Measure Algebras and Applications

Invariant measures of action of amenable groups and their entropy

AliReza Alehafttan[1] , **Hossein Kasiri**[2] , **Mehran Hosseinzadeh Dizaj**[3]

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, Jundi-Shapur University of Technology, Dezful, Iran. Email: a.r.alehafttan@jsu.ac.ir
2. Department of Mathematics, Jundi-Shapur University of Technology, Dezful, Iran. Email: hossein_kasiry@jsu.ac.ir
3. Department of Electrical Engineering, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran. Email: meh.hosseinzadehdizaj@iauctb.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 12 April 2024
Received in revised form: 17 June 2024
Accepted: 26 June 2024
Published Online: 20 August 2024

Keywords:
Amenable group, Følner sequence, Information function, Entropy

2020 Mathematics Subject Classification: 37A35

ABSTRACT

In this article, with the help of the concept of diagonal measure, we define an information function for the amenable group action on a compact metric space and then obtain the entropy of the group action from it. In other words, we show that the integral of the defined information function will be equal to the entropy of the amenable group action.

Cite this article: Alehafttan, A.R., Kasiri, H., & Hosseinzadeh Dizaj, M. (2024). Invariant measures of action of amenable groups and their entropy. *Measure Algebras and Applications*, 2(1), 130–141. http://doi.org/10.22091/maa.2024.10600.1018

Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/maa.2024.10600.1018

Extended Abstract

Introduction

In the classical ergodic theory, the concept of entropy is defined for measure-preserving $\mathbb{Z}$-actions. The definition of entropy is stated via different approaches, but with the same origin [1, 3, 4, 12–14, 17, 19].

Entropy of $\mathbb{Z}$-actions is generalized to actions of general amenable groups. To have a nice entropy theory for actions of amenable groups, the concept of Følner sequence is applied. A Følner sequence, for an action, is a sequence of finite sets that exhaust the space and do not move too much when acted on by any group element.

Many classical results for $\mathbb{Z}$-actions, such as Shannon-McMillan-Brieman theorem [2, 6, 17], Ergodic theorems [21, 23–25] and Rokhlin-Sinai results [16], are generalized for actions of general amenable groups.

Traditionally, the entropy of an action is a non-negative extended real number which is invariant under isomorphism. For $\mathbb{Z}$-actions it is replaced by linear operators on Banach spaces [12, 13].

In this paper, we introduce a function corresponding to the action of an amenable group, which contains the entropy of the group's action. In other words, the entropy of the group action is obtained by integrating this function, which we call the information function. With the help of information functions, entropy operators can be introduced, and a spectral approach to the concept of entropy of the action of a group is presented.

Conclusion

In this paper, the following definitions and results are applied.

***Definition* 0.1.** *Suppose that G is a topological group acting on a probability space $(X, \mathcal{B}, \mu)$ such that the action $G \times X \to X$ is measurable. The measure μ is called G-invariant if $\mu(gA) = \mu(A)$ for any $g \in G$.*

***Definition* 0.2.** *An invariant measure μ is called ergodic if, for any measurable set A we have*

$$\forall g \in A, \quad gA = A \Longrightarrow \mu(A) = 0 \quad or \quad \mu(A) = 1.$$

The collection of all probability measures on $\mathcal{B}$ is denoted by $M(X)$ and the collection of all G-invariant measures on $\mathcal{B}$ is denoted by $M(G, X)$. We also write $E(G, X)$ for the collection of all ergodic measures.

It is known that $M(X)$, equipped by the weak* topology, is a compact metrizable space [22]. The proof of the following theorem is similar to [22] Theorem 6.10.

***Theorem* 0.3.** *Suppose that G acts on a metric space X and μ is a G-invariant measure on β_X, the σ-algebra of Borel sets of X, then*

1. *$M(G, X)$ is a compact subset of $M(X)$;*

2. *$M(G, X)$ is convex;*

3. *ext*$(M(G,X)) = E(G,X)$, *i.e., the collection of ergodic measures equals the extreme points of the collection of* G*-invariant measures.*

In the following, we recall the Choquet's representation theorem.

***Theorem* 0.4.** *(Phelps [8]) Suppose that* Y *is a compact convex metrizable subset of a locally convex space* E*, and that* $x_0 \in Y$*. Then there exists a probability measure* τ *on* Y *which represents* x_0 *and is supported by the extreme points of* Y*, i.e.,* $\Psi(x_0) = \int_Y \Psi d\tau$ *for every continuous linear functional* Ψ *on* E*, and* $\tau(ext(Y)) = 1$.

