Measure Algebras and Applications

The structure of invariant and ergodic states for C^*-dynamical systems

Mohammad Nekoufar[1]

1. Department of Mathematics, Andimeshk Branch, Islamic Azad University, Andimeshk, Iran.
Email: mrnekoufar@iauandimeshk.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 31 March 2024
Received in revised form:
13 June 2024
Accepted: 24 June 2024
Published Online:
20 August 2024

Keywords:
C^*-dynamical system,
The lift of a C^*-dynamical system,
Invariant state,
Ergodic state

2020 Mathematics Subject Classification:
37A35

ABSTRACT

In this paper, the invariant and ergodic states corresponding to a C^*-dynamical system are introduced and the structures of these sets are studied. To do this, we use the concept of the lift of a C^*-dynamical system.

Cite this article: Nekoufar, M. (2024). The structure of invariant and ergodic states for C^*-dynamical systems. *Measure Algebras and Applications*, 1(2), 119–129. http://doi.org/10.22091/maa.2024.10781.1020

Publisher: University of Qom

DOI: 10.22091/maa.2024.10781.1020

Extended Abstract

Introduction

C^*-dynamical systems are introduced and studied as a generalization of classical dynamical systems. In particular, ergodic theory as an approach with analysis taste to dynamical systems is studied in the framework of C^*-dynamical systems [1–4, 7, 8, 11].

The concepts like invariant measures [18], Birkhoff ergodic theorem [5] and von-Neumann ergodic theorem [16, 17] are formulated and studied for C^*-dynamical systems. Also, there are some other concepts such as the entropy, in classical dynamical systems [9, 15], which are extended to C^*-dynamical systems. They generalize the corresponding concepts in the classical case.

In the classical ergodic theory for dynamical systems, invariant and ergodic measures play very important roles. These measures are applied in the formulation of ergodic theorems [5, 16–18], the introduction of entropy [9, 15] and pressure [13, 19, 21] for dynamical systems. They are also applied in the thermodynamic formalism of dynamical systems [14].

In the theory of C^*-dynamical systems, the concepts of state and invariant state correspond to probability and invariant measures for classical dynamical systems. They are applied to define the entropy of a C^*-dynamical system [6].

In this paper, the concept of ergodic state is given and then, using the concept of a lift map, the structure of invariant states is studied and connected to ergodic states.

Conclusion

In this paper, the following definitions and results are applied. One may see [10] for more discussions.

***Definition* 0.1.** *Let A be a C^*-algebra with the unit element $1 \in A$. For $a \in A$, the spectrum of a is defined by*

$$spec(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \cdot 1 - a \ \text{ is not invertible}\}.$$

The spectral radius of a is also defined by

$$r(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in spec(a)\}.$$

***Theorem* 0.2.** *We have the following properties:*

1. *If A is a unital C^*-algebra, then for any $a \in A$, the set $spec(a)$ is non-empty and compact.*
2. *For every $a \in A$, we have $r(a) \leq ||a||$. Indeed*
$$r(a) = \lim_{n\to\infty} ||a^n||^{\frac{1}{n}}.$$
3. *If $a^* = a$, then $r(a) = ||a||$.*

***Definition* 0.3.** *Let A and B be two C^*-algebras on $\mathbb{C}$. The set of all non-zero homomorphisms $\phi : A \to B$ is denoted by $Hom(A, B)$. Recall that $\phi : A \to B$ is a homomorphism if*

1. *ϕ is linear.*

2. $\forall a, b \in A \, : \, \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.

Additionally, if $\phi(a^*) = \phi(a)^*$, then ϕ is called a $*$-homomorphism. Finally, if $B = \mathbb{C}$, then we write $\Omega(A) = Hom(A, \mathbb{C})$.

***Remark* 0.4.** *If A and B are two C^*-algebras and $\rho : A \to B$ is a $*$-homomorphism, then $||\rho|| \leq 1$, that is $||\rho(a)|| \leq ||a||$, for all $a \in A$.*

***Remark* 0.5.** *Let A be a commutative unital C^*-algebra and $\phi \in \Omega(A)$. Then,*

1. $\forall a \in A$, $\phi(a) \in spec(a)$.

2. $||\phi|| = 1$.

3. $\forall a \in A$, $\phi(a^*) = \phi(a)^*$.

Let A^* be the dual of A, equipped by weak-star topology. Then, $\Omega(A) \subset A^*$. In this case, we have the following proposition.

