Measure Algebras and Applications

Scalable g-frames and piecewise scalable frames in Hilbert spaces

Mohammad Reza Farmani[1] ✉, **Amir Khosravi**[2]

1. Corresponding Author, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Kharazmi University, 599 Taleghani Ave., Tehran 15618, Iran. Email: mr.farmanis@gmail.com
2. Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Kharazmi University, 599 Taleghani Ave., Tehran 15618, Iran. Email: khosravi@khu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 03 April 2024
Received in revised form:
16 June 2024
Accepted: 22 June 2024
Published Online:
20 August 2024

Keywords:
G-frame,
Scalable frame,
Piecewise scalable frame,
Orthogonal projection

2020 Mathematics Subject Classification:
42C15

ABSTRACT

In this paper, we generalize the concept of scalability to g-frames, introduce scalable g-frames, obtain some characterizations for them, and demonstrate that scalability is stable under unitary operators and isomorphisms between two Hilbert spaces. In addition, we consider and study the piecewise scalability of frames in Hilbert spaces. In particular, we present some necessary and sufficient conditions for the piecewise scalability of frames in H, and we will extend this concept to the tensor product of Hilbert spaces.

Cite this article: Farmani, M.R., & Khosravi, A. (2024). Scalable g-frames and piecewise scalable frames in Hilbert spaces. *Measure Algebras and Applications*, 2(1), 104–118. http://doi.org/10.22091/maa.2024.10904.1021

Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/maa.2024.10904.1021

Extended Abstract

Introduction

Hilbert space frames were originally introduced by Duffin and Schaeffer to deal with some problems in non-harmonic Fourier analysis [9], [8]. Frames can be viewed as redundant bases which are generalizations of Riesz bases [2], [4], [6], [1], [12],[14]. This redundancy property sometimes is extremely important in some applications such as signal and image processing, data compression, and sampling theory.

In recent years, in [13], Kutyniok et al. introduced scalable frames and provided characterizations for them. Here, we extended this concept to g-frames and applied some of their results to g-frames. We also consider the Paley-Wiener perturbation of g-frames and obtain some results for scaling operators that preserve the g-frame property. Moreover, we achieve some results regarding preserving the g-frame property of a g-frame and its Paley Wiener perturbations.
We recover by the formula

$$f = S^{-1}S(f) = \sum_{j\in J}\langle f, f_j\rangle S^{-1}f_j = \sum_{j\in J}\langle f, S^{-\frac{1}{2}}f_j\rangle S^{-\frac{1}{2}}f_j, \qquad (f \in H).$$

It follows that $\{S^{-\frac{1}{2}}f_j\}_{j\in J}$ is a Parseval frame. This requires inverting the frame operator which might be difficult.

Since a frame is $A-$tight if and only if $Sf = Af$ for all $f \in H$, Parseval frames are the most desirable since $S = I$. So we want to alter a frame in a simple manner to make it Parseval.

Conclusion

In this paper, the following definitions and results are stated:

***Definition* 0.1.** *A g-frame $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ for H with respect to $\{H_j : j \in J\}$ is scalable, if there exist scalars $c_j \geq 0,\ j \in J$, such that $\{c_j\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ is a Parseval g-frame. If, in addition, $c_j > 0$, for all $j \in J$, then $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ is said to be positively scalable. If there exists $\delta > 0$, such that $c_j \geq \delta$, for all $j \in J$, then $\{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ is referred to as strictly scalable.*

***Remark* 0.2.** *We note that we can define scalability for every sequence $\{x_i : i \in I\}$ and also for scaling constants $\{c_i : i \in I\} \subseteq \mathbb{C}$, but in frame theory we deal with frames and try to get a reconstruction formula. Also since for every sequence $C = \{c_i : i \in I\} \subseteq \mathbb{C}$*

$$S_C(x) = S_{|C|}(x),$$

for each $x \in H$, then $\{c_ix_i : i \in I\}$ is a frame (Parseval frame) if and only if $\{|c_i|x_i : i \in I\}$ is a frame (Parseval frame). Hence we consider $c_i \geq 0$ for each $i \in I$.

***Proposition* 0.3.** *Let $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ be a g-frame with frame operator S_Λ, analysis operator T^*_Λ, $\{c_j\}_{j\in J} \subseteq \mathbb{R}^+$ and $\Gamma = \{c_j\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$. Then the following conditions are equivalent:*

(i) Γ *is a g-frame.*
(ii) $ranT_\Lambda^* \subset domD_c$ *and* $D|_{ranT_\Lambda^*}$ *is* ICR.
Moreover, in this case, the g-frame operator of the g-frame Γ *is given by*

$$S_\Gamma = \overline{T_\Lambda D_c} D_c T_\Lambda^*,$$

where $\overline{T_\Lambda D_c}$ *denotes the closure of the operator* $T_\Lambda D_c$.

***Proposition* 0.4.** *Let* $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ *be a g-frame for* H. *Then* $\Gamma = \{c_j\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ *is a g-frame if and only if* $D|_{ranT_\Lambda^*}$ *is a bounded* ICR*-operator.*

***Proposition* 0.5.** *Let* $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ *be a g-frame with frame operator* S_Λ *and analysis operator* T_Λ^*. *Consequently, the following conditions are equivalent:*

(i) Λ *is (positively, strictly) scalable.*

(ii) *There exists a non-negative (positive, strictly positive, respectively) diagonal operator* D *in* $\oplus_{j\in J} H_j$ *such that*

$$\overline{T_\Lambda D}(DT_\Lambda^*) = I_H.$$

We provide a highly useful implication of Proposition 0.3, which shows that scalability is stable under unitary transformations.

***Corollary* 0.6.** *Let* H *and* K *be Hilbert spaces,* $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ *be a g-frame and* $U \in B(K, H)$ *be an isomorphism, i.e.,* $UU^* = I_H$ *and* $U^*U = I_K$. *Then* Λ *is scalable if and only if* $\Lambda U = \{\Lambda_j U \in B(K, H_j) : j \in J\}$ *is scalable*

***Definition* 0.7.** *Let* $\{x_i : i \in I\} \subseteq H$ *be a frame for* H. *We say that* $\{x_i : i \in I\}$ *is a piecewise scalable frame if there exist orthogonal projections* $P_1, ..., P_m$ *on* H, *which are mutually orthogonal,* $\sum_{j=1}^m P_j = I$ *and scaling constants* $\{a_i^1, ..., a_i^m : i \in I\} \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0}$ *such that* $\{a_i^1 P_1(x_i) + ... + a_i^m P_m(x_i) : i \in I\}$ *is a Parseval frame. Sometimes we call it* $\mathcal{P}$*-piecewise, if* $\mathcal{P} := \{P_1, ..., P_m\}$.

Throughout the paper, for every $j \in [m]$, we take $H_j = P_j(H)$. Note that the scalable frames are piecewise scalable. It is not difficult to find piecewise scalable frames which are not scalable. For more details, see [4].

