



Scalable g-frames and piecewise scalable frames in Hilbert spaces

Mohammad Reza Farmani¹ , Amir Khosravi² 

1. Corresponding Author, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Kharazmi University, 599 Taleghani Ave., Tehran 15618, Iran. Email: mr.farmanis@gmail.com
2. Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Kharazmi University, 599 Taleghani Ave., Tehran 15618, Iran. Email: khosravi@khu.ac.ir

Article Info

ABSTRACT

Article type:

Research Article

Article history:

Received: 03 April 2024

Received in revised form:

16 June 2024

Accepted: 22 June 2024

Published Online:

20 August 2024

Keywords:

G-frame,

Scalable frame,

Piecewise scalable frame,

Orthogonal projection

In this paper, we generalize the concept of scalability to g-frames, introduce scalable g-frames, obtain some characterizations for them, and demonstrate that scalability is stable under unitary operators and isomorphisms between two Hilbert spaces. In addition, we consider and study the piecewise scalability of frames in Hilbert spaces. In particular, we present some necessary and sufficient conditions for the piecewise scalability of frames in H , and we will extend this concept to the tensor product of Hilbert spaces.

2020 Mathematics Subject

Classification:

42C15

Cite this article: Farmani, M.R., & Khosravi, A. (2024). Scalable g-frames and piecewise scalable frames in Hilbert spaces. *Measure Algebras and Applications*, 1(2), 104–118. <http://doi.org/10.22091/maa.2024.10904.1021>



©The Author(s).

Publisher: University of Qom

DOI: 10.22091/maa.2024.10904.1021

Extended Abstract

Introduction

Hilbert space frames were originally introduced by Duffin and Schaeffer to deal with some problems in non-harmonic Fourier analysis [9], [8]. Frames can be viewed as redundant bases which are generalizations of Riesz bases [2], [4], [6], [1], [12],[14]. This redundancy property sometimes is extremely important in some applications such as signal and image processing, data compression, and sampling theory.

In recent years, in [13], Kutyniok et al. introduced scalable frames and provided characterizations for them. Here, we extended this concept to g-frames and applied some of their results to g-frames. We also consider the Paley-Wiener perturbation of g-frames and obtain some results for scaling operators that preserve the g-frame property. Moreover, we achieve some results regarding preserving the g-frame property of a g-frame and its Paley Wiener perturbations.

We recover by the formula

$$f = S^{-1}S(f) = \sum_{j \in J} \langle f, f_j \rangle S^{-1} f_j = \sum_{j \in J} \langle f, S^{-\frac{1}{2}} f_j \rangle S^{-\frac{1}{2}} f_j, \quad (f \in H).$$

It follows that $\{S^{-\frac{1}{2}} f_j\}_{j \in J}$ is a Parseval frame. This requires inverting the frame operator which might be difficult.

Since a frame is A -tight if and only if $Sf = Af$ for all $f \in H$, Parseval frames are the most desirable since $S = I$. So we want to alter a frame in a simple manner to make it Parseval.

Conclusion

In this paper, the following definitions and results are stated:

Definition 0.1. A g-frame $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ for H with respect to $\{H_j : j \in J\}$ is scalable, if there exist scalars $c_j \geq 0$, $j \in J$, such that $\{c_j \Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ is a Parseval g-frame. If, in addition, $c_j > 0$, for all $j \in J$, then $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ is said to be positively scalable. If there exists $\delta > 0$, such that $c_j \geq \delta$, for all $j \in J$, then $\{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ is referred to as strictly scalable.

Remark 0.2. We note that we can define scalability for every sequence $\{x_i : i \in I\}$ and also for scaling constants $\{c_i : i \in I\} \subseteq \mathbb{C}$, but in frame theory we deal with frames and try to get a reconstruction formula. Also since for every sequence $C = \{c_i : i \in I\} \subseteq \mathbb{C}$

$$S_C(x) = S_{|C|}(x),$$

for each $x \in H$, then $\{c_i x_i : i \in I\}$ is a frame (Parseval frame) if and only if $\{|c_i| x_i : i \in I\}$ is a frame (Parseval frame). Hence we consider $c_i \geq 0$ for each $i \in I$.