***Proposition* 0.6.** *If A is a commutative unital C^*-algebra, then $\Omega(A)$ is compact in weak-star topology on the unit ball of A^*.*

***Lemma* 0.7.** *Let $a \in A$. The evaluation map $\hat{a} : \Omega(A) \to \mathbb{C}$ defined by $\hat{a}(\phi) := \phi(a)$ is continuous with the range $spec(a)$.*

***Theorem* 0.8.** *Let A be a commutative unital C^*-algebra. Then, the map $\Phi : A \to C(\Omega(A))$ defined by $\Phi(a) := \hat{a}$ is an isometric $*$-isomorphism from A to $C(\Omega(A))$. In other words, $A \cong C(\Omega(A))$.*

C^*-dynamical systems and invariant and ergodic states

In this section, invariant and ergodic states for a C^*-dynamical system are introduced and the structure of these sets is studied.

***Definition* 0.9.** *Let A be a C^*-algebra on $\mathbb{C}$. By a C^*-dynamical system on A, we mean a map $\alpha : A \to A$ such that,*

1. *α is linear.*

2. *For every $a \in A$, we have $\alpha(a^*) = \alpha(a)^*$.*

3. *For every $a, b \in A$, we have $\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)$.*

***Definition* 0.10.** *Let A be a C^*-algebra on $\mathbb{C}$. A function $\omega : A \to \mathbb{C}$ is called a state, if*

1. *ω is linear.*

2. *ω is positive, i.e., for every $a \in A$ we have $\omega(aa^*) \geq 0$.*

3. *$||\omega||_{\text{op}} = 1$, where $|| \cdot ||_{\text{op}}$ is the operator norm of ω.*

The collection of all of states on a C^*-algebra A is denoted by $S(A)$.

***Definition* 0.11.** *Let $\alpha : A \to A$ be a C^*-dynamical system. A state $\omega : A \to \mathbb{C}$ is called α-invariant if $\omega \circ \alpha = \omega$. The collection of all α-invariant states is denoted by $S(A, \alpha)$.*

***Remark* 0.12.** *Let A^* be the dual of the C^*-algebra A. Then $S(A)$ and $S(A,\alpha)$ are weak* compact convex subsets of the unit ball of A^*.*

***Definition* 0.13.** *An α-invariant state ω is called α-ergodic, if for any $a \in A$, the relation $\alpha(a) = a$ implies $\hat{a} = c$, where c is a constant.*

The collection of all α-ergodic states is denoted by $S_e(A,\alpha)$. It is obvious that, $S_e(A,\alpha) \subset S(A,\alpha) \subset S(A)$.

We have the following theorem.

***Theorem* 0.14.** *Let $\omega \in S(A)$. Then, there exists a unique positive probability measure μ_ω on Borel subsets of $\Omega(A)$ such that*

$$g(\omega) = \int_{\Omega(A)} g d\mu_\omega, \qquad \forall g \in C(\Omega(A)).$$

***Corollary* 0.15.** *The map $I : S(A) \to M_1(\Omega(A))$ defined by $I(\omega) := \mu_\omega$ is affine and bijective. So, there is a one-to-one correspondence between the elements of $S(A)$ and $M_1(\Omega(A))$.*

***Definition* 0.16.** *Let $\Phi : A \to C(\Omega(A))$ be the isomorphism as in Theorem 0.8. For a C^*-dynamical system $\alpha : A \to A$, the lift map $\tilde{\alpha} : C(\Omega(A)) \to C(\Omega(A))$ is defined by $\tilde{\alpha} := \Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1}$.*

***Definition* 0.17.** *Let $\alpha : A \to A$ be a C^*-dynamical system and $\tilde{\alpha}$ be the corresponding lift map. The collection of all probability measures μ on Borel σ-algebra of $\Omega(A)$ such that*

$$\int_{\Omega(A)} \tilde{\alpha}(g) d\mu = \int_{\Omega(A)} g d\mu, \qquad \forall g \in C(\Omega(A))$$

is denoted by $M(A,\tilde{\alpha})$. Also, the collection of all measures $\mu \in M(A,\tilde{\alpha})$ such that, given any $g \in C(\Omega(A))$, the equality $\tilde{\alpha}(g) = g$ implies $g = c$, μ.a.e, where c is a constant, is denoted by $E(A,\tilde{\alpha})$.