***Theorem* 0.8.** $X = \{x_i : i \in I\} \subseteq H$ *is piecewise scalable with orthogonal projections* $P_1, ..., P_m$ *and scaling constants* $\{a_i^j : i \in I, j \in [m]\}$ *if and only if* $\{P_j x_i : i \in I\}$ *is a scalable frame for* H_j *with scaling constants* $\{a_i^j : i \in I\}$, *for each* $j \in [m]$ *and for every* $x \in H$,

$$\sum_{i\in I} \sum_{k\neq j, k,j=1}^{m} a_i^j a_i^k Re[\langle x, P_j x_i\rangle \overline{\langle x, P_k x_i\rangle}] = 0.$$

***Corollary* 0.9.** *Let* $X = \{x_i : i \in I\}$ *be a piecewise scalable frame with projections* $P_1, ..., P_m$. *Then the sequence* $\{P_j x_i : i \in I, j \in [m]\}$ *is a scalable frame for* H.

***Proposition* 0.10.** *Let* $X = \{x_i : i \in I\}$ *be a frame for* H. *If there exist orthogonal projections* $P_1, ..., P_m$ *on* H *which are mutually orthogonal* $\sum_{j\in[m]} P_j = I$ *and a partition* $P = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ *of* I *such that* $\{P_j x_i : i \in \sigma_j\}$ *is a scalable frame for* H_j, *for each* $j \in [m]$, *then* X *is piecewise scalable.*

***Theorem* 0.11.** *Let $\{x_i : i \in I\} \subseteq H$ be a frame for H and P_j be an orthogonal projection on H for each $j \in [m]$ with $\sum_{j=1}^{m} P_j = I$. Then the following statements are equivalent:*
(1) *$\{x_i : i \in I\}$ is a piecewise scalable frame for H with scaling constants $\{a_i^1, a_i^2, ..., a_i^m : i \in I\}$.*
(2) *$\sum_{1\leq k\neq j\leq m} T_k^* D_k D_j T_j = 0$, where D_j is a diagonal operator on $\ell_2(I)$ with diagonal elements $\{a_i^j : i \in I\}$ for each $j \in [m]$.*

***Theorem* 0.12.** *Let H and K be two separable Hilbert spaces. Then $X = \{x_i : i \in I\}$ is a piecewise scalable frame for H if and only if $UX = \{Ux_i : i \in I\}$ is a piecewise scalable frame for K, for every unitary operator $U : H \to K$.*

***Proposition* 0.13.** *Let $X = \{x_i : i \in I\}$ be a frame for finite-dimensional Hilbert space H. If X is piecewise scalable with orthogonal projections $P_1, ..., P_m$ on H and scaling constants $\{a_i^1, a_i^2, ..., a_i^m : i \in I\}$, then*

$$dimH = \sum_{j\in[m]} dimH_j = \sum_{j\in[m]} \sum_{i\in I} (a_i^j)^2 \|P_j(x_i)\|^2.$$

***Proposition* 0.14.** *Let $\chi = \{x_i : i \in I\}$ be a piecewise scalable unit norm frame for a finite dimensional Hilbert space H with orthogonal projections $P_1, ..., P_m$ and scaling constants $\{a_i^1, a_i^2, ..., a_i^m : i \in I\}$. Then*
(i) $\sum_{i\in I} \min\{(a_i^j)^2 : j \in [m]\} \leq dim(H)$,
(ii) $dim(H) \leq \sum_{i\in I} \max\{(a_i^j)^2 : j \in [m]\}$.

***Theorem* 0.15.** *Let $\chi = \{x_i : i \in I\} \subseteq H$ be a frame for H and $\{y_j : j \in J\}$ be an A-tight frame for K. Then, χ is a piecewise scalable frame for H with orthogonal projections $P_1, ..., P_m$ and constants $\{a_i^1, ..., a_i^m : i \in I\}$ if and only if $\{x_i \otimes y_j : i \in I, j \in J\}$ is a piecewise scalable frame for $H \otimes K$ with orthogonal projections $P_1^{'} = P_1 \otimes I_K, ..., P_m^{'} = P_m \otimes I_K$ and constants $\{\frac{1}{\sqrt{A}} a_i^1, ..., \frac{1}{\sqrt{A}} a_i^m : i \in I\}$.*

***Corollary* 0.16.** *Let $\{x_i : i \in I\}$ be a λ-tight frame for H. Then $\{y_j : j \in J\}$ is a piecewise scalable frame for K with orthogonal projections $Q_1, ..., Q_m$ and constants $\{b_j^1, ..., b_j^m : j \in J\}$ if and only if $\{x_i \otimes y_j : i \in I, j \in J\}$ is a piecewise scalable frame for $H \otimes K$ with orthogonal projections $I_H \otimes Q_1, ..., I_H \otimes Q_m$ and constants $\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} b_j^1, ..., \frac{1}{\sqrt{\lambda}} b_j^m : j \in J\}$.*

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۳، دوره ۲، شماره ۱، ص ۱۱۸-۱۰۴

G-قاب‌های مقیاس‌پذیر و قاب‌های تکه‌ای مقیاس‌پذیر روی فضاهای هیلبرت

محمدرضا فرمانی [1] ✉، **امیر خسروی** [2]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. رایانامه: mr.farmanis@gmail.com
۲. گروه ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. رایانامه: khosravi@khu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱/۱۵
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۳/۲۷
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۴/۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۵/۳۰

کلمات کلیدی:
$g-$ قاب،
قاب مقیاس‌پذیر،
قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر،
تصویر متعامد

رده‌بندی ریاضی:
42C15

چکیده

در این مقاله، مفهوم مقیاس‌پذیری قاب‌ها را به $g-$قاب‌ها تعمیم خواهیم داد و برخی از نتایج آن‌ها را در $g-$ قاب‌ها ارائه می‌کنیم. علاوه‌بر این، با یافتن شرایط خاص، این نوع $g-$قاب‌ها را دسته‌بندی خواهیم کرد. سرانجام نشان خواهیم داد که مقیاس‌پذیری تحت عملگرهای یکانی و یکریختی‌های بین دو فضای هیلبرت ناوردا است. علاوه‌بر این، قاب‌های تکه‌ای مقیاس‌پذیر را روی فضاهای هیلبرت دلخواه تعریف می‌نماییم و برخی از نتایج را در فضاهای هیلبرت دلخواه و در فضاهای هیلبرت با بعد متناهی تعمیم می‌دهیم. در ادامه یک شرط لازم و کافی برای مشخصه‌سازی قاب‌های تکه‌ای مقیاس‌پذیر ارائه می‌دهیم. نهایتاً، شرایطی که موجب می‌شود این مفهوم در فضای حاصلضرب تانسوری فضاهای هیلبرت دلخواه برقرار شود، را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

استناد: فرمانی، محمدرضا، خسروی، امیر. (۱۴۰۳). G-قاب‌های مقیاس‌پذیر و قاب‌های تکه‌ای مقیاس‌پذیر روی فضاهای هیلبرت. جبرهای اندازه و کاربردها، ۲(۱)، ۱۱۸-۱۰۴.

http://doi.org/10.22091/maa.2024.10904.1021

ناشر: دانشگاه قم.