Let $\mu \in M(G,X)$ and $f : X \to \mathbb{R}$ be a bounded measurable function. Since we know that $E(G,X)$ agrees with the set of extreme points of $M(X,\phi)$, applying Choquet's representation theorem for $Y = M(G,X)$ and $\Psi(\mu) = \int_X f d\mu$, we will have the following corollary:

***Corollary* 0.5.** *Suppose that* G *is a topological group acting continuously on the compact metric space* X*. Then for each* $\mu \in M(G,X)$ *there is a unique measure* $\tau = \tau_\mu$ *on the Borel subsets of the compact metrizable space* $M(G,X)$ *such that* $\tau_\mu(E(G,X)) = 1$ *and*

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \int_{E(G,X)} \left(\int_X f(x)dm(x)\right) d\tau_\mu(m)$$

for every bounded measurable function $f : X \to \mathbb{R}$.

Under the assumptions of Corollary 0.5, we write $\mu = \int_{E(G,X)} m d\tau_\mu(m)$ and it is called the ergodic decomposition of μ.

Suppose that G is a countable and discrete group. There are many equivalent formulations for the concept of amenability. In the discrete case, one of the convenient definitions of amenability for discrete groups is as follows:

A dicrete group G is amenable if for any finite set $K \subset G$ and $\delta > 0$ there is a finite set $F \subset G$ such that

$$\forall k \in K \quad |F \Delta kF| < \delta |F|.$$

Such a set F is called (K,δ)-invariant.

A sequence $\{F_n\}_{n\geq 1}$ of finite subsets of G is called a Følner sequence if for any K and $\delta > 0$, F_n is (K,δ)-invariant, for all large enough n. Without loss of generality, we may assume that $|F_n| \geq n$.

Assume that G acts from the left on a measure space $(X,\mathcal{B},\mu)$ with $\mu(X) = 1$. Let also μ preserve the action of G on X. We have the following mean ergodic theorem for amenable groups. It may easily be proved by the same method applied for $\mathbb{Z}$-actions.

***Theorem* 0.6.** *If* G *is amenable and acts ergodically on* $(X,\mathcal{B},\mu)$*, then for any* $f \in L^1(\mu)$*, and Følner sequence* $\{F_n\}_{n\geq 1}$*,*

$$A(F_n,f)(x)_{n\to\infty} \longrightarrow \int_X f d\mu \quad in \quad L^1(\mu)$$

where

$$A(F_n,f)(x) := \frac{1}{|F|}\sum_{g\in F} f(gx).$$

The pointwise version of Theorem 0.6 does not necessarily hold for any given Følner sequence [5]. The following definition is introduced in [18].

***Definition* 0.7.** *(A. Shulman) A sequence of sets $\{F_n\}_{n\geq 1}$ is said to be tempered if for some $c > 0$ and all $n \in \mathbb{N}$,*

$$|\bigcup_{k\leq n} F_k{}^{-1}F_{n+1}| \leq c|F_{n+1}|.$$

A version of the maximal ergodic theorem was proved for tempered sequences [20]. We also have the following for tempered Følner sequences [5].

***Theorem* 0.8.** *(Pointwise ergodic theorem) Let G be an amenable group acting on a measure space $(X, \mathcal{B}, \mu)$, and let $\{F_n\}_{n\geq 1}$ be a tempered Følner sequence. Then for any $f \in L^1(\mu)$,*

$$\lim_{n\to\infty} A(F_n, f)(x) = \int_X f d\mu \quad a.e.$$

A space $(X, \mathcal{B}, \mu)$ on which acts, together with a partition $\mathcal{P}$ of X, is called a process.

If $x \in X$ and $\mathcal{P}$ is a partition, then we denote the unique element of $\mathcal{P}$ containing x by $\mathcal{P}(x)$. If also, $F \subset G$ we set

$$\mathcal{P}^F := \bigvee_{g\in F} g^{-1}\mathcal{P}$$

where $\bigvee$ denotes the joint operation on the set of finite partitions.
We recall the definition of the entropy of a process.

***Definition* 0.9.** *For any $F \subset G$ and $\epsilon > 0$, we set*

$$b(F, \epsilon, \mathcal{P}) := \min\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \subset \mathcal{P}^F, \mu(\cup\mathcal{C}) > 1 - \epsilon\}.$$

Then the entropy $h_\mu(\mathcal{P})$ is defined as

$$h_\mu(\mathcal{P}) := \lim_{\epsilon\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \frac{\log b(F_n, \epsilon, \mathcal{P})}{|F_n|}$$

where $\{F_n\}_{n\geq 1}$ is a Følner sequence for G.

The following is a generalized version of the Shannon-McMillan-Breiman theorem [5].