Proposition 0.3. Let $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ be a g-frame with frame operator S_Λ , analysis operator T_Λ^* , $\{c_j\}_{j \in J} \subseteq \mathbb{R}^+$ and $\Gamma = \{c_j \Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$. Then the following conditions are equivalent:

(i) Γ is a g -frame.

(ii) $\text{ran}T_\Lambda^* \subset \text{dom}D_c$ and $D|_{\text{ran}T_\Lambda^*}$ is ICR.

Moreover, in this case, the g -frame operator of the g -frame Γ is given by

$$S_\Gamma = \overline{T_\Lambda D_c} D_c T_\Lambda^*,$$

where $\overline{T_\Lambda D_c}$ denotes the closure of the operator $T_\Lambda D_c$.

Proposition 0.4. Let $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ be a g -frame for H . Then $\Gamma = \{c_j \Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ is a g -frame if and only if $D|_{\text{ran}T_\Lambda^*}$ is a bounded ICR-operator.

Proposition 0.5. Let $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ be a g -frame with frame operator S_Λ and analysis operator T_Λ^* . Consequently, the following conditions are equivalent:

(i) Λ is (positively, strictly) scalable.

(ii) There exists a non-negative (positive, strictly positive, respectively) diagonal operator D in $\bigoplus_{j \in J} H_j$ such that

$$\overline{T_\Lambda D}(DT_\Lambda^*) = I_H.$$

We provide a highly useful implication of Proposition 0.3, which shows that scalability is stable under unitary transformations.

Corollary 0.6. Let H and K be Hilbert spaces, $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ be a g -frame and $U \in B(K, H)$ be an isomorphism, i.e., $UU^* = I_H$ and $U^*U = I_K$. Then Λ is scalable if and only if $\Lambda U = \{\Lambda_j U \in B(K, H_j) : j \in J\}$ is scalable

Definition 0.7. Let $\{x_i : i \in I\} \subseteq H$ be a frame for H . We say that $\{x_i : i \in I\}$ is a piecewise scalable frame if there exist orthogonal projections P_1, \dots, P_m on H , which are mutually orthogonal, $\sum_{j=1}^m P_j = I$ and scaling constants $\{a_i^1, \dots, a_i^m : i \in I\} \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0}$ such that $\{a_i^1 P_1(x_i) + \dots + a_i^m P_m(x_i) : i \in I\}$ is a Parseval frame. Sometimes we call it \mathcal{P} -piecewise, if $\mathcal{P} := \{P_1, \dots, P_m\}$.

Throughout the paper, for every $j \in [m]$, we take $H_j = P_j(H)$. Note that the scalable frames are piecewise scalable. It is not difficult to find piecewise scalable frames which are not scalable. For more details, see [4].

Theorem 0.8. $X = \{x_i : i \in I\} \subseteq H$ is piecewise scalable with orthogonal projections P_1, \dots, P_m and scaling constants $\{a_i^j : i \in I, j \in [m]\}$ if and only if $\{P_j x_i : i \in I\}$ is a scalable frame for H_j with scaling constants $\{a_i^j : i \in I\}$, for each $j \in [m]$ and for every $x \in H$,

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \neq j, k, j=1}^m a_i^j a_i^k \text{Re}[\langle x, P_j x_i \rangle \overline{\langle x, P_k x_i \rangle}] = 0.$$

Corollary 0.9. Let $X = \{x_i : i \in I\}$ be a piecewise scalable frame with projections P_1, \dots, P_m . Then the sequence $\{P_j x_i : i \in I, j \in [m]\}$ is a scalable frame for H .

Proposition 0.10. Let $X = \{x_i : i \in I\}$ be a frame for H . If there exist orthogonal projections P_1, \dots, P_m on H which are mutually orthogonal $\sum_{j \in [m]} P_j = I$ and a partition $P = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$ of I such that $\{P_j x_i : i \in \sigma_j\}$ is a scalable frame for H_j , for each $j \in [m]$, then X is piecewise scalable.