۱ تاریخچه و تعاریف

قاب‌ها در فضاهای هیلبرت برای اولین بار توسط دافین و شفر در حل برخی از مسائل آنالیز هارمونیک غیرهمساز معرفی و مورد استفاده قرار گرفتند [۹]، [۸]. قاب‌ها، در حقیقت توسیع‌یافتهٔ پایه‌های فضاهای برداری هستند، که می‌توان آن را به پایه‌های ریس تعمیم داد. مراجع [۲]، [۴]، [۶]، [۱]، [۱۲]، [۱۴] را ببینید. از خاصیت قاب‌ها در حل برخی از مسائل کاربردی مانند پردازش سیگنال و تصویر، فشرده‌سازی داده‌ها و نظریهٔ نمونه‌گیری که دارای اهمیت بسیاری است، مورد استفاده قرار می‌گیرد. در سال‌های اخیر، قاب‌های پارسوال و g—قاب‌های پارسوال در بسیاری از مسائل مخابرات نقش بسزا و سودمندی ایفا می‌کنند. لذا کوتینیوک، کاسازا و همکارانش در [۱۳] قاب‌های مقیاس‌پذیر را معرفی کردند و برخی از خواص آن‌ها را مورد بررسی قرار دادند. ما نیز در این مقاله، مفهوم مقیاس‌پذیری را به g—قاب‌ها تعمیم خواهیم داد و برخی از نتایج آن‌ها را در g— قاب‌ها ارائه می‌کنیم. علاوه‌بر این، با یافتن شرایط خاص، این نوع g—قاب‌ها را دسته‌بندی خواهیم کرد. سرانجام نشان خواهیم داد که مقیاس‌پذیری تحت عملگرهای یکانی و یکریختی‌های بین دو فضای هیلبرت ناوردا است. ابتدا تعاریف و قضایایی از مقیاس‌پذیری g—قاب‌ها را ارائه می‌دهیم. با استفاده از فرمول بازسازی قاب‌ها خواهیم داشت:

$$f = S^{-1}S(f) = \sum_{j\in J}\langle f, f_j\rangle S^{-1}f_j = \sum_{j\in J}\langle f, S^{-\frac{1}{2}}f_j\rangle S^{-\frac{1}{2}}f_j, \qquad (f\in H).$$

که در این صورت $\{S^{-\frac{1}{2}}f_j\}_{j\in J}$ یک قاب پارسوال است. یکی از راه‌هایی که بتوانیم یک قاب را به‌سادگی تجزیه‌وتحلیل کنیم این است که از فرمول بازسازی استفاده نماییم و برای این کار در برخی از مسائل نیازمند به دست آوردن وارون عملگر قاب هستیم، در مواردی به دست آوردن آن ما را دچار مشکل می‌کند. لذا با قرار دادن ضرایبی در عناصر قاب، آن را به یک قاب پارسوال (قاب A—تنگ) تبدیل می‌نماییم زیرا می‌دانیم که یک قاب A—تنگ است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $f\in H$، $Sf = Af$ و یا در حالت مطلوب‌تر آن، قاب پارسوال است زیرا $S = I$. به همین دلیل مفهوم مقیاس‌پذیری قاب‌ها به وجود آمد.

تعریف ۱.۱. یک g—قاب $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j\in J\}$ در H را نسبت به $\{H_j : j\in J\}$، g—قاب مقیاس‌پذیر گویند، اگر به‌ازای هر $j\in J$ $c_j \geq 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\{c_j\Lambda_j \in B(H, H_j) : j\in J\}$ به یک g—قاب پارسوال تبدیل شود. علاوه‌بر این، اگر به‌ازای هر $j\in J$ $c_j > 0$، آن را g—قاب مقیاس‌پذیر مثبت گویند. درصورتی‌که $\delta > 0$ ای موجود باشد که به‌ازای هر $j\in J$، $c_j \geq \delta$، $\{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j\in J\}$ را g— قاب مقیاس‌پذیر اکیداً مثبت نامند.

تذکر ۲.۱. توجه شود که تعریف مقیاس‌پذیری را می‌توان برای هر دنباله مانند $\{x_i : i\in I\}$ با ضرایبی از $\{c_i : i\in I\}\subseteq \mathbb{C}$ بیان نمود، ولی بنابر تعریف عملگر قاب، به‌ازای هر دنبالهٔ $C = \{c_i : i\in I\}\subseteq\mathbb{C}$ داریم

$$S_C(x) = S_{|C|}(x), \qquad (x\in H).$$

درنتیجه $\{c_ix_i : i\in I\}$ یک قاب (قاب پارسوال) است اگر و تنها اگر $\{|c_i|x_i : i\in I\}$ یک قاب (قاب پارسوال) باشد. بنابراین به‌ازای هر $i\in I$، فرض می‌کنیم $c_i \geq 0$.

مثال ۳.۱. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر و $\{f_j : j\in J\}$ قابی مقیاس‌پذیر در H باشد. فرض کنیم Λ_{f_j} تابعک القایی توسط f_j باشد، یعنی

$$\Lambda_{f_j}f = \langle f, f_j\rangle, \qquad (f\in H).$$

به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که $\{\Lambda_{f_j} : j\in J\}$، g— قاب مقیاس‌پذیر نسبت به $\mathbb{C}$ است.

واضح است که مقیاس‌پذیری مثبت و اکیداً مثبت برای g—قاب‌های با تعداد متناهی عضو معادل هستند. علاوه‌بر این، هر ضریب g—قاب مانند $\{c_j\Lambda_j \in B(H, H_j) : j\in J\}$ از g—قاب $\Lambda = \{\Lambda_j\in B(H,H_j) : j\in J\}$ به‌طوری‌که $|J| < \infty$ و ضرایب مثبت c_j، نیز g—قاب است. در حالت نامتناهی این امر ممکن است اتفاق نیفتد. فرض کنیم $\{e_j : j\in J\}$ پایهٔ متعامد $\oplus_{j\in J}H_j$ باشد. عملگر قطری

$$D = D_c : \oplus_{j\in J}H_j \to \oplus_{j\in J}H_j$$

متناظر با دنبالهٔ اسکالری $c = \{c_j\}_{j\in J}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D_c\{x_j\}_{j\in J} = \{c_jx_j\}_{j\in J}, \qquad \{x_j\}_{j\in J}\in domD_c,$$

که در آن
$$domD_c := \{\{x_j\}_{j\in J} \in \oplus_{j\in J}H_j : \{c_jx_j\}_{j\in J} \in \oplus_{j\in J}H_j\},$$
یک عملگر خوش‌تعریف است. عملگر D_c خودالحاق است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $j \in J$، $c_j \in \mathbb{R}$. دامنه، هسته و برد عملگر خطی T را به‌ترتیب با نمادهای $domT$، $kerT$ و $ranT$ نمایش می‌دهیم. علاوه‌بر این، عملگری خطی، یک‌به‌یک و با برد بسته T بین دو فضای H و K را به‌اختصار با نماد ICR (یا $ICR-$عملگر) نمایش می‌دهیم. به‌عبارت‌دیگر، $\delta > 0$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in domT$، $\|Tx\| \geq \delta\|x\|$. می‌دانیم که عملگر تحلیل هر $g-$قاب، یک عملگر ICR است. همچنین، اگر عملگر D_c از پایین کران‌دار باشد، آنگاه D_c یک یکریختی [1] است.