***Theorem* 0.10.** *Let $\mathcal{P}$ be a finite partition, and assume that G is an amenable group acting ergodically on a measure space $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Let $h_\mu(\mathcal{P})$ denote the entropy of this process. Assume that $\{F_n\}_{n\geq 1}$ is a tempered sequence of Følner sets. Then for almost every x,*

$$\frac{-\log(\mu(\mathcal{P}^{F_n}(x)))}{|F_n|} \longrightarrow h_\mu(\mathcal{P}) \quad as \quad n \to \infty.$$

Information kernel for action of amenable groups

In the rest of the paper, let X be a metric space and β_X be the σ-algebra of all Borel partitions. Let G be an amenable group acting on the space (X, β_X), $\mu \in M(G, X)$ and $\mathcal{P}$ be a measurable partition of X. Let also $\{F_n\}_{n\geq 1}$ be a tempered Følner sequence of G. We may assume that $|F_{n+1}| \geq |F_n|$.

***Definition* 0.11.** *For $x, y \in X$ and $n \in \mathbb{N}$, we set*

$$\tau_n(x, y; \mathcal{P}) := \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{|F_m|} card(\{g \in F_m : y \in g^{-1}\mathcal{P}^{F_n}(x)\})$$

and

$$\tau_n^*(x, y; \mathcal{P}) := \begin{cases} -\frac{1}{|F_n|}\log \tau_n(x, y; \mathcal{P}) : \tau_n(x, y; \mathcal{P}) \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad : \tau_n(x, y; \mathcal{P}) = 0 \end{cases}$$

***Remark* 0.12.** *For $x, y \in X$ and a partition $\mathcal{P}$, the sequence $\{\tau_n^*(x, y; \mathcal{P})\}_{n\geq 1}$ is increasing.*

Note that, the previous remark holds because of the following reason:
Let $k \leq n$. The partition $\mathcal{P}^{F_n}$ is finer than $\mathcal{P}^{F_k}$ therefore, if $x \in X$, then $\mathcal{P}^{F_n}(x) \subset \mathcal{P}^{F_k}(x)$ and consequently $g^{-1}\mathcal{P}^{F_n}(x) \subset g^{-1}\mathcal{P}^{F_k}(x)$ for any $g \in G$. Now, for $m \in \mathbb{N}$ we have

$$\{g \in F_m : y \in g^{-1}\mathcal{P}^{F_n}\} \subset \{g \in F_m : y \in g^{-1}\mathcal{P}^{F_k}\}$$

which easily results in $\tau_n(x, y; \mathcal{P}) \leq \tau_k(x, y; \mathcal{P})$, therefore $\tau_k^*(x, y; \mathcal{P}) \leq \tau_n^*(x, y; \mathcal{P})$.

By Remark 0.12, $\lim_{n\to\infty} \tau_n^*(x, y; \mathcal{P})$ exists as an extended real non-negative number. So, we may have the following definition:

***Definition* 0.13.** *For $x, y \in X$ and the partition $\mathcal{P}$ of X, set*

$$I_G(x, y) := \lim_{n\to\infty} \tau_n^*(x, y; \mathcal{P}).$$

The function $I_G : X \times X \to [0, +\infty]$ is called the information kernel of G-action on X.

Before we mention our first main result, we need to note that, when G is an amenable countably infinite discrete group, for any finite measurable partition $\mathcal{P}$ of X and any $\mu \in M(G, X)$, one has the equality

$$h_\mu(\mathcal{P}) = \int_{E(G,X)} h_m(\mathcal{P}) d\tau_\mu(m) \tag{0.1}$$

where $\mu = \int_{E(G,X)} m d\tau_\mu(m)$ is the ergodic decomposition of μ. One can deduce (0.1) from [7] Propositions 5.3.2 and 5.3.5, and the proof in the case $G = \mathbb{Z}$ in [22] Theorem 8.4. (i).

***Definition* 0.14.** *Let $\mu \in M(G, X)$ and $\mu = \int_{E(G,X)} m d\tau(m)$ be the ergodic decomposition of μ. Then the diagonal measure of μ is defined by*

$$diag(\mu)(D) = \int_{M(G,X)} (m \times m)(D) d\tau(m) = \int_{E(G,X)} (m \times m)(D) d\tau(m).$$

The following theorem is our main result.