***Lemma* 0.18.**

1. *$\omega \in S(A,\alpha)$ if and only if $\mu_\omega \in M(A,\tilde{\alpha})$.*
2. *$\omega \in S_e(A,\alpha)$ if and only if $\mu_\omega \in E(A,\tilde{\alpha})$.*

Note that, applying the proof of Theorem 6.10 in [20], one may easily see that, the set of extreme points of $M(A,\tilde{\alpha})$ is $E(A,\tilde{\alpha})$. We have the following theorem for the states.

***Theorem* 0.19.** *The set of extreme points of $S(A,\alpha)$ is $S_e(A,\alpha)$.*

***Theorem* 0.20.** *(Choquet) Suppose that Y is a compact convex metrizable subset of a locally convex space E, and that $x_0 \in Y$. Then there exists a probability measure τ on Y which represents x_0 and is supported by the extreme points of Y, i.e., $\Phi(x_0) = \int_Y \Phi d\tau$ for every continuous linear functional Φ on E, and $\tau(ext(Y)) = 1$.*

See [12] for a proof of Choquet's theorem.

The following result is a direct consequence of Choquet's theorem [12].

***Corollary* 0.21.** *For any $\omega \in S(A,\alpha)$, there exists a unique probability measure σ on Borel sets of $S(A,\alpha)$ such that $\sigma(S_e(A,\alpha)) = 1$ and*

$$\int_{\Omega(A)} f d\mu_\omega = \int_{S_e(A,\alpha)} \left(\int_\Omega f d\mu_\nu \right) d\sigma(\nu).$$

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۳، دوره ۱، شماره ۲، ص ۱۲۹-۱۱۹

ساختار حالت‌های پایا و ارگودیک برای C^*-دستگاه‌های دینامیکی

محمد نکوفر [۱]

۱. گروه ریاضی، واحد اندیمشک، دانشگاه آزاد اسلامی، اندیمشک، ایران. رایانامه: mrnekoufar@iauandimeshk.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱/۱۲
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۳/۲۴
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۴/۴
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۵/۳۰

کلمات کلیدی:
C^*-دستگاه دینامیکی،
بالابر متناظر با یک C^*-دستگاه دینامیکی،
حالت پایا،
حالت ارگودیک

رده‌بندی ریاضی:
37A35

چکیده

در این مقاله به معرفی حالت‌های پایا و ارگودیک متناظر با یک C^*-دستگاه دینامیکی پرداخته و ساختار این مجموعه‌ها را مطالعه می‌نماییم. برای این کار از مفهوم بالابر متناظر با یک C^*-دستگاه دینامیکی استفاده می‌نماییم.

استناد: نکوفر، محمد. (۱۴۰۳). ساختار حالت‌های پایا و ارگودیک برای C^*-دستگاه‌های دینامیکی. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۲)، ۱۲۹-۱۱۹.

http://doi.org/10.22091/maa.2024.10781.1020

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

C^*-دستگاه‌های دینامیکی به‌عنوان تعمیمی از دستگاه‌های دینامیکی کلاسیک معرفی شده و مورد مطالعه قرار گرفته‌اند [۱–۴، ۷، ۸، ۱۱]. به‌طور خاص، نظریهٔ ارگودیک به‌عنوان رویکردی با طعم آنالیز به دستگاه‌های دینامیکی، در چارچوب C^*-دستگاه‌های دینامیکی نیز مورد توجه قرار گرفته‌اند. مفاهیمی مانند اندازهٔ پایا [۱۸] و قضایای ارگودیگ بیرخوف [۵] و فون نیومن [۱۶، ۱۷] برای C^*- دستگاه‌های دینامیکی نیز مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. به‌علاوه، مفاهیمی مانند آنتروپی دستگاه‌های دینامیکی [۹، ۱۵] نیز برای C^*- دستگاه‌های دینامیکی تعریف شده و مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. این مفاهیم، تعمیمی از مفاهیم متناظر با آن‌ها در نظریهٔ دستگاه‌های دینامیکی هستند. در نظریهٔ کلاسیک ارگودیک برای دستگاه‌های دینامیکی، اندازه‌های پایا و ارگودیک نقش بسیار مهمی بازی می‌کنند. این اندازه‌ها در فرمول‌بندی قضایای ارگودیک [۵، ۱۶–۱۸]، معرفی مفهوم آنتروپی [۹، ۱۵] و فشار توپولوژیک [۱۳، ۱۹، ۲۱] و همچنین صورت‌بندی ترمودینامیکی دستگاه‌های دینامیکی [۱۴] نقش مهمی بازی می‌کنند. در نظریهٔ C^*-دستگاه‌های دینامیکی، مفهوم حالت و حالت‌های پایا متناظر با اندازه‌های پایا معرفی شده و به کمک آن‌ها، مفهوم آنتروپی یک C^*-دستگاه دینامیکی معرفی شده و مورد مطالعه قرار گرفته است [۶].
در این مقاله، ضمن معرفی مفهوم حالت ارگودیک، به کمک نگاشت بالابر، ساختار مجموعهٔ حالت‌های پایا و ارتباط آن‌ها با حالت‌های ارگودیک را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۲ مفاهیم مقدماتی