لم ۴.۱. فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$، $g-$قاب و $\{c_j\}_{j\in J} \subseteq \mathbb{R}^+$.

آ) اگر $D_c\Lambda$، $g-$قاب پارسوال باشد، آنگاه به‌ازای هر $x \in H$
$$x = \sum_{j\in J} c_j^2\Lambda_j^*\Lambda_j(x).$$

ب) اگر $\{c_j^2\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$، $g-$دوگان Λ باشد، آنگاه Λ مقیاس‌پذیر است.

اثبات. آ) فرض کنیم $x \in H$. چون $\{c_j\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$، $g-$قاب پارسوال است، در این صورت
$$x = \sum_{j\in J}(c_j\Lambda_j)^*(c_j\Lambda_j)(x) = \sum_{j\in J} c_j^2\Lambda_j^*\Lambda_j(x).$$

ب) اگر $x \in H$، آنگاه
$$x = \sum_{j\in J}(c_j^2\Lambda_j)^*\Lambda_j(x) = \sum_{j\in J}(c_j\Lambda_j)^*(c_j\Lambda_j)(x).$$
بنابراین $g-$قاب $\{c_j\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ یک قاب پارسوال و لذا Λ مقیاس‌پذیر است.

□

تذکر ۵.۱. توجه داشته باشید، Λ، $g-$قاب مقیاس‌پذیر با دنبالهٔ اسکالری $c = \{c_j\}_{j\in J}$ است اگر و تنها اگر $\{c_j^2\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$، $g-$ دوگان Λ باشد وقتی‌که $c = \{c_j\}_{j\in J}$ کران‌دار باشد.

در گزارهٔ بعدی رابطهٔ بین عملگر قاب، عملگر تحلیل و قطری با مقیاس‌پذیری $g-$قاب را بیان می‌کنیم.

گزاره ۶.۱. فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$، $g-$قاب با عملگر قاب S_Λ، عملگر تحلیل T_Λ^*، و $\{c_j\}_{j\in J} \subseteq \mathbb{R}^+$ و $\Gamma := \{c_j\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$. در این صورت، احکام زیر هم‌ارزند.

آ) Γ، $g-$قاب است.

ب) $ranT_\Lambda^* \subset domD_c$ و $D|_{ranT_\Lambda^*}$، عملگر ICR است.

در این حالت، عملگر $g-$قاب Γ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید
$$S_\Gamma = \overline{T_\Lambda D_c}D_cT_\Lambda^*,$$
که در آن $\overline{T_\Lambda D_c}$ نماد بستار عملگر $T_\Lambda D_c$ است.

اثبات. (ب ⇐ آ) فرض کنیم Γ، $g-$قاب باشد. آنگاه برای هر $f \in H$
$$T_\Gamma^*f = \{(c_j\Lambda_j)(f)\}_{j\in J} = D_c\{\Lambda_jf\}_{j\in J} = D_cT_\Lambda^*f.$$
درنتیجه $T_\Gamma^* = D_cT_\Lambda^*$. همچنین
$$S_\Gamma = T_\Gamma T_\Gamma^* = (D_cT_\Lambda^*)^*D_cT_\Lambda^*,$$

[1] isomorphism

چون روی $dom(D_c)$ رابطهٔ $(D_cT_\Lambda^*)^* = T_\Lambda D_c$ برقرار است. از سوی دیگر، $dom(D_c)$ در $\oplus H_j$ چگال است و $(D_cT_\Lambda^*)^*$ عملگری کران‌دار است، پس $T_\Gamma^* = D_cT_\Lambda^*$ کران‌دار است. درنتیجه $(D_cT_\Lambda^*)^*$ بستار $T_\Lambda D_c$ است. بنابراین

$$S_\Gamma = \overline{T_\Lambda D_c} D_c T_\Lambda^*.$$

(آ ⇐ ب) فرض کنیم، $ranT_\Lambda^* \subseteq domD_c$ و $D_c|_{ranT_\Lambda^*}$، ICR−عملگر باشد. چون Λ، g−قاب است، بنابراین T_Λ^*، ICR است. به‌خصوص، با برد بسته است. بنابر قضیهٔ گراف بسته $D_c|_{ranT_\Lambda^*}$ عملگر کران‌دار است و چون $D_c|_{ranT_\Lambda^*}$، ICR−عملگر است، می‌توان نتیجه گرفت که ثابت‌های $A', B' > ۰$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$A'\|g\| \le \|D_cg\| \le B'\|g\|, \qquad (g \in ranT_\Lambda^*).$$

اگر A، B کران‌های $g-$ قاب $\{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ باشند، آنگاه

$$A\|f\|^۲ \le \|T_\Lambda^* f\|^۲ \le B\|f\|^۲, \qquad (f \in H).$$

درنتیجه به‌ازای هر $f \in H$ داریم:

$$\begin{aligned} AA'^۲\|f\|^۲ &\le A'^۲\|T_\Lambda^* f\|^۲ \le \|D_cT_\Lambda^*(f)\|^۲ \\ &\le B'^۲\|T_\Lambda^* f\|^۲ \le BB'^۲\|f\|^۲, \qquad (f \in H). \end{aligned}$$

لذا

$$AA'^۲\|f\|^۲ \le \|T_\Gamma^*(f)\|^۲ \le BB'^۲\|f\|^۲, \qquad (f \in H).$$

و به دنبال آن Γ، g−قاب است. علاوه‌بر این

$$S_\Gamma = (D_cT_\Lambda^*)^*(D_cT_\Lambda^*) = \overline{T_\Lambda D_c} D_c T_\Lambda^*.$$

□

گزاره ۷.۱. فرض کنید $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$، یک g−قاب در H نسبت به $\{H_j : j \in J\}$ باشد. در این صورت $\Gamma = \{c_j\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ یک g−قاب است اگر و تنها اگر $D_c|_{ranT_\Lambda^*}$ یک عملگر ICR کران‌دار باشد.

اثبات. فرض کنیم Λ، $g-$ قاب با کران‌های $A, B > ۰$ باشد. درنتیجه برای هر $f \in H$

$$\sqrt{A}\|f\| \le \|T_\Lambda^* f\| \le \sqrt{B}\|f\|.$$

اگر Γ، g−قاب با کران‌های $A', B' > ۰$ باشد، آنگاه به‌ازای هر $f \in H$

$$\sqrt{A'}\|f\| \le \|T_\Gamma^* f\| = \|D_cT_\Lambda^*(f)\| \le \sqrt{B'}\|f\|.$$

پس برای هر $f \in H$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{A'}}{\sqrt{B}}\|T_\Lambda^*(f)\| &\le \sqrt{A'}\|f\| \le \|D_cT_\Lambda^*(f)\| \\ &\le \frac{\sqrt{B'}}{\sqrt{A}}\|T_\Lambda^*(f)\|, \end{aligned}$$

بنابراین $D|_{ranT_\Lambda^*}$ یک عملگر ICR کران‌دار است.