***Theorem* 0.15.** *Given any partition $\mathcal{P}$, $h_\mu(\mathcal{P}) < +\infty$ if and only if $I_G \in L^1(X \times X, \mu \times \mu)$; moreover, under the previous condition we have*

$$||I_G||_{L^1(X\times X,\mu\times\mu)} = h_\mu(\mathcal{P}).$$

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۳، دوره ۲، شماره ۱، ص ۱۴۱-۱۳۰

اندازه‌های پایای عمل گروه‌های میانگین‌پذیر و آنتروپی آن‌ها

علی‌رضا آل هفت تن [1]✉، حسین کثیری [2]، مهران حسین زاده دیزج [3]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول، ایران. رایانامه: a.r.alehafttan@jsu.ac.ir
۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول، ایران. رایانامه: hossein_kasiry@jsu.ac.ir
۳. گروه مهندسی برق، واحد تهران مرکز، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. رایانامه: meh.hosseinzadehdizaj@iauctb.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱/۲۴
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۳/۲۸
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۴/۶
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۵/۳۰

کلمات کلیدی:
گروه میانگین‌پذیر،
دنبالهٔ فولنر،
تابع اطلاعات،
آنتروپی

رده‌بندی ریاضی:
37A35

چکیده

در این مقاله، به کمک مفهوم اندازهٔ قطری، یک تابع اطلاعات برای عمل گروه میانگین‌پذیر بر یک فضای متریک فشرده تعریف کرده و سپس آنتروپی عمل گروه را از آن به دست می‌آوریم. به‌عبارت‌دیگر، نشان می‌دهیم که انتگرال از تابع اطلاعات تعریف‌شده نسبت به اندازهٔ قطری برابر با آنتروپی عمل گروه میانگین‌پذیر خواهد شد.

استناد: آل هفت تن، علی‌رضا.، کثیری، حسین.، حسین زاده دیزج ، مهران. (۱۴۰۳). اندازه‌های پایای عمل گروه‌های میانگین‌پذیر و آنتروپی آن‌ها. جبرهای اندازه و کاربردها، ۲(۱)، ۱۴۱-۱۳۰.

http://doi.org/10.22091/maa.2024.10600.1018

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

مفهوم آنتروپی در نظریهٔ ارگودیک، با رویکردهای مختلفی مورد مطالعه قرار گرفته است [۱، ۳، ۴، ۱۲–۱۴، ۱۷، ۱۹]. در نظریهٔ کلاسیک ارگودیک، این مفهوم برای عمل $\mathbb{Z}$ بر یک فضای اندازه، که اندازهٔ موجود روی فضا را حفظ می‌کند، تعریف می‌شود. این مفهوم برای اعمال گروه‌های میانگین‌پذیر تعمیم پیدا می‌کند. بدین منظور نیازمند دنبالهٔ فولنر می‌باشیم. یک دنبالهٔ فولنر برای یک عمل گروه، جایگزینی است برای دنبالهٔ اعداد طبیعی که در تعریف آنتروپی عمل $\mathbb{Z}$ در نظریهٔ کلاسیک ارگودیک مورد استفاده قرار می‌گیرد.
قضایای کلاسیک زیادی در نظریهٔ کلاسیک ارگودیک، برای عمل گروه‌های میانگین‌پذیر تعمیم یافته‌اند. به‌طور مثال، قضیهٔ شانون–مک میلان–بریمن [۲، ۶، ۱۷]، قضایای ارگودیک [۲۱، ۲۳–۲۵] و قضایای روخلین–سینای [۱۶]، برای عمل گروه‌های میانگین‌پذیر تعمیم یافته‌اند. به‌طور سنتی، آنتروپی، یک عدد نامنفی حقیقی است که تحت یکریختی پایاست. برای عمل گروه $\mathbb{Z}$، این عدد با عملگر فضای خطی بر فضاهای باناخ جایگزین شده است [۱۲، ۱۳]. در این مقاله به معرفی تابعی متناظر با عمل یک گروه میانگین‌پذیر می‌پردازیم که در درون خود، آنتروپی عمل گروه را نهفته دارد. به‌عبارت‌دیگر، آنتروپی عمل گروه با انتگرال‌گیری از این تابع، که به آن تابع اطلاعات می‌گوییم، به دست می‌آید. به کمک توابع اطلاعات می‌توان عملگرهای آنتروپی را معرفی کرده و رویکردی طیفی به مفهوم آنتروپی عمل یک گروه ارائه داد.

۲ پیش‌نیازها

در این بخش، پیش‌نیازهایی را که در ادامهٔ مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرند، از نظر خواهیم گذراند.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم G گروهی توپولوژیک باشد که بر فضای احتمال (X, β, μ) عمل می‌کند به‌گونه‌ای که این عمل به‌عنوان تابعی از $G \times X$ به X، اندازه‌پذیر است. در این صورت اندازهٔ μ را G-پایا نامیم هرگاه داشته باشیم

$$\forall A \in \beta, \quad \forall g \in G \quad : \quad \mu(gA) = \mu(A).$$

تعریف ۲.۲. اندازهٔ G-پایای μ را ارگودیک می‌نامیم هرگاه برای هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر A در X داشته باشیم

$$\forall g \in A \quad : \quad gA = A \Longrightarrow \mu(A) = ۰ \quad \text{یا} \quad \mu(A) = ۱.$$

مجموعهٔ کلیهٔ اندازه‌های احتمال بر X را با $M(X)$ و مجموعهٔ همهٔ اندازه‌های G-پایا بر X را با $M(G, X)$ نمایش می‌دهیم. به‌علاوه، مجموعهٔ تمام اندازه‌های ارگودیک را با $E(G, X)$ نشان خواهیم داد.
روشن است که $M(X)$ مجهز به توپولوژی ضعیف–ستاره بوده و نسبت به این توپولوژی فشرده و متریک‌پذیر است [۲۲].
اثبات قضیهٔ زیر مشابه اثبات قضیه ۶.۱۰ از مرجع [۲۲] است.