در این بخش به معرفی و یادآوری مفاهیم مقدماتی مورد استفاده در این مقاله می‌پردازیم. در تمام این مقاله، A یک C^*-جبر بر $\mathbb{C}$ است و $* : A \to A$ همان عمل بازگشت است. برای دیدن بحث مفصل‌تر در مورد مفاهیم مقدماتی این بخش می‌توان به مرجع [۶] مراجعه‌کرد.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم A یک C^*-جبر بر $\mathbb{C}$ با عنصر واحد $1 \in A$ باشد. برای هر $a \in A$، طیف a عبارت است از:

$$Spec(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda.1 - a \text{ وارون‌پذیر نیست}\}.$$

شعاع طیفی a نیز عبارت است از

$$r(a) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in Spec(a)\}.$$

خواص زیر برقرارند.

قضیه ۲.۲. اگر A یک C^*-جبر دارای واحد باشد، آنگاه

۱. برای هر $a \in A$، $Spec(a)$ ناتهی و فشرده است.

۲. برای هر $a \in A$ داریم $r(a) \leq ||a||$.

۳. اگر $a = a^*$، آنگاه $r(a) = ||a||$.

تعریف ۳.۲. فرض کنیم A و B، C^*-جبرهایی بر $\mathbb{C}$ باشند. مجموعهٔ کلیهٔ همومرفیسم‌های غیرصفر $\varphi : A \to B$ را با $Hom(A,B)$ نمایش می‌دهیم. یادآور می‌شویم که $\varphi : A \to B$ را یک همومرفیسم می‌نامیم هرگاه:

۱. φ خطی باشد.

۲. برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم، $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

به‌علاوه اگر $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$، آنگاه φ را یک $*$-همومرفیسم می‌نامیم. در نهایت، اگر $B = \mathbb{C}$، آنگاه می‌نویسیم

$$\Omega(A) = Hom(A, \mathbb{C}).$$

تذکر ۴.۲. اگر A و B دو C^*-جبر بوده و $\varphi : A \to B$ یک $*$-همومرفیسم باشد، آنگاه $||\varphi|| \leq 1$ یعنی

$$\forall a \in A : \qquad ||\varphi|| \leq ||a||.$$

تذکر ۵.۲. فرض کنیم A یک C^*-جبر جابه‌جایی و یکدار بوده و $\varphi \in \Omega(A)$. آنگاه

۱. $\forall a \in A:\ \varphi(a) \in Spec(a)$.

۲. $||\varphi|| = ۱$.

۳. $\forall a \in A:\ \varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$.

فرض کنیم A^* دوگان A، مجهز به توپولوژی ضعیف-ستاره باشد. در این صورت $\Omega(A) \subseteq A^*$ و در این حالت گزارهٔ زیر را داریم.

گزاره ۶.۲. اگر A یک C^*-جبر جابه‌جایی یکدار باشد، آنگاه $\Omega(A)$ نسبت به توپولوژی ضعیف-ستاره بر گوی واحد A^*، فشرده است.

لم ۷.۲. فرض کنیم $a \in A$. نگاشت مقداردهی $\widehat{a} : \Omega(A) \to \mathbb{C}$ با ضابطهٔ $\widehat{a}(\varphi) := \varphi(a)$ پیوسته است و برد آن $Spec(a)$ است.

قضیه ۸.۲. فرض کنیم A یک C^*-جبر جابه‌جایی و یکدار باشد. در این صورت تابع

$$\Phi : A \to C(\Omega(A)) \qquad , \qquad a \mapsto \widehat{a}$$

یک $*$-ایزومورفیسم طول‌پا از A بر $C(\Omega(A))$ است. به‌عبارت‌دیگر $A \cong C(\Omega(A))$.