برعکس، اگر $D|_{ranT_\Lambda^*}$، $ICR-$ عملگر کران‌دار باشد، آنگاه ثابت‌های $A'', B'' > ۰$ وجود دارند به‌طوری‌که به‌ازای هر $f \in H$

$$A''\|T_\Lambda^*(f)\| \le \|D_cT_\Lambda^*(f)\| = \|T_\Gamma^*(f)\| \le B''\|T_\Lambda^* f\|.$$

درنتیجه

$$\begin{aligned} A''\sqrt{A'}\|f\| &\leq A''\|T_\Lambda^*(f)\| \leq \|T_\Gamma^*(f)\| \\ &\leq B''\|T_\Lambda^*(f)\| \leq B''\sqrt{B'}\|f\|, \end{aligned}$$

و نتیجه به دست می‌آید. □

ما اکنون یک شرط هم‌ارز به‌ظاهر بدیهی را برای مقیاس‌پذیری بیان می‌کنیم، که بیان و اثبات آن در حالت کلی در فضاهای هیلبرت دلخواه تفکیک‌پذیر آسان نیست.

گزاره ۸.۱. فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$، $g-$ قاب با عملگر قاب S_Λ و عملگر تحلیل T_Λ^* باشد. در این صورت، گزاره‌های زیر هم‌ارز هستند.

آ) Λ، $g-$قاب مقیاس‌پذیر (مثبت، اکیداً مثبت) است.

ب) عملگر قطری نامنفی (مثبت، اکیداً مثبت) D در $\oplus_{j\in J} H_j$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\overline{T_\Lambda D}(DT_\Lambda^*) = I_H.$$

اثبات. (ب $\Leftarrow$ آ) فرض کنیم Λ $g-$قاب مقیاس‌پذیر با دنبالهٔ اسکالرهای $\{c_j\}_{j\in J} \subset \mathbb{R}^+$ باشد. بنابراین $\Gamma = \{c_j\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$، $g-$قاب پارسوال است. درنتیجه، بنابر گزاره ۶.۱، $ranT_\Lambda^* \subset domD_c$ و $S_\Gamma = \overline{T_\Lambda D_c}(D_c T_\Lambda^*)$ عملگر $g-$قاب Γ است. چون عملگر $g-$قاب پارسوال، عملگر همانی است، پس

$$\overline{T_\Lambda D_c}(D_c T_\Lambda^*) = I_H.$$

(آ $\Leftarrow$ ب) فرض کنیم، D عملگری قطری نامنفی در $\oplus_{j\in J} H_j$ باشد، به‌طوری‌که

$$\overline{T_\Lambda D_c}(D_c T_\Lambda^*) = I_H.$$

آنگاه DT_Λ^* روی H قابل تعریف است. به‌خصوص، $ranT_\Lambda^* \subset domD$. می‌دانیم که چون Λ یک $g-$قاب است پس T_Λ^* عملگری کران‌دار و از پایین نیز کران‌دار است همچنین D عملگری کران‌دار و $D\mid_{ranT_\Lambda^*}$ از پایین کران‌دار است پس DT_Λ^* عملگری کران‌دار است و از پایین کران‌دار است.

از سوی دیگر

$$\|x\|^۲ = \langle x, x\rangle = \langle (T_\Lambda D)^*(DT_\Lambda^*)x, x\rangle = \|DT_\Lambda^* x\|^۲, \qquad (x \in H).$$

پس DT_Λ^* ایزومتری است. درنتیجه DT_Λ^* عملگری ICR است.

فرض کنیم $\{c_j\}_{j\in J}$ دنبالهٔ اسکالری نامنفی باشد، به‌طوری‌که $D = D_c$. از گزاره ۶.۱ نتیجه می‌شود که $\Gamma = \{c_j\Lambda_j\}_{j\in J}$، $g-$ قاب با عملگر قاب $S_\Gamma = I_H$ است. درنتیجه Γ $g-$قاب پارسوال است.

اثبات‌های مثبت و اکیداً مقیاس‌پذیری Λ به‌طور مشابه است. □

یک نتیجهٔ بسیار مفید از گزاره ۶.۱ ارائه می‌دهیم، که نشان می‌دهد مقیاس‌پذیری تحت تبدیلات یکانی پایا است.

نتیجه ۹.۱. فرض کنیم H و K دو فضای هیلبرت و $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$، $g-$قاب باشد و $U \in B(K, H)$ عملگری یکانی باشد، یعنی $UU^* = I_H$ و $U^*U = I_K$. آنگاه Λ $g-$قاب مقیاس‌پذیر است اگر و تنها اگر $\Lambda U = \{\Lambda_j U \in B(K, H_j) : j \in J\}$ $g-$قاب مقیاس‌پذیر باشد.

اثبات. فرض کنیم Λ یک $g-$قاب مقیاس‌پذیر در H با عملگر قطری D باشد. چون عملگر تحلیل ΛU، $T_{\Lambda U}^* = T_\Lambda^* U,$ است، لذا داریم:

$$\begin{aligned} \overline{(T_{\Lambda U} D)}(DT_{\Lambda U}^*) &= \overline{(U^* T_\Lambda D)}(DT_\Lambda^* U) \\ &= U^*\overline{(T_\Lambda D)}(DT_\Lambda^*)U \\ &= U^*U \\ &= I_K. \end{aligned}$$

درنتیجه ΛU مقیاس‌پذیر است.

برعکس، کافی است توجه کنیم که اگر U یک یکریختی باشد، آنگاه U^* یک یکریختی است و چون $\Lambda = (\Lambda U)U^*$، به‌این‌ترتیب حکم به دست می‌آید. □

۲ قاب‌های تکه‌ای مقیاس‌پذیر در فضاهای هیلبرت

کاسازا و همکارانش برای اولین بار مفهوم قاب‌های تکه‌ای مقیاس‌پذیر را روی فضاهای $\mathbb{R}^n$ در مقاله [۴] تعریف نموده‌اند و برخی از نتایج را در این فضا به دست آوردند. ما نیز در این بخش تلاش کرده‌ایم این مفهوم را روی فضاهای هیلبرت دلخواه تعریف نماییم و تعدادی از این نتایج را در فضاهای هیلبرت دلخواه، به‌خصوص در فضاهای هیلبرت با بعد متناهی تعمیم دهیم و در ادامه یک شرط لازم و کافی برای مشخصه‌سازی قاب‌های تکه‌ای مقیاس‌پذیر ارائه می‌دهیم. نهایتاً، شرایطی را که موجب می‌شود این مفهوم در فضای حاصلضرب تانسوری فضاهای هیلبرت دلخواه برقرار شود را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. اکنون تعریف قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر برای تعداد متناهی عملگر تصویر متعامد $P_1, \ldots, P_m$ که در آن $m \geq 2$ را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنید $\{x_i : i \in I\}$ یک قاب در H باشد. آن را قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر گویند، هرگاه عملگرهای تصویر متعامد $P_1, \ldots, P_m$ روی H وجود داشته باشند به‌طوری‌که $\sum_{j=1}^{m} P_j = I$ ، و زیرمجموعه‌ای از ضرایب

$$\{a_i^1, \ldots, a_i^m : i \in I\} \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0}$$

موجود باشند، به‌طوری‌که

$$\{a_i^1 P_1(x_i) + \ldots + a_i^m P_m(x_i) : i \in I\}$$

یک قاب پارسوال روی H باشد. گاهی آن را $\mathcal{P}$-مقیاس‌پذیر [۱] گویند هرگاه $\mathcal{P} := \{P_1, \ldots, P_m\}$.