قضیه ۳.۲. فرض کنیم G گروهی توپولوژیک باشد که بر فضای متریک فشرده X عمل می‌کند و μ نیز اندازه‌ای G-پایا بر مجموعه‌های بورل X باشد. در این صورت

۱. $M(G, X)$ زیرمجموعه‌ای فشرده از $M(X)$ است.

۲. $M(G, X)$ محدب است.

۳. مجموعهٔ نقاط گوشه‌ای $M(G, X)$ برابر $E(G, X)$ است.

قضیهٔ زیر به قضیهٔ شوکه [۸] معروف است.

قضیه ۴.۲. فرض کنیم Y یک زیرمجموعهٔ فشرده و محدب و متریک‌پذیر از یک فضای برداری محدب موضعی E بوده و $x_۰ \in Y$. در این صورت اندازهٔ احتمال τ بر زیرمجموعه‌های بورل Y موجود است به‌گونه‌ای که $\tau(ext(Y)) = ۱$ و برای هر تابعک خطی پیوسته $\psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ داریم

$$\psi(x_۰) = \int_Y \psi \, d\tau.$$

قضیه ۵.۲. فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک با عمل پیوسته بر فضای متریک فشرده X باشد. در این صورت برای هر $\mu \in M(G,X)$، اندازهٔ احتمال یکتای $\tau = \tau_\mu$ بر زیرمجموعه‌های بورل $M(G,X)$ موجود است به‌گونه‌ای که $\tau(E(G,X)) = ۱$ و به‌علاوه برای هر تابع اندازه‌پذیر و کران‌دار $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ داریم

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_{E(G,X)} \left(\int_X f(x)\, dm(x) \right) d\mu(m).$$

اثبات. فرض کنیم $\mu \in M(G,X)$ و $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی اندازه‌پذیر و کران‌دار باشد. چون $E(G,X) = ext(M(G,X))$، حکم از به‌کارگیری قضیهٔ شوکه برای $Y = M(G,X)$ و تابعک $\psi = \int_X f\, d\mu$ به دست می‌آید. □

تحت شرایط قضیه ۵.۲ می‌نویسیم $\mu = \int_{E(G,X)} m\, d\tau(m)$ و آن را تجزیهٔ ارگودیک μ می‌نامیم.

فرض کنیم G یک گروه گسستهٔ شمارش‌پذیر باشد. فرمول‌بندی‌های معادل زیادی برای مفهوم میانگین‌پذیری وجود دارد. در حالت گسسته، تعریف معادل زیر را داریم.

تعریف ۶.۲. گروه توپولوژیک گسستهٔ G را میانگین‌پذیر می‌نامیم هرگاه برای هر زیرمجموعهٔ متناهی $K \subset G$ و هر $\delta > ۰$، زیرمجموعهٔ متناهی $F \subset G$ موجود باشد به‌گونه‌ای که

$$\forall k \in K \quad : \quad |\, F \Delta kF \,| < \delta \,|\, F \,|\, .$$

چنین مجموعه‌ای مانند تعریف ۶.۲ را (K,δ)-پایا می‌نامیم.

دنبالهٔ $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ از زیرمجموعه‌های متناهی G را دنبالهٔ فولنر نامیم، هرگاه برای هر K و هر $\delta > ۰$ و به‌ازای هر n به قدر کافی بزرگ، F_n، (K,δ)-پایا باشد. بدون کاستن از کلیت، می‌توان فرض کرد $|\, F_n \,| \geqslant n$.

فرض کنیم G از چپ بر فضای احتمال (X,β,μ) عمل کند. به‌علاوه فرض کنیم μ حافظ عمل G باشد. قضیهٔ ارگودیک میانگین زیر، به‌سادگی برای عمل $\mathbb{Z}$ بر X ثابت می‌شود.

قضیه ۷.۲. اگر G میانگین‌پذیر بوده و به‌طور ارگودیک بر (X,β,μ) عمل کند، آنگاه برای هر $f \in L^۱(\mu)$ و هر دنبالهٔ فولنر $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ داریم

$$A(F_n,f)(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f\, d\mu,$$

در $L^۱(\mu)$ که در آن

$$A(F_n,f)(x) = \frac{۱}{|\, F \,|} \sum_{g\in F} f(g(x)).$$

تذکر ۸.۲. همگرایی نقطه‌ای لزوماً در قضیه ۷.۲ برقرار نیست.