۳ C^*-دستگاه‌های دینامیکی و حالت‌های پایا و ارگودیک

در این بخش حالت‌های پایا و ارگودیک را برای C^*-دستگاه‌های دینامیکی معرفی کرده و ساختار این مجموعه‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم A یک C^*-جبر بر $\mathbb{C}$ باشد. منظور از یک C^*-دستگاه دینامیکی بر A، تابعی مانند $\alpha : A \to A$ است به‌گونه‌ای که:

۱. α خطی است.

۲. برای هر $a \in A$، داریم $\alpha(a^*) = \alpha(a)^*$.

۳. برای هر $a, b \in A$ داریم $\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)$.

تعریف ۲.۳. فرض کنیم A یک C^*-جبر بر $\mathbb{C}$ باشد. تابع $\omega : A \to \mathbb{C}$ را یک تابع حالت نامیم هرگاه:

۱. ω خطی است.

۲. ω مثبت باشد، یعنی برای هر $a \in A$ داشته باشیم:

$$\omega(aa^*) \geq ۰$$

۳. $||\omega||_{op} = ۱$، که در آن $||.||_{op}$ همان نرم ω به‌عنوان یک تابعک خطی است.

مجموعهٔ متشکل از کلیهٔ حالت‌های C^*-جبر A را با نماد $S(A)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۳. فرض کنیم $\alpha : A \to A$ یک C^*-دستگاه دینامیکی باشد. حالت $\omega : A \to \mathbb{C}$ را یک α-پایا می‌نامیم هرگاه داشته باشیم $\omega \circ \alpha = \omega$. مجموعهٔ کلیهٔ حالت‌های α-پایا را با نماد $S(A, \alpha)$ نمایش می‌دهیم.

تذکر ۴.۳. فرض کنیم A^* دوگان C^*-جبر A باشد و B_{A^*} گوی واحد در A^* باشد. با در نظر گرفتن توپولوژی ضعیف-ستاره بر A^* و با توجه به قضیهٔ باناخ-آلاقلو، گوی واحد B_{A^*} نسبت به توپولوژی ضعیف-ستاره فشرده است. به‌علاوه روشن است که

$$S(A, \alpha), S(A) \subseteq B_{A^*}$$

به‌سادگی می‌توان دید که $S(A)$ و $S(A, \alpha)$ زیرمجموعه‌های بسته و محدبی از B_{A^*} هستند و در نتیجه فشرده نیز هستند.

تعریف ۵.۳. حالت α-پایای ω را α-ارگودیک نامیم هرگاه برای هر $a \in A$، از رابطهٔ $\alpha(a) = a$ نتیجه بگیریم که $\widehat{a} = cte$ ثابت است. مجموعهٔ متشکل از کلیهٔ حالت‌های ارگودیک α را با نماد $S_e(A, \alpha)$ نمایش می‌دهیم.

قضیهٔ زیر به هر حالت بر C^*-جبر A یک اندازه نظیر می‌کند.

قضیه ۶.۳. فرض کنیم $\omega \in S(A)$ در این صورت اندازهٔ مثبت احتمال یکتای μ_ω بر σ-جبر بورل $\Omega(A)$ موجود است به‌گونه‌ای که

$$\forall\, g \in C(\Omega(A)): \qquad g(\omega) = \int_{\Omega(A)} g\, d\mu_\omega$$

اثبات. فرض کنیم $\omega \in S(A)$ تابعک خطی $L_\omega : C(\Omega(A)) \to \mathbb{C}$ را به‌صورت $L_\omega(g) := g(\omega)$ تعریف می‌کنیم. روشن است که L_ω خطی است و به‌علاوه

$$||L_\omega||_{op} = \sup_{||g||=۱} |L_\omega(g)| = \sup_{||g||=۱} |g(\omega)| \leq ۱.$$

بنابراین L_ω عملگری کران‌دار است و درنتیجه $L_\omega \in (C(\Omega(A)))^*$. اکنون طبق قضیهٔ نمایش ریس، اندازهٔ یکتای μ_ω بر σ-جبر بورل $C(\Omega(A))$ موجود است به‌گونه‌ای که:

$$\forall\ \in C(\Omega(A)): \qquad g(\omega) = L_\omega(g) = \int_{\Omega(A)} g\, d\mu_\omega.$$

روشن است که اگر $g \geq ۰$، آنگاه $L_\omega(g) \geq ۰$ و درنتیجه μ_ω اندازه‌ای مثبت است. $\square$

نتیجه ۷.۳. نگاشت $I : S(A) \longrightarrow M_۱(\Omega(A))$ با ضابطهٔ $w \longmapsto \mu_w$ آفین و دوسویی است. بنابراین یک تناظر یک‌به‌یک آفین بین عناصر $S(A)$ و اعضای $M_۱(\Omega(A))$ برقرار است.