در کل این بخش، به‌ازای هر $j \in [m]$، قرار می‌دهیم $H_j = P_j(H)$. مشاهده می‌شود قاب‌های مقیاس‌پذیر، تکه‌ای مقیاس‌پذیر هستند. درحالی‌که مثال‌هایی در مقاله [۴]، با جزئیات بیشتر زده شده است، که نشان می‌دهد عکس آن برقرار نیست.

نتیجهٔ اصلی این بخش را در ادامه ارائه خواهیم نمود.

قضیه ۲.۲. $X = \{x_i : i \in I\} \subseteq H$ تکه‌ای مقیاس‌پذیر با تصویر متعامد $P_1, \ldots, P_m$ و ضرایب مقیاس $\{a_i^j : i \in I, j \in [m]\}$ است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $j \in [m]$، $\{P_j x_i : i \in I\}$ قاب مقیاس‌پذیر در H_j با ضرایب مقیاس $\{a_i^j : i \in I\}$ باشد و به‌ازای هر $x \in H$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \neq j, k, j = 1}^{m} a_i^j a_i^k Re[\langle x, P_j x_i \rangle \overline{\langle x, P_k x_i \rangle}] = 0.$$

اثبات. $\Rightarrow$) فرض کنیم $\{x_i : i \in I\}$ قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر با تصاویر متعامد $P_1, \ldots, P_m$ و ضرایب مقیاس $\{a_i^j : i \in I, j \in [m]\}$ روی H باشد. در این صورت $\{a_i^1 P_1 x_i + \ldots + a_i^m P_m x_i : i \in I\}$ قاب پارسوال روی H است. چون تصویر متعامد یک قاب (قاب پارسوال)، یک قاب (قاب پارسوال) است و به‌ازای هر $j \in [m]$، خواهیم داشت:

$$P_j(a_i^1 P_1 x_i + \ldots + a_i^j P_j x_i + \ldots + a_i^m P_m x_i) = a_i^j P_j x_i,$$

بنابراین به‌ازای هر $j \in [m]$، $\{a_i^j P_j x_i : i \in I\}$ قاب پارسوال است.

[1] $\mathcal{P}$−piecewise

همچنین به‌ازای هر $x\in H$، داریم:

$$\begin{aligned}\|x\|^{۲} &= \sum_{i\in I}|\sum_{j=۱}^{m}\langle x, a_i^j P_j(x_i)\rangle|^{۲}\\ &= \sum_{i\in I}\sum_{j=۱}^{m}|\langle x, a_i^j P_j(x_i)\rangle|^{۲} + ۲\sum_{i\in I}\sum_{۱\leq j<k\leq m} a_i^j a_i^k Re\left(\langle x, P_j x_i\rangle\overline{\langle x, P_k x_i\rangle}\right)\\ &= \sum_{j=۱}^{m}\sum_{i\in I}|\langle x, a_i^j P_j(x_i)\rangle|^{۲} + ۲\sum_{i\in I}\sum_{۱\leq j<k\leq m} a_i^j a_i^k Re\left(\langle x, P_j x_i\rangle\overline{\langle x, P_k x_i\rangle}\right)\\ &= \sum_{j=۱}^{m}\|P_j x\|^{۲} + ۲\sum_{i\in I}\sum_{۱\leq j<k\leq m} a_i^j a_i^k Re\left(\langle x, P_j x_i\rangle\overline{\langle x, P_k x_i\rangle}\right).\end{aligned}$$

درنتیجه

$$\sum_{i\in I}\sum_{۱\leq j<k\leq m} a_i^j a_i^k Re\left(\langle x, P_j x_i\rangle\overline{\langle x, P_k x_i\rangle}\right) = ۰.$$

$\Leftarrow$) فرض کنیم $x\in H$. با توجه به روند اثبات فوق، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\left|\sum_{j=۱}^{m}\langle x, a_i^j P_j x_i\rangle\right|^{۲} &= \sum_{j=۱}^{m}\|P_j(x)\|^{۲} + ۲Re\left(\sum_{i\in I}\sum_{۱\leq j<k\leq m}\langle x, a_i^j P_j x_i\rangle\overline{\langle x, a_i^k P_k x_i\rangle}\right)\\ &= \|x\|^{۲},\end{aligned}$$

به‌این‌ترتیب اثبات کامل می‌شود. $\square$

نتیجه ۳.۲. فرض کنید $X=\{x_i : i\in I\}$ قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر با تصاویر متعامد $P_۱,\dots,P_m$ باشد. آنگاه دنبالهٔ $\{P_j x_i : i\in I, j\in[m]\}$ قاب مقیاس‌پذیر H است.

اثبات. بنابر مفروضات، ضرایب ثابت $\{a_i^۱,\dots,a_i^m : i\in I\}$ وجود دارند، به‌طوری‌که $\{\sum_{j=۱}^{m} a_i^j P_j x_i : i\in I\}$ یک قاب پارسوال H است و بنابر قضیه ۲.۲

$$\sum_{j=۱}^{m}\sum_{i\in I}|\langle x, a_i^j P_j x_i\rangle|^{۲} = \|x\|^{۲}.$$

درنتیجه دنبالهٔ $\{P_j x_i : j\in[m], i\in I\}$ قاب مقیاس‌پذیر H است. $\square$

اکنون فرع ۲.۳، در مرجع [۴] را به فضاهای هیلبرت دلخواه تعمیم می‌دهیم.

گزاره ۴.۲. فرض کنید $X=\{x_i : i\in I\}$ یک قاب H باشد. اگر تصاویر متعامد $P_۱,\dots,P_m$ روی H موجود باشند به‌طوری‌که $\sum_{j\in[m]} P_j = I$، و یک افراز $P=\{\sigma_۱,\sigma_۲,\dots,\sigma_m\}$ از I باشد که به‌ازای هر $j\in[m]$ $\{P_j x_i : i\in\sigma_j\}$ قاب مقیاس‌پذیر H_j باشد، آنگاه X قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر است.

اثبات. فرض کنید به‌ازای هر $j\in[m]$، $\{a_i^j : i\in\sigma_j\}\subseteq\mathbb{R}^{\geq ۰}$. $\{a_i^j P_j(x_i) : i\in\sigma_j\}$ یک قاب پارسوال H_j است. در این صورت به‌ازای هر $i\in I\setminus\sigma_j$ قرار می‌دهیم $a_i^j=۰$ و به‌ازای هر $j\in[m]$، دنبالهٔ $\{a_i^j P_j x_i : i\in I\}$ یک قاب پارسوال H_j است.
اکنون به‌ازای هر $j,k\in[m]$، $j\neq k$، $i\in I$ خواهیم داشت

$$a_i^j a_i^k = ۰.$$

بنابر قضیه ۲.۲، نتیجه به دست خواهد آمد. $\square$

اکنون به‌ازای هر $j\in[m]$ فرض کنید T_j عملگر تحلیل $\{P_j x_i : i\in I\}$ باشد. در این صورت T_j روی H قابل توسیع است هرگاه به‌ازای هر $k\neq j$، روی H_k داشته باشیم $T_j=۰$.

