کنید p یک عدد اول فرد باشد و قرار می‌دهیم $G=G_1\times D_{2p}$، که در آن D_{2p} گروه دووجهی از مرتبهٔ $2p$ است و اعضای آن به‌صورت زیر است

$$D_{2p}=\langle a,b|a^p=b^2=id,bab=a^{-1}\rangle=\{id,a,\cdots,a^{p-1},b,ab,\cdots,a^{p-1}b\}.$$

در این مثال نشان خواهیم داد که

$$\mathcal{D}(G)=\left\{1,\frac{p+1}{2p},\frac{p+3}{4p}\right\}.$$

برای بررسی این موضوع توجه می‌کنیم که زیرگروه‌های غیرمرکزی G به‌صورت زیر هستند

$$H_۱ = G_۱ \times \langle a \rangle, H_۲ = G_۱ \times \langle a^i b \rangle, \quad i = ۰, \cdots, p-۱.$$

ابتدا برای زیرگروه $H = H_۱$ درجهٔ جابه‌جایی نسبی را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید

$$K_۱ = \{(g, id) \mid g \in G_۱\}, \quad K_۲ = \{(g, y) \mid g \in G_۱, y \in \{a, \cdots, a^{p-۱}\}\}.$$

در این صورت واضح است که هر عضو (g, id) از $K_۱$ یک عضو مرکزی است و درنتیجه $C_G(g, id) = G$. همچنین برای هر عضو (g, a^i) از $K_۲$ داریم $C_G(g, a^i) = H$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\Pr(H, G) &= \frac{۱}{\mu(H)} \int_H \mu(C_G(y)) d\mu(y) \\
&= \frac{۱}{\mu(H)} \left(\int_{K_۱} \mu(C_G(y)) d\mu(y) + \int_{K_۲} \mu(C_G(y)) d\mu(y) \right) \\
&= \frac{۱}{\mu(H)} \left(\int_{K_۱} d\mu(y) + \int_{K_۲} \mu(H) d\mu(y)) \right) \\
&= \frac{۱}{\mu(H)} \left(\mu(K_۱) + \mu(K_۲)\mu(H) \right).
\end{aligned}$$

اما با توجه به تعاریف مجموعه‌های $K_۱$ و $K_۲$ و لم ۳.۲ واضح است که $\mu(K_۱) = \frac{۱}{۲p}$، $\mu(K_۲) = \frac{p-۱}{۲p}$ و $\mu(H) = \frac{۱}{۲}$. بنابراین داریم

$$\Pr(H, G) = ۲\left(\frac{۱}{۲p} + \frac{p-۱}{۲p} \cdot \frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{p} + \frac{p-۱}{۲p} = \frac{p+۱}{۲p}.$$

حال فرض کنید $۱ \leq i \leq p-۱$ و $H = G_۱ \times \langle a^i b \rangle$ و قرار دهید

$$K_۱ = \{(g, id) \mid g \in G_۱\}, \quad K_۲ = \{(g, a^i b) \mid g \in G_۱\}\}.$$

در این صورت بازهم با توجه به لم ۳.۲ واضح است که $\mu(K_۱) = \mu(K_۲) = \frac{۱}{۲p}$ و $\mu(H) = \frac{۱}{p}$. همچنین مانند قسمت قبل همهٔ اعضای $K_۱$ مرکزی هستند و مرکزساز آن‌ها برابر کل گروه است و برای اعضای $K_۲$ داریم $C_G(g, a^i b) = H$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned}
\Pr(H, G) &= \frac{۱}{\mu(H)} \int_H \mu(C_G(y)) d\mu(y) \\
&= \frac{۱}{\mu(H)} \left(\int_{K_۱} \mu(C_G(y)) d\mu(y) + \int_{K_۲} \mu(C_G(y)) d\mu(y) \right) \\
&= \frac{۱}{\mu(H)} \left(\int_{K_۱} d\mu(y) + \int_{K_۲} \mu(H) d\mu(y)) \right) \\
&= \frac{۱}{\mu(H)} \left(\mu(K_۱) + \mu(K_۲)\mu(H) \right) \\
&= p \left(\frac{۱}{۲p} + \frac{۱}{۲p} \cdot \frac{۱}{p} \right) \\
&= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲p} = \frac{p+۱}{۲p}.
\end{aligned}$$