اثبات. برای هر $a \in A$ و هر $w, w' \in S(A)$ داریم:

$$(\lambda w + (L_\lambda) w')(a) = \lambda w(a) + (۱-\lambda) w'(a)$$

یا به‌طور معادل

$$\int_{\Omega(A)} \hat{a} d\mu_{\lambda w + (۱-\lambda) w'} = \lambda \int_{\Omega(A)} \hat{a} d\mu_w + (۱-\lambda) \int_{\Omega(A)} \hat{a} d\mu_{w'} = \int_{\Omega(A)} \hat{a} d(\lambda \mu_w + (۱-\lambda)\mu_{w'})$$

رابطهٔ فوق نتیجه می‌دهد که

$$\mu_{\lambda w + (۱-\lambda) w'} = \lambda \mu_w + (۱-\lambda)\mu_{w'}$$

که آفین بودن I را نشان می‌دهد. به‌علاوه، I یک‌به‌یک است، چرا که اگر $w, w' \in S(A)$ و $w \neq w'$ آنگاه عنصر $a \in A$ موجود است به‌گونه‌ای که $w(a) \neq w(a')$. پس $\int_{\Omega(A)} \hat{a} d\mu_w \neq \int_{\Omega(A)} \hat{a} d\mu_{w'}$ و درنتیجه $\mu_w \neq \mu_{w'}$.
پوشایی I نیز نتیجهٔ مستقیمی از پوشایی $\Phi \to C(\Omega(A))$ است. $\square$

تعریف ۸.۳. فرض کنید $\Phi : A \to C(\Omega(A))$ ایزومورفیسم مربوط به قضیه ۸.۲ باشد. برای C^*- دستگاه دینامیکی $\alpha : A \to A$ نگاشت بالابر $\widetilde{\alpha}: C(\Omega(A)) \to C(\Omega(A))$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\widetilde{\alpha} := \Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-۱}.$$

تعریف ۹.۳. فرض کنید $\alpha : A \to A$ یک C^*-دستگاه دینامیکی بوده و $\widetilde{\alpha}$ نگاشت بالابر متناظر آن باشد. مجموعهٔ متشکل از کلیهٔ اندازه‌های احتمال $\mu : \mathcal{B}_{C(\Omega(A))} \to [۰, ۱]$ با این خاصیت که

$$\forall g \in C(\Omega)): \int_{\Omega(A)} \widetilde{\alpha}\,(g) d\mu = \int_{\Omega(A)} g d\mu$$

را با نماد $M(A, \widetilde{\alpha})$ نمایش می‌دهیم. به‌علاوه، مجموعهٔ کلیهٔ اعضای $\mu \in M(A, \widetilde{\alpha})$ که در آن برای هر $g \in C(\Omega(A))$، رابطهٔ $\widetilde{\alpha}\,(g) = g$ نتیجه دهد $g = c$ ثابت برای μ- تقریباً هر g در $C(\Omega(A))$، را با نماد $E(A, \widetilde{\alpha})$ نمایش می‌دهیم.

نتیجه ۱۰.۳. چون برای هر $w \in S(A)$ داریم

$$C(\overline{\Omega(A)})^{L^1(\mu_w)} = L^1(\mu_w)$$

آنگاه رابطهٔ

$$\int_{\Omega(A)} g d\mu_w = g(w)$$

برای هر تابع اندازه‌پذیر و کران‌دار g بر $C(\Omega(A))$ نیز برقرار خواهد بود.

لم ۱۱.۳. ۱. $w \in S(A,\alpha)$ اگر و تنها اگر $\mu_w \in M(A,\widetilde{\alpha})$.
۲. $w \in S_e(A,\alpha)$ اگر و تنها اگر $\mu_w \in E(A,\widetilde{\alpha})$.