قضیه ۵.۲. فرض کنید $\{x_i : i \in I\} \subseteq H$ یک قاب H و به‌ازای هر $j \in [m]$، P_j تصویر متعامد روی H باشد. آنگاه احکام زیر معادل هستند:

(۱) $\{x_i : i \in I\}$ قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر H با ضرایب مقیاس $\{a_i^1, a_i^2, ..., a_i^m : i \in I\}$ است.

(۲) $\sum_{1 \leq k \neq j \leq m} T_k^* D_k D_j T_j = 0$، که در آن به‌ازای هر $j \in [m]$، D_j عملگر قطری روی $\ell_2(I)$ با عناصر قطری $\{a_i^j : i \in I\}$ است.

اثبات. می‌دانیم که عملگر تحلیل $\{a_i^j P_j(x_i) : i \in I, j \in [m]\}$ به‌صورت $T = \sum_{j=1}^m D_j T_j$ است. درنتیجه $T^* = \sum_{j=1}^m T_j^* D_j$ و

$$\begin{aligned} T^*T &= \left(\sum_{k=1}^m T_k^* D_k\right)\left(\sum_{j=1}^m D_j T_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^m T_j^* D_j^2 T_j + \sum_{1 \leq k \neq j \leq m} T_k^* D_k D_j T_j. \end{aligned}$$

(۲) $\Rightarrow$ (۱) چون $\{a_i^j P_j(x_i) : i \in I, j \in [m]\}$ یک قاب پارسوال روی H است، آنگاه

$$\begin{aligned} S &= I_H = \sum_{j=1}^m T_j^* D_j^2 T_j + \sum_{1 \leq k \neq j \leq m} T_k^* D_k D_j T_j \\ &= \sum_{j=1}^m I_{P_j(H)} + \sum_{1 \leq k \neq j \leq m} T_k^* D_k D_j T_j. \end{aligned}$$

درنتیجه $\sum_{1 \leq k \neq j \leq m} T_k^* D_k D_j T_j = 0$.

(۱) $\Rightarrow$ (۲) به‌وضوح اگر $S = I_H$، نتیجه به دست می‌آید. □

در قضیهٔ بعدی نشان خواهیم داد که خاصیت تکه‌ای مقیاس‌پذیر قاب‌ها تحت عملگرهای یکانی روی فضاهای هیلبرت حفظ می‌شود.

قضیه ۶.۲. فرض کنید H و K دو فضای هیلبرت جدایی‌پذیر باشند. آنگاه $X = \{x_i : i \in I\}$ یک قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر H است اگر و تنها اگر به‌ازای هر عملگر یکانی $U : H \to K$، $UX = \{Ux_i : i \in I\}$ یک قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر K باشد.

اثبات. فرض کنید $X = \{x_i : i \in I\} \subseteq H$ یک قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر H با تصاویر متعامد $P_1, P_2, ..., P_m$ با ضرایب ثابت $\{a_i^1, a_i^2, ..., a_i^m : i \in I\}$ و عملگر یکانی دلخواه $U : H \to K$ باشد. اگر به‌ازای هر $j \in [m]$، $Q_j = UP_jU^*$، در این صورت $Q_j^* = Q_j^2 = Q_j$. درنتیجه هر Q_j یک تصویر متعامد روی K است. به‌ازای هر $y \in K$ داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{i\in I}\sum_{j\in[m]} |\langle y, a_i^j Q_j(Ux_i)\rangle|^2 &= \sum_{i\in I}\sum_{j\in[m]} |\langle U^*y, a_i^j P_j(x_i)\rangle|^2 \\ &= \|U^*(y)\|^2 = \|y\|^2, \end{aligned}$$

درنتیجه UX قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر است.

برعکس، می‌دانیم که اگر U یکریختی باشد، آنگاه U^* نیز یکریختی است لذا کافی است قرار دهیم $X = U^*(UX)$. □

دنبالهٔ $X = \{x_i : i \in I\}$ را یک قاب با نرم برابر گویند، هرگاه به‌ازای هر $j, k \in I$، $\|x_j\| = \|x_k\|$. X را یک قاب با نرم واحد نامند، هرگاه به‌ازای هر $j \in I$، $\|x_j\| = 1$.

گزاره ۷.۲. فرض کنید $X = \{x_i : i \in I\}$ یک قاب فضای هیلبرت H با بعد متناهی باشد. اگر X قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر با تصاویر متعامد $P_1, ..., P_m$ و ضرایب ثابت $\{a_i^1, a_i^2, ..., a_i^m : i \in I\}$ باشد، آنگاه

$$dimH = \sum_{j\in[m]} dimH_j = \sum_{j\in[m]}\sum_{i\in I} (a_i^j)^2 \|P_j(x_i)\|^2.$$

اثبات. می‌دانیم که اگر H یک فضای هیلبرت با بعد متناهی و $\{f_i : i \in I\}$ قاب پارسوال H باشد، آنگاه

$$\sum_{i\in I} \|f_i\|^2 = dim(H).$$

همچنین اگر $\{g_i : i \in I\}$ قاب پارسوال و $P : H \to H$ تصویر متعامد روی H باشد، آنگاه $\{P(g_i) : i \in I\}$ قاب پارسوال $K = P(H)$ است. زیرا به‌ازای هر $j \in [m]$ داریم:

$$\left\{P_j(\sum_{j\in[m]} a_i^k P_k(x_i)) : i \in I\right\} = \{a_i^j P_j(x_i) : i \in I\}$$

قاب پارسوال $H_j = P_j(H)$ است. بنابراین

$$\sum_{i\in I} \|a_i^j P_j(x_i)\|^2 = dim(H_j).$$

درنتیجه

$$\sum_{j\in[m]}\sum_{i\in I} \|a_i^j P_j(x_i)\|^2 = \sum_{j\in[m]} dimH_j = dim(H).$$

□

قضیه ۸.۲. فرض کنید $X = \{x_i : i \in I\}$ یک قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر با نرم واحد فضای هیلبرت با بعد متناهی H باشد به‌طوری‌که با تصاویر متعامد $P_1, ..., P_m$ و ضرایب ثابت $\{a_i^1, a_i^2, ..., a_i^m : i \in I\}$ باشد. آنگاه

الف) $\sum_{i\in I} \min\{(a_i^j)^2 : j \in [m]\} \le dim(H)$

ب) $dim(H) \le \sum_{i\in I} \max\{(a_i^j)^2 : j \in [m]\}$.