مشاهده می‌شود که برای هر زیرگروه به شکل $H = G_۱ \times \langle a^i b \rangle$ درجهٔ جابه‌جایی زیرگروه با حالت قبل یکسان بوده و برابر $\frac{p+۱}{۲p}$ است. لذا برای تمام زیرگروه‌های غیرمرکزی G فقط یک درجهٔ جابه‌جایی نسبی داریم. همچنین با توجه به قضیه ۵.۲ واضح است که برای زیرگروه‌های مرکزی داریم $\Pr(H, G) = ۱$. حال به محاسبهٔ درجهٔ جابه‌جایی گروه G می‌پردازیم. قرار می‌دهیم

$$K_۱ = G_۱ \times id, K_۲ = G_۱ \times \langle a \rangle,$$

و

$$H_i = G_1 \times \langle a^i b \rangle, \quad i = 1, \cdots, p-1.$$

در این صورت واضح است که

$$\mu(K_1) = \frac{1}{2p}, \mu(K_2) = \frac{1}{2}, \mu(K_2 \setminus K_1) = \frac{p-1}{2p}, \mu(H_i) = \frac{1}{p}, \mu(H_i \setminus K_1) = \frac{1}{2p},$$

بنابراین داریم (توجه کنید که $\mu(G) = 1$)

$$\begin{aligned}
\Pr(G,G) &= \frac{1}{\mu(G)} \int_G \mu(C_G(y))d\mu(y) = \int_G \mu(C_G(y))d\mu(y) \\
&= \left(\int_{K_1} \mu(C_G(y))d\mu(y) + \int_{K_2 \setminus K_1} \mu(C_G(y))d\mu(y) + \sum_{i=0}^{p-1} \int_{H_i \setminus K_1} \mu(C_G(y))d\mu(y) \right) \\
&= \left(\int_{K_1} d\mu(y) + \int_{K_2 \setminus K_1} \mu(K_2)d\mu(y) + \sum_{i=0}^{p-1} \int_{H_i \setminus K_1} \mu(H_i)d\mu(y) \right) \\
&= \left(\mu(K_1) + \mu(K_2 \setminus K_1)\mu(K_2) + \sum_{i=0}^{p-1} \mu(H_i \setminus K_1)\mu(H_i) \right) \\
&= \left(\frac{1}{2p} + \frac{p-1}{2p}\frac{1}{2} + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{2p}\frac{1}{p} \right) \\
&= \left(\frac{1}{2p} + \frac{p-1}{4p} + \frac{1}{2p} \right) \\
&= \frac{p+3}{4p}.
\end{aligned}$$

پس

$$\mathcal{D}(G) = \left\{ 1, \frac{p+1}{2p}, \frac{p+3}{4p} \right\},$$

و لذا G یک گروه با سه درجهٔ جابه‌جایی نسبی است.

ملاحظه ۹.۳. با مقایسهٔ نتایج به‌دست‌آمده در این مقاله و [۱] مشاهده می‌شود که همهٔ این احکام در حالت متناهی هم برقرار هستند، در حقیقت چون هر گروه متناهی با توپولوژی گسسته یک گروه توپولوژیک فشرده است می‌توان برهان این احکام در حالت متناهی را به‌عنوان حالت خاصی از این مقاله در نظر گرفت. البته با توجه به اینکه در حالت متناهی، مرتبهٔ متناهی بودن گروه یک ابزار کارآمد است لذا همان‌طور که در [۱] دیده می‌شود می‌توان نتایج بیشتری در مورد ساختار این گروه‌ها به دست آورد.

References

[1] Barzgar, R., Erfanian, A., & Farrokhi DG, M. (2013). Finite groups with three relative commutativity degrees. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 39(2), 271–280.

[2] Erdos, P., & Turan, P. (1968). On some problems of a statistical group-theory. *Acta Math. Acad. Sci. Hung*, 19, 413–435. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01894517.

[3] Erfanian, A., & Farrokhi DG, M. (2015). Finite groups with four relative commutativity degrees. *Algebra Colloquium*, 22(3), 449–458. DOI: https://doi.org/10.1142/S1005386715000401.

[4] Erfanian, A., Rezaei, R., & Lescot, P. (2007). On the relative commutativity degree of a subgroup of a finite group. *Communications in Algebra*, 35, 4183–4197. DOI: https://doi.org/10.1080/00927870701545044.

[5] Erfanian, A., & Russo, F. (2008). Probability of mutually commuting n-tuples in some classes of compact groups. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 34(2), 27–37.

[6] Gustafson, W.H. (1973). What is the probability that two group elements commute?. *Amer. Math. Monthly*, 80, 1031–1304. DOI: https://doi.org/10.1080/00029890.1973.11993437.

[7] Moosavi, S.A. (2023). Relative commutativity degree for some topological groups. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 1–12. DOI: http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9447.1004.

[8] Nath, R.K., & Yadav, M.K. (2015). Some results on relative commutativity degree. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1952-)*, 64, 229–239. DOI: https://doi.org/10.1007/s12215-015-0194-x.

[9] Rezaei, R., & Russo, F.G. (2011). Bounds for the relative n-th nilpotency degree in compact groups. *Asian-European Journal of Mathematics*, 4, 495–506. DOI: https://doi.org/10.1142/S1793557111000411.

[10] Robinson, D. (1996). A Course in the Theory of Groups. *Germany: Springer New York*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8594-1.