Theorem 0.11. Let $\{x_i : i \in I\} \subseteq H$ be a frame for H and P_j be an orthogonal projection on H for each $j \in [m]$ with $\sum_{j=1}^m P_j = I$. Then the following statements are equivalent:

- (1) $\{x_i : i \in I\}$ is a piecewise scalable frame for H with scaling constants $\{a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^m : i \in I\}$.
- (2) $\sum_{1 \leq k \neq j \leq m} T_k^* D_k D_j T_j = 0$, where D_j is a diagonal operator on $\ell_2(I)$ with diagonal elements $\{a_i^j : i \in I\}$ for each $j \in [m]$.

Theorem 0.12. Let H and K be two separable Hilbert spaces. Then $X = \{x_i : i \in I\}$ is a piecewise scalable frame for H if and only if $UX = \{Ux_i : i \in I\}$ is a piecewise scalable frame for K , for every unitary operator $U : H \rightarrow K$.

Proposition 0.13. Let $X = \{x_i : i \in I\}$ be a frame for finite-dimensional Hilbert space H . If X is piecewise scalable with orthogonal projections P_1, \dots, P_m on H and scaling constants $\{a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^m : i \in I\}$, then

$$\dim H = \sum_{j \in [m]} \dim H_j = \sum_{j \in [m]} \sum_{i \in I} (a_i^j)^2 \|P_j(x_i)\|^2.$$

Proposition 0.14. Let $\chi = \{x_i : i \in I\}$ be a piecewise scalable unit norm frame for a finite dimensional Hilbert space H with orthogonal projections P_1, \dots, P_m and scaling constants $\{a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^m : i \in I\}$. Then

- (i) $\sum_{i \in I} \min\{(a_i^j)^2 : j \in [m]\} \leq \dim(H)$,
- (ii) $\dim(H) \leq \sum_{i \in I} \max\{(a_i^j)^2 : j \in [m]\}$.

Theorem 0.15. Let $\chi = \{x_i : i \in I\} \subseteq H$ be a frame for H and $\{y_j : j \in J\}$ be an A -tight frame for K . Then, χ is a piecewise scalable frame for H with orthogonal projections P_1, \dots, P_m and constants $\{a_i^1, \dots, a_i^m : i \in I\}$ if and only if $\{x_i \otimes y_j : i \in I, j \in J\}$ is a piecewise scalable frame for $H \otimes K$ with orthogonal projections $P'_1 = P_1 \otimes I_K, \dots, P'_m = P_m \otimes I_K$ and constants $\{\frac{1}{\sqrt{A}}a_i^1, \dots, \frac{1}{\sqrt{A}}a_i^m : i \in I\}$.

Corollary 0.16. Let $\{x_i : i \in I\}$ be a λ -tight frame for H . Then $\{y_j : j \in J\}$ is a piecewise scalable frame for K with orthogonal projections Q_1, \dots, Q_m and constants $\{b_j^1, \dots, b_j^m : j \in J\}$ if and only if $\{x_i \otimes y_j : i \in I, j \in J\}$ is a piecewise scalable frame for $H \otimes K$ with orthogonal projections $I_H \otimes Q_1, \dots, I_H \otimes Q_m$ and constants $\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}b_j^1, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}b_j^m : j \in J\}$.



G -قابهای مقیاس پذیر و قابهای تکه‌ای مقیاس پذیر روی فضاهای هیلبرت

محمدرضا فرمانی^۱، امیر خسروی^۲

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. رایانامه: mr.farmanis@gmail.com

۲. گروه ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. رایانامه: khosravi@khu.ac.ir