تعریف ۹.۲. ([۱۸]) دنبالهٔ فولنر $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ از زیرمجموعهٔ G را تعدیل‌شده نامیم، هرگاه برای عددی مانند $c > ۰$ و هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم

$$|\, \bigcup_{k\leqslant n} F_k^{-۱} F_{n+۱} \,| \leqslant c \,|\, F_{n+۱} \,|\, .$$

قضیهٔ زیر برای دنباله‌های فولنر تعدیل‌شده برقرار است.

قضیه ۱۰.۲. (قضیهٔ ارگودیک نقطه‌ای) فرض کنیم G گروهی توپولوژیک و میانگین‌پذیر باشد که بر فضای اندازهٔ (X,β,μ) عمل می‌کند. به‌علاوه فرض کنید $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنبالهٔ فولنر و تعدیل‌شده باشد. در این صورت برای هر $f \in L^۱(\mu)$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} A(F_n,f)(x) = \int_X f\, d\mu.$$

تذکر ۱۱.۲. اگر P افرازی اندازه‌پذیر از (X,β,μ) بوده و $x \in X$، آنگاه عضو یکتا از P که شامل x است را با $P(x)$ نمایش می‌دهیم. به‌علاوه اگر $F \subset G$، قرار می‌دهیم

$$P^F = \bigvee_{g\in F} g^{-۱} P,$$

که در آن $\vee$ به معنای تلفیق افرازها است، یعنی؛

$$P \vee Q = \{A \cap B \quad : \quad A \in P \quad , \quad B \in Q\}.$$

تعریف ۱۲.۲. برای هر $F \subset G$ و هر $\varepsilon > 0$ قرار می‌دهیم

$$b(F,\varepsilon,P) := min\Big\{ \mid C \mid \quad : \quad C \subset P^F \quad , \quad \mu(\bigcup C) > 1-\varepsilon \Big\}.$$

اکنون آنتروپی افراز P نسبت به μ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$h_\mu(P) := \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} \frac{\log(b(F,\varepsilon,P))}{\mid F_n \mid},$$

که در آن $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنبالهٔ فولنر در G است.

قضیهٔ زیر تعمیمی از قضیهٔ شانون-مک میلان-بریمن است [۵].

قضیه ۱۳.۲. فرض کنید $\mathcal{P}$ افرازی متناهی از X بوده و G گروهی میانگین‌پذیر باشد که به‌طور ارگودیک بر فضای اندازهٔ (X,β,μ) عمل می‌کند. فرض کنید $\{F_n\}_{n\geqslant 1}$ دنبالهٔ فولنری تعدیل‌شده باشد. در این صورت برای تقریباً هر $x\in X$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\log\mu(\mathcal{P}^{F_n}(x))}{|F_n|} = h_\mu(\mathcal{P}).$$

۳ هستهٔ آنتروپی برای عمل گروه‌های میانگین‌پذیر

در این قسمت به معرفی مفهوم هستهٔ آنتروپی برای عمل یک گروه میانگین‌پذیر می‌پردازیم. در ادامهٔ این مقاله، فرض کنید X یک فضای متریک و β_X، σ-جبر بورل باشد. به‌علاوه فرض کنید G گروه میانگین‌پذیر باشد که بر (X,β_X) عمل می‌کند و $\mathcal{P}$ نیز افرازی اندازه‌پذیر از X باشد. همچنین $\mu\in M(G,X)$ و $\{F_n\}_{n\geqslant 1}$ دنباله‌ای فولنر و تعدیل‌شده در G باشد به‌گونه‌ای که $|F_n| \leqslant |F_{n+1}|$.

تعریف ۱.۳. برای $x,y\in X$ و $n\in\mathbb{N}$، قرار می‌دهیم

$$\tau_n(x,y,\mathcal{P}) = \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{|F_m|}|\{g\in F_m : y\in g^{-1}\mathcal{P}^{F_n}(x)\},$$

و

$$\tau_n^*(x,y,\mathcal{P}) = \begin{cases} -\frac{1}{|F_n|}\log\tau_n(x,y,\mathcal{P}) & \tau_n(x,y,\mathcal{P}) \neq 0 \\ 0 & \tau_n(x,y,\mathcal{P}) = 0 \end{cases}.$$

به‌سادگی می‌توان دید که دنبالهٔ $\{\tau_n^*(x,y,\mathcal{P})\}_{n\geq 1}$ صعودی است، بنابراین حد آن به‌عنوان یک عدد حقیقی تعمیم‌یافته موجود است. بنابراین تعریف زیر بامعنا است.