اثبات. ۱. فرض کنید $w \in S(A,\alpha)$. به‌علاوه فرض کنید $g \in C(\Omega(A))$. عنصر $a \in A$ را چنان در نظر بگیرید که $g = \hat{a} = \Phi(a)$. در این صورت

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(A)} \widetilde{\alpha}\ (g)d\mu_w &= \int_{\Omega(A)} \widetilde{\alpha}\ (\Phi(a))d\mu_w = \int_{\Omega(A)} \Phi(\alpha(a))d\mu_w = \int_{\Omega(A)} \widehat{\alpha(a)}d\mu_w \\ &= \widehat{\alpha(a)}(w) = (w \circ \alpha)(a) = w(a) = \hat{a}(w) = \int_{\Omega(A)} g d\mu_w.\end{aligned}$$

بنابراین $\mu_w \in M(A,\widetilde{\alpha})$.
برعکس فرض کنید $\mu_w \in M(A,\widetilde{\alpha})$. برای هر $a \in A$ داریم:

$$\int \widetilde{\alpha}\ (\hat{a})d\mu_w = \int \hat{a}d\mu_w$$

یا به‌طور معادل:

$$\int_{\Omega(A)} \widetilde{\alpha}\ (\Phi(a))d\mu_w = \int_{\Omega(A)} \hat{a}d\mu_w$$

و درنتیجه

$$\begin{aligned}(wo\alpha)(a) &= \widehat{\alpha(a)}(w) = \int_{\Omega(A)} \widehat{\alpha(a)}d\mu_w = \int_{\Omega(A)} \Phi(\alpha(a))d\mu_w \\ &= \int_{\Omega(A)} \widetilde{\alpha}\ (\Phi(a))d\mu_w = \int_{\Omega(A)} \hat{a}d\mu_w = w(a).\end{aligned}$$

به‌عبارت‌دیگر $w \circ \alpha = w$ پس $w \in S(A,\alpha)$.
۲. فرض کنید $w \in S_e(A,\alpha)$. به‌علاوه فرض کنید $g \in C(\Omega(A))$ به‌گونه‌ای باشد که $\widetilde{\alpha}\ (g) = g$. عضو $a \in A$ را طوری در نظر بگیرید که $g = \Phi(a) = \hat{a}$. پس $\Phi\alpha\Phi^{-1}(g) = g$ و درنتیجه $\alpha\Phi^{-1}(g) = \Phi^{-1}(g)$ و یا $\alpha(a) = a$. حال چون $w \in S_e(A,\alpha)$ پس $\hat{a} = g$ ثابت است μ_w-تقریباً همه‌جا. بنابراین $\mu_w \in E(A,\widetilde{\alpha})$. با برعکس کردن روند اثبات اخیر برعکس حکم نیز ثابت می‌شود. □

نتیجه ۱۲.۳. به کمک روش اثبات قضیه ۱۰.۶ در مرجع [۲۰] به‌سادگی می‌توان نشان داد که $ext(M(A,\widetilde{\alpha})) = E(A,\widetilde{\alpha})$.

قضیهٔ زیر نیز برای حالت‌ها برقرار است.

قضیه ۱۳.۳. داریم $ext(S(A,\alpha)) = S_e(A,\alpha)$.

اثبات. حکم با توجه به آفین بودن نگاشت $I : S(A) \to M_1(\Omega(A))$ و لم ۱۱.۳ برقرار است. □

قضیه ۱۴.۳. (قضیهٔ شوکه) فرض‌کنید Y یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ متریک‌پذیر محدب از فضای موضعاً محدب E باشد و $x_\circ \in Y$. در این صورت اندازهٔ احتمال σ بر زیرمجموعه‌های بورل Y موجود است به‌گونه‌ای که $\sigma(ext(Y)) = 1$ و برای هر تابعک خطی Φ بر E داریم $\Phi(x_\circ) = \int_Y \Phi d\sigma$.

نتیجهٔ زیر از قضیهٔ شوکه [۱۲] به دست می‌آید:

نتیجه ۱۵.۳. برای هر $w \in S(A, \alpha)$، اندازهٔ احتمال σ بر زیرمجموعهٔ بورل $S(A, \alpha)$ موجود است به‌گونه‌ای که $\sigma(S_e(A, \alpha)) = ۱$ و برای هر تابع کران‌دار $f : \Omega(A) \to \mathbb{R}$ داریم:

$$\int_{\Omega(A)} f d\mu_w = \int_{S_e(A,\alpha)} \left(\int_{\Omega(A)} S d\mu_v \right) d\sigma(\nu).$$

اثبات. کافیست قضیهٔ شوکه را برای $E = A^*$ و $Y = S(A, \alpha)$ و تابعک خطی $\Phi : E \to \mathbb{C}$ با ضابطهٔ $\Phi(w) = \int_{\Omega(A)} f d\mu_w$، که در آن f تابعی کران‌دار است، در نظر بگیریم. □

References

[1] Abadie, B., & Dykema, K. (2009). Unique ergodicity of free shifts and some other automorphisms of C^*-algebras. *J. Operator Theory*, 61, 279–294.