چکیده	اطلاعات مقاله
<p>در این مقاله، مفهوم مقیاس‌پذیری قاب‌ها را به g-قاب‌ها تعمیم خواهیم داد و برخی از نتایج آن‌ها را در g-قاب‌ها ارائه می‌کنیم. علاوه بر این، با یافتن شرایط خاص، این نوع g-قاب‌ها را دسته‌بندی خواهیم کرد. سرانجام نشان خواهیم داد که مقیاس‌پذیری تحت عملگرهای یکانی و یکرختی‌های بین دو فضای هیلبرت ناوردا است. علاوه بر این، قاب‌های تکه‌ای مقیاس‌پذیر را روی فضاهای هیلبرت دلخواه تعریف می‌نماییم و برخی از نتایج را در فضاهای هیلبرت دلخواه و در فضاهای هیلبرت با بعد متناهی تعمیم می‌دهیم. در ادامه یک شرط لازم و کافی برای مشخصه‌سازی قاب‌های تکه‌ای مقیاس‌پذیر ارائه می‌دهیم. نهایتاً، شرایطی که موجب می‌شود این مفهوم در فضای حاصلضرب تانسوری فضاهای هیلبرت دلخواه برقرار شود، را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.</p>	<p>نوع مقاله: مقاله پژوهشی</p> <p>تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱/۱۵ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۳/۲۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۴/۲ تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۵/۳۰</p> <p>کلمات کلیدی: g-قاب، قاب مقیاس‌پذیر، قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر، تصویر متعامد</p> <p>رده‌بندی ریاضی: 42C15</p>

استناد: فرمانی، محمدرضا، خسروی، امیر. (۱۴۰۳). G -قابهای مقیاس‌پذیر و قابهای تکه‌ای مقیاس‌پذیر روی فضاهای هیلبرت. جبرهای اندازه و کاربردها، ۲(۱)، ۱۱۸-۱۰۴.

<http://doi.org/10.22091/maa.2024.10904.1021>



ناشر: دانشگاه قم.

© نویسندگان.

۱ تاریخچه و تعاریف

قاب‌ها در فضاهای هیلبرت برای اولین بار توسط دافین و شفر در حل برخی از مسائل آنالیز هارمونیک غیرهمساز معرفی و مورد استفاده قرار گرفتند [۹]، [۸]. قاب‌ها، در حقیقت توسیع‌یافته پای‌های فضاهای برداری هستند، که می‌توان آن را به پای‌های ریس تعمیم داد. مراجع [۲]، [۴]، [۶]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۴] را ببینید. از خاصیت قاب‌ها در حل برخی از مسائل کاربردی مانند پردازش سیگنال و تصویر، فشرده‌سازی داده‌ها و نظریه نمونه‌گیری که دارای اهمیت بسیاری است، مورد استفاده قرار می‌گیرد. در سال‌های اخیر، قاب‌های پرسوال و g -قاب‌های پرسوال در بسیاری از مسائل مخابرات نقش بسزا و سودمندی ایفا می‌کنند. لذا کوتینیوک، کاسازا و همکارانش در [۱۳] قاب‌های مقیاس‌پذیر را معرفی کردند و برخی از خواص آن‌ها را مورد بررسی قرار دادند. ما نیز در این مقاله، مفهوم مقیاس‌پذیری را به g -قاب‌ها تعمیم خواهیم داد و برخی از نتایج آن‌ها را در g -قاب‌ها ارائه می‌کنیم. علاوه بر این، با یافتن شرایط خاص، این نوع g -قاب‌ها را دسته‌بندی خواهیم کرد. سرانجام نشان خواهیم داد که مقیاس‌پذیری تحت عملگرهای یکانی و یکریختی‌های بین دو فضای هیلبرت ناوردا است. ابتدا تعاریف و قضایایی از مقیاس‌پذیری g -قاب‌ها را ارائه می‌دهیم. با استفاده از فرمول بازسازی قاب‌ها خواهیم داشت:

$$f = S^{-1}S(f) = \sum_{j \in J} \langle f, f_j \rangle S^{-1}f_j = \sum_{j \in J} \langle f, S^{-\frac{1}{2}}f_j \rangle S^{-\frac{1}{2}}f_j, \quad (f \in H).$$