اثبات. به‌ازای هر $i \in I$ قرار می‌دهیم

$$c_i = \min\{(a_i^j)^2 : j \in [m]\}$$

و

$$\ell_i = \max\{(a_i^j)^2 : j \in [m]\}.$$

الف) چون به‌ازای هر $j \in [m]$ $\{a_i^j P_j(x_i) : i \in I\}$ قاب پارسوال H_j است، لذا

$$\sum_{k\in I}(a_i^j)^2 \|P_j(x_i)\|^2 = dimH_j.$$

چون به‌ازای هر $i \in I$، $j \in [m]$

$$1 = \|x_i\|^2 = \sum_{j\in[m]} \|P_j(x_i)\|^2, \quad dimH = \sum_{j\in[m]} dimH_j,$$

آنگاه

$$\sum_{i\in I} c_i \le \sum_{i\in I}\sum_{j\in[m]} (a_i^j)^2 \|P_j(x_i)\|^2 \le \sum_{i\in I} l_i$$

و اثبات کامل می‌شود. □

ا.خسروی و ب.خسروی در مقاله [۱۱]، نشان دادند که حاصلضرب تانسوری دو قاب دلخواه در فضای هیلبرت، یک قاب است. در ادامه یک شرط لازم و کافی تکه‌ای مقیاس‌پذیر در حاصلضرب تانسوری قاب‌ها را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۹.۲. فرض کنید H $X = \{x_i : i \in I\} \subseteq H$ قاب H و $\{y_j : j \in J\}$ یک قاب A−تنگ K باشد. آنگاه X یک قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر H با تصاویر متعامد $P_1, ..., P_m$ و ضرایب مقیاس $\{a_i^1, a_i^2, ..., a_i^m : i \in I\}$ است اگر و تنها اگر $\{x_i \otimes y_j : i \in I, j \in J\}$ یک قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر $H \otimes K$ با تصاویر متعامد $P_1' = P_1 \otimes I_K, ..., P_m' = P_m \otimes I_K$ با ضرایب مقیاس $\left\{\frac{1}{\sqrt{A}} a_i^1, ..., \frac{1}{\sqrt{A}} a_i^m : i \in I\right\}$ باشد.

اثبات. $(\Rightarrow)$ چون $\{y_j : j \in J\}$ یک قاب A−تنگ است. پس $\{\frac{1}{\sqrt{A}}y_j : j \in J\}$ و همچنین $\{\sum_{j=1}^{m} a_i^j P_j(x_i) : i \in I\}$ قاب‌های پارسوال H هستند. در این صورت نتایج به‌دست‌آمده در [۱۱] ایجاب می‌کند که

$$\left\{\sum_{l=1}^{m} a_i^l P_l(x_i) \otimes \frac{1}{\sqrt{A}} y_j : i \in I, j \in J\right\}$$

یک قاب پارسوال در $H \otimes K$ باشد. بنابراین

$$\left\{\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{A}} a_i^l P_l'(x_i \otimes y_j) : i \in I, j \in J\right\}$$

قاب پارسوال در $H \otimes K$ است. درنتیجه $\{x_i \otimes y_j : i \in I, j \in J\}$ یک قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر $H \otimes K$ است.

$(\Leftarrow)$ فرض کنید $x \in H$ و $y \neq 0$ در K باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} \|x\|^2 \|y\|^2 &= \|x \otimes y\|^2 = \sum_{l=1}^{m} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \frac{1}{A} (a_i^l)^2 |\langle x, P_l(x_i)\rangle|^2 |\langle y, y_j\rangle|^2 \\ &= \|y\|^2 \sum_{l=1}^{m} \sum_{i \in I} (a_i^l)^2 |\langle x, P_l(x_i)\rangle|^2. \end{aligned}$$

درنتیجه

$$\|x\|^2 = \sum_{l=1}^{m} \sum_{i \in I} (a_i^l)^2 |\langle x, P_l(x_i)\rangle|^2.$$

□

اثبات نتیجهٔ زیر شبیه اثبات فوق است.

نتیجه ۱۰.۲. فرض کنید $\{x_i : i \in I\}$ یک قاب λ-تنگ H باشد. در این صورت $\{y_j : j \in J\}$ قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر K با تصاویر متعامد $Q_1, ..., Q_m$ و با ضرایب مقیاس $\{b_j^1, ..., b_j^m : j \in J\}$ است اگر و تنها اگر $\{x_i \otimes y_j : i \in I, j \in J\}$ یک قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر $H \otimes K$ با تصاویر متعامد $I_H \otimes Q_1, ..., I_H \otimes Q_m$ و ضرایب مقیاس $\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}b_j^1, ..., \frac{1}{\sqrt{\lambda}}b_j^m : j \in J\right\}$ باشد.

References

[1] Asgari, M.S., & Khosravi, A. (2005). Frames and bases of subspaces in Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl*, 308, 541–553. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.11.036.

[2] Cahill, J., & Chen, X. (2013). A note on scalable frames. *Proceedings of the 10th International Conference on Sampling Theory and Applications*, 93–96.

[3] Casazza, P., Carli, L., & Tran, T. (2024). Piecewise scalable frames. *Linear Algebra and its Applications*, 694, 262–282. DOI: https://doi.org/10.1016/j.laa.2024.04.008.

[4] Casazza, P., & Chen, X. (2017). Frame scalings: A condition number approach. *Linear Algebra and its Applications*, 523, 152–168. DOI: https://doi.org/10.1016/j.laa.2017.02.020.

[5] Casazza, P., & Kutyniok, G. (2004). Frames of subspaces. *Contemp. Math. Amer. Math. Soc*, 345, 87–113.

[6] Casazza, P.G., & Kutyniok, G. (2013). Finite Frames: Theory and Applications. *Birkhauser, New York*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8373-3.

[7] Christensen, O. (2008). Frames and Bases. *Birkhauser, Boston*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4678-3.

[8] Daubechies, I., Grossmann, A., & Meyer, Y. (1986). Painless nonorthogonal expansions. *J. Math. Phys*, 27, 1271–1286. DOI: https://doi.org/10.1063/1.527388.

[9] Duffin, R.J., & Schaeffer, A.C. (1952). A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Am. Math. Soc*, 72, 341–366. DOI: https://doi.org/10.2307/1990760.

[10] Khosravi, A., & Farmani, M.R. (2024). Piecewise scalable frames in Hilbert spaces. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 22(3), 2350052. DOI: https://doi.org/10.1142/S0219691323500522.

[11] Khosravi, A., & Khosravi, B. (2007). Frames and bases in tensor product of Hilbert spaces and Hilbert C^*-modules. *Proc. Math. Sci*, 117, 1–12. DOI: https://doi.org/10.1007/s12044-007-0001-5.

[12] Khosravi, A., & Mirzaee Azandaryani, M. (2014). Approximate duality of g-frames in Hilbert spaces. *Acta Math. Sci*, 34, 639–652. DOI: https://doi.org/10.1016/S0252-9602(14)60036-9.

[13] Kutyniok, G., Okoudjou, K.A., & Philipp, F. (2013). Scalable frames. *Linear Algebra and its Applications*, 438, 2225–2238. DOI: https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.10.046.

[14] Sun, W. (2006). G-frames and g-Riesz bases. *J. Math. Anal. Appl*, 322, 437–452. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.09.039.