[2] Accardi, L., & Mukhamedov, F. (2009). A note on noncommutative unique ergodicity and weighted means. *Linear Algebra Appl*, 430, 782–790. DOI: https://doi.org/10.1016/j.laa.2008.09.029.

[3] Austin, T., Eisner, T., & Tao, T. (2011). Nonconventional ergodic averages and multiple recurrence for von Neumann dynamical systems. *Pacific J. Math*, 250, 1–60. DOI: https://doi.org/10.2140/pjm.2011.250.1.

[4] Beyers, C., Duvenhage, R., & Stroh, A. (2010). The Szemeredi property in ergodic W^*-dynamical systems. *J. Operator Theory*, 64, 35–67.

[5] Birkhoff, G.D. (1931). Proof of the ergodic theorem. *Proc. Natl. Acad. Sci*, 17, 656–660. DOI: https://doi.org/10.1073/pnas.17.2.656.

[6] Connes, A., Narnhofer, H., & Thirring, W. (1987). Dynamical entropy of C^*-Algebras and von Neumann algebras. *Commun. Math. Phys*, 112, 691–719. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01225381.

[7] Fidaleo, F. (2009). An ergodic theorem for quantum diagonal measures. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top*, 12, 307–320. DOI: https://doi.org/10.1142/S0219025709003665.

[8] Fidaleo, F. (2009). On strong ergodic properties of quantum dynamical systems. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top*, 12, 551–564. DOI: https://doi.org/10.1142/S0219025709003884.

[9] Kolmogorov, A.N. (1958). New metric invariant of transitive dynamical systems and endomorphisms of Lebesgue spaces. *Doklady of Russian Academy of Sciences*, 119, 851–864.

[10] Murphy, G.J. (1990). C^*-Algebras and Operator Theory. *Academic Press, Inc*. DOI: https://doi.org/10.1016/C2009-0-22289-6.

[11] Niculescu, C.P., Stroh, A., & Zsido, L. (2003). Noncommutative extensions of classical and multiple recurrence theorems. *J. Operator Theory*, 50, 3–52.

[12] Phelps, R. (2001). Lectures on Choquet's Theorem. *Springer-Verlag Berlin, Heidelberg (originally published by Van Nostrand, Princeton, 1966)*. DOI: https://doi.org/10.1007/b76887.

[13] Ruelle, D. (1973). Statistical mechanics on a compact set with $\mathbb{Z}^\nu$-action satisfying expansiveness and specification. *Trans. Amer. Math. Soc*, 185, 237–251. DOI: https://doi.org/10.2307/1996437.

[14] Ruelle, D. (2004). Thermodynamic formalism. *Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, second edition, The mathematical structures of equilibrium statistical mechanics*. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511617546.

[15] Sinai, Ya.G. (1959). On the notion of entropy of a dynamical system. *Doklady of Russian Academy of Sciences*, 124, 768–771. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-87870-6_1.

[16] Von Neumann, J. (1932). Proof of the Quasi-ergodic Hypothesis. *Proc. Natl. Acad. Sci*, 18, 70–82. DOI: https://doi.org/10.1073/pnas.18.1.70.

[17] Von Neumann, J. (1932). Physical Applications of the Ergodic Hypothesis. *Proc. Natl. Acad. Sci*, 18, 263–266. DOI: https://doi.org/10.1073/pnas.18.3.263.

[18] Von Neumann, J. (1999). Invariant measures. *American Mathematical Society*, ISBN 978-0-8218-0912-9.

[19] Walters, P. (1975). A variational principle for the pressure of continuous transformations. *Amer. J. Math*, 97, 937–971. DOI: https://doi.org/10.2307/2373682.

[20] Walters, P. (1982). An Introduction to Ergodic Theory. *Springer-Verlag*.

[21] Walters, P. (1986). Relative pressure, relative equilibrium states, compensation functions and many-to-one codes between subshifts. *Trans. Amer. Math. Soc*, 296, 1–31. DOI: https://doi.org/10.2307/2000558.