که در این صورت $\{S^{-\frac{1}{2}}f_j\}_{j \in J}$ یک قاب پرسوال است. یکی از راه‌هایی که بتوانیم یک قاب را به‌سادگی تجزیه و تحلیل کنیم این است که از فرمول بازسازی استفاده نماییم و برای این کار در برخی از مسائل نیازمند به دست آوردن وارون عملگر قاب هستیم، در مواردی به دست آوردن آن ما را دچار مشکل می‌کند. لذا با قرار دادن ضرایبی در عناصر قاب، آن را به یک قاب پرسوال (قاب A -تنگ) تبدیل می‌نماییم زیرا می‌دانیم که یک قاب A -تنگ است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $f \in H$ و $Sf = Af$ و یا در حالت مطلوب‌تر آن، قاب پرسوال است زیرا $S = I$. به همین دلیل مفهوم مقیاس‌پذیری قاب‌ها به وجود آمد.

تعریف ۱.۱. یک g -قاب $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ در H را نسبت به $\{H_j : j \in J\}$ g -قاب مقیاس‌پذیر گویند، اگر به‌ازای هر $j \in J$ $c_j \geq 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\{c_j \Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ به یک g -قاب پرسوال تبدیل شود. علاوه بر این، اگر به‌ازای هر $j \in J$ $c_j > 0$ ، آن را g -قاب مقیاس‌پذیر مثبت گویند. در صورتی‌که $\delta > 0$ ای موجود باشد که به‌ازای هر $\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J$ ، $c_j \geq \delta$ ، $j \in J$ را g -قاب مقیاس‌پذیر اکیداً مثبت نامند.

تذکر ۲.۱. توجه شود که تعریف مقیاس‌پذیری را می‌توان برای هر دنباله مانند $\{x_i : i \in I\}$ با ضرایبی از $\{c_i : i \in I\} \subseteq \mathbb{C}$ بیان نمود، ولی بنابر تعریف عملگر قاب، به‌ازای هر دنباله $C = \{c_i : i \in I\} \subseteq \mathbb{C}$ داریم

$$S_C(x) = S|_C(x), \quad (x \in H).$$

در نتیجه $\{c_i x_i : i \in I\}$ یک قاب (قاب پرسوال) است اگر و تنها اگر $\{|c_i| x_i : i \in I\}$ یک قاب (قاب پرسوال) باشد. بنابراین به‌ازای هر $i \in I$ ، فرض می‌کنیم $c_i \geq 0$.

مثال ۳.۱. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر و $\{f_j : j \in J\}$ قابی مقیاس‌پذیر در H باشد. فرض کنیم Λ_{f_j} تابع القایی توسط f_j باشد، یعنی

$$\Lambda_{f_j} f = \langle f, f_j \rangle, \quad (f \in H).$$

به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که $\{\Lambda_{f_j} : j \in J\}$ ، g -قاب مقیاس‌پذیر نسبت به \mathbb{C} است.

واضح است که مقیاس‌پذیری مثبت و اکیداً مثبت برای g -قاب‌های با تعداد متناهی عضو معادل هستند. علاوه بر این، هر ضریب g -قاب مانند $\{c_j \Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ از g -قاب $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ به‌طوری‌که $|J| < \infty$ و ضرایب مثبت c_j ، نیز g -قاب است. در حالت نامتناهی این امر ممکن است اتفاق نیفتد. فرض کنیم $\{e_j : j \in J\}$ پایه متعامد $\bigoplus_{j \in J} H_j$ باشد. عملگر قطری

$$D = D_c : \bigoplus_{j \in J} H_j \rightarrow \bigoplus_{j \in J} H_j$$

متناظر با دنباله اسکالری $c = \{c_j\}_{j \in J}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D_c \{x_j\}_{j \in J} = \{c_j x_j\}_{j \in J}, \quad \{x_j\}_{j \in J} \in \text{dom} D_c,$$

که در آن

$$\text{dom}D_c := \{\{x_j\}_{j \in J} \in \bigoplus_{j \in J} H_j : \{c_j x_j\}_{j \in J} \in \bigoplus_{j \in J} H_j\},$$