تعریف ۲.۳. برای $x,y\in X$ و افراز $\mathcal{P}$ از X قرار دهید

$$I_G(x,y) = \lim_{n\to\infty}\tau_n^*(x,y,\mathcal{P}).$$

تابع $I_G : X\times X \to [0,\infty]$ را تابع اطلاعات عمل G بر X می‌نامیم.

قبل از بیان و اثبات مهم‌ترین خاصیت تابع اطلاعات I_G، مفهوم اندازهٔ قطری را مطرح می‌کنیم.

تعریف ۳.۳. فرض کنید $\mu\in M(G,X)$ و $\mu = \int_{E(G,X)} m d\tau(m)$ تجزیهٔ ارگودیک μ باشد. در این صورت اندازهٔ قطری μ به این صورت تعریف می‌شود

$$diag(\mu)(D) = \int_{M(G,X)} (m\times m)(D)d\tau(m) = \int_{E(G,X)} (m\times m)(D)d\tau(m).$$

توجه کنید که اندازهٔ قطری بر فضای حاصلضربی $X\times X$ تعریف می‌شود. همچنین به‌طور خاص، اگر $\mu\in E(G,X)$، آنگاه $diag(\mu) = \mu\times\mu$. اکنون آماده‌ایم تا قضیهٔ اصلی مقاله را بیان و اثبات کنیم.

قضیه ۴.۳. برای افراز $\mathcal{P}$، $h_\mu(\mathcal{P}) < \infty$ اگر و تنها اگر $I_G \in L^۱(X \times X, \mu \times \mu)$. به‌علاوه تحت فرض فوق داریم

$$||I_G||_{L^۱(X\times X, diag(\mu))} = h_\mu(\mathcal{P}).$$

اثبات. ابتدا فرض کنید $\mu \in E(G,X)$. در این صورت $diag(\mu) = \mu \times \mu$. فرض کنید $x, y \in X$ و $n \in \mathbb{N}$. در این صورت برای تقریباً هر $y \in X$ با توجه به قضیه ۱۳.۲ داریم:

$$\begin{aligned}
\tau_n(x,y,\mathcal{P}) &= \limsup_{k\to\infty} \frac{۱}{|F_k|} |\{g \in F_k : y \in g^{-۱}\mathcal{P}^{F_n}(x)\}| \\
&= \limsup_{k\to\infty} \frac{۱}{|F_k|} \sum_{g\in F_k} \chi_{g^{-۱}\mathcal{P}^{F_n}(x)}(y) \\
&= \limsup_{k\to\infty} \frac{۱}{|F_k|} \sum_{g\in F_k} \chi_{\mathcal{P}^{F_n}(x)}(gy) \\
&= \limsup_{k\to\infty} A(F_k, \chi_{\mathcal{P}^{F_n}(x)}(y) \\
&= \int_X \chi_{\mathcal{P}^{F_n}(x)}(y) d\mu(y) \\
&= \mu(\mathcal{P}^{F_n}(x)).
\end{aligned}$$

پس برای تقریباً هر $y \in X$ داریم:

$$\tau_n^*(x,y,\mathcal{P}) = -\frac{\log \mu(\mathcal{P}^{F_n}(x))}{|F_n|}.$$

ازاین‌رو برای تقریباً هر $x, y \in X$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n^*(x,y,\mathcal{P}) = h_\mu(\mathcal{P}).$$

بنابراین برای تقریباً هر $x, y \in X$

$$I_G(x,y) = h_\mu(\mathcal{P}).$$

رابطهٔ فوق به‌سادگی نتیجه می‌دهد که

$$||I_G||_{L^۱(X\times X, diag(\mu))} = ||I_G||_{L^۱(X\times X, \mu\times\mu)} = h_\mu(\mathcal{P}). \qquad (۱)$$

اکنون در حالت کلی فرض کنید $\mu \in M(X,G)$ و $\mu = \int_{E(G,X)} m d\tau(m)$ تجزیهٔ ارگودیک μ باشد. در این صورت اندازهٔ قطری μ عبارت است از:

$$diag(\mu) = \int_{E(G,X)} m \times m d\tau(m).$$

اکنون با توجه به رابطه (۱) و قضیهٔ ژاکوب (مرجع [۲۲]) داریم:

$$\begin{aligned}
||I_G||_{L^۱(X\times X, diag(\mu))} &= \int_{X\times X} I_G d(diag(\mu)) \\
&= \int_{E(G,X)} \left(\int_{X\times X} I_G dm \times m \right) d\tau(m) \\
&= \int_{E(G,X)} h_m(\mathcal{P}) d\tau(m) = h_\mu(\mathcal{P}).
\end{aligned}$$

و اثبات کامل می‌شود. □

References

[1] Adler, R.L., Konheim, A.G., & McAndrew, M.H. (1965). Topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc*, 114, 309–319. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1965-0175106-9.

[2] Bowen, R. (1979). Invariant measures for Markov maps of the interval. *Comm. Math. Physics*, 69, 1–14. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01941319.

[3] Brin, M., & Katok, A. (1983). On local entropy in geometric dynamics. 30–38, *New York, Springer-Verlag*, (Lecture Notes in Mathematics 1007). DOI: https://doi.org/10.1007/bfb0061408.

[4] Kolmogorov, A.N. (1958). New metric invariant of transitive dynamical systems and endomorphisms of Lebesgue spaces. *Doklady of Russian Academy of Sciences*, 119, 861–864.

[5] Lindenstrauss, E. (2001). Pointwise theorems for amenable groups. *Invent. math*, 146, 259–295. DOI: https://doi.org/10.1007/s002220100162.

[6] McMillan, B. (1953). The basic theorems of information theory. *Ann. Math. Statist*, 24, 196–219. DOI: https://doi.org/10.1214/aoms/1177729028.

[7] Ollagnier, J.M. (1985). Ergodic Theory and Statistical Mechanics. *Springer Berlin, Heidelberg*. DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0101575.

[8] Phelps, R. (2001). Lectures on Choquet's Theorem. *Springer-Verlag Berlin, Heidelberg (originally published by Van Nostrand, Princeton, 1966)*. DOI: https://doi.org/10.1007/b76887.

[9] Rahimi, M., & Assari, A. (2020). Mutual Entropy Map for Continuous Systems on Compact Metric Spaces. *Mathematical Analysis and Convex Optimization*, 1, 49–55. DOI: https://doi.org/10.29252/maco.1.1.6.

[10] Rahimi, M., & Assari, A. (2021). On local metric pressure of dynamical systems. *Periodica Mathematica Hungarica*, 82, 223–230. DOI: https://doi.org/10.1007/s10998-020-00355-w.

[11] Rahimi, M., Assari, A., & Ramezani, F. (2016). A local approach to Yager entropy of dynamical systems. *International Journal of Fuzzy Systems*, 18, 98–102. DOI: https://doi.org/10.1007/s40815-015-0062-z.

[12] Rahimi, M., & Riazi, A. (2012). Entropy operator for continuous dynamical systems of finite topological entropy. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 38, 883–892.

[13] Rahimi, M., & Riazi, A. (2012). Entropy functional for continuous systems of finite entropy. *Acta Mathematica Scientia*, 32B, 775–782. DOI: https://doi.org/10.1016/S0252-9602(12)60057-5.

[14] Rathie, P.N. (1970). On a Generalized Entropy and a Coding Theorem. *J. Appl. Probl*, 7, 124–133. DOI: https://doi.org/10.2307/3212154.

[15] Réyni, A. (1961). On Measures of Entropy and Information. *Proc. 4th Berk. Symp. Math Statist. and Probl., University of California Press*, Vol. 1, 547–561.

[16] Rokhlin, V.A., & Sinai, Ya.G. (1961). The structure and properties of invariant measurable partitions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 141, 1038–1041.

[17] Shannon, C. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell Syst. Tech. Journal*, 27, 379–423. DOI: https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x.

[18] Shulman, A. (1988). Maximal ergodic theorems on groups. *Dept. Lit. NIINTI, No. 2184*.

[19] Sinai, Ya.G. (1959). On the notion of entropy of a dynamical system. *Doklady of Russian Academy of Sciences*, 124, 768–771. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-87870-6_1.

[20] Tempelman, A. (1992). Ergodic theorems for group actions, informational and thermodynamical aspects. *Springer Dordrecht*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-017-1460-0.

[21] Von Neumann, J. (1932). Proof of the Quasi-ergodic Hypothesis. *Proc. Natl. Acad. Sci*, 18, 70–82. DOI: https://doi.org/10.1073/pnas.18.1.70.

[22] Walters, P. (1982). An introduction to ergodic theory. *Springer-Verlag*. DOI: https://doi.org/10.1007/springerreference_60354.

[23] Wiener, N. (1939). The ergodic theorem. *Duke Math. J*, 5, 1–18. DOI: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-39-00501-6.

[24] Yosida, K. (1938). Mean ergodic theorem in Banach spaces. *Proc. Imp. Acad*, 14, 292–294. DOI: https://doi.org/10.3792/pia/1195579607.

[25] Yosida, K., & Kakutani, S. (1939). Birkhoff‘s ergodic theorem and the maximal ergodic theorem. *Proc. Imp. Acad*, 15, 165–168. DOI: https://doi.org/10.3792/pia/1195579375.