یک عملگر خوش تعریف است. عملگر D_c خودالحاق است اگر و تنها اگر به ازای هر $j \in J$ ، $c_j \in \mathbb{R}$. دامنه، هسته و برد عملگر خطی T را به ترتیب با نمادهای $\text{dom}T$ ، $\text{ker}T$ و $\text{ran}T$ نمایش می دهیم. علاوه بر این، عملگری خطی، یک به یک و با برد بسته T بین دو فضای H و K را به اختصار با نماد ICR (یا ICR -عملگر) نمایش می دهیم. به عبارت دیگر، $\delta > 0$ وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر $x \in \text{dom}T$ ، $\|Tx\| \geq \delta \|x\|$. می دانیم که عملگر تحلیل هر g -قاب، یک عملگر ICR است. همچنین، اگر عملگر D_c از پایین کران دار باشد، آنگاه D_c یک یکرختی^۱ است.

لم ۴.۱. فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ ، g -قاب و $\{c_j\}_{j \in J} \subseteq \mathbb{R}^+$.
 (آ) اگر $D_c \Lambda$ ، g -قاب پارسوال باشد، آنگاه به ازای هر $x \in H$

$$x = \sum_{j \in J} c_j \check{\Lambda}_j^* \Lambda_j(x).$$

(ب) اگر $\{c_j \check{\Lambda}_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ ، g -دوگان Λ باشد، آنگاه Λ مقیاس پذیر است.

اثبات. (آ) فرض کنیم $x \in H$. چون $\{c_j \Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ ، g -قاب پارسوال است، در این صورت

$$x = \sum_{j \in J} (c_j \Lambda_j)^* (c_j \Lambda_j)(x) = \sum_{j \in J} c_j \check{\Lambda}_j^* \Lambda_j(x).$$

(ب) اگر $x \in H$ آنگاه

$$x = \sum_{j \in J} (c_j \check{\Lambda}_j)^* \Lambda_j(x) = \sum_{j \in J} (c_j \Lambda_j)^* (c_j \Lambda_j)(x).$$

بنابراین g -قاب $\{c_j \Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ یک قاب پارسوال و لذا Λ مقیاس پذیر است.

□

تذکر ۵.۱. توجه داشته باشید، g -قاب مقیاس پذیر با دنباله اسکالری $c = \{c_j\}_{j \in J}$ است اگر و تنها اگر $\{c_j \check{\Lambda}_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ ، g -دوگان Λ باشد وقتی که $c = \{c_j\}_{j \in J}$ کران دار باشد.

در گزاره بعدی رابطه بین عملگر قاب، عملگر تحلیل و قطری با مقیاس پذیری g -قاب را بیان می کنیم.

گزاره ۶.۱. فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ ، g -قاب با عملگر قاب S_Λ ، عملگر تحلیل T_Λ^* ، $\{c_j\}_{j \in J} \subseteq \mathbb{R}^+$ و $\Gamma := \{c_j \Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$. در این صورت، احکام زیر هم ارزند.
 (آ) Γ ، g -قاب است.

(ب) $\text{ran}T_\Lambda^*$ و $D|_{\text{ran}T_\Lambda^*}$ عملگر ICR است.
 در این حالت، عملگر g -قاب Γ از رابطه زیر به دست می آید

$$S_\Gamma = \overline{T_\Lambda D_c D_c T_\Lambda^*},$$

که در آن $\overline{T_\Lambda D_c}$ نماد بستار عملگر $T_\Lambda D_c$ است.

اثبات. (ب \Rightarrow آ) فرض کنیم Γ ، g -قاب باشد. آنگاه برای هر $f \in H$

$$T_\Gamma^* f = \{(c_j \Lambda_j)(f)\}_{j \in J} = D_c \{\Lambda_j f\}_{j \in J} = D_c T_\Lambda^* f.$$

در نتیجه $T_\Gamma^* = D_c T_\Lambda^*$ همچنین

$$S_\Gamma = T_\Gamma T_\Gamma^* = (D_c T_\Lambda^*)^* D_c T_\Lambda^*,$$

^۱isomorphism

چون روی $dom(D_c)$ رابطه $(D_c T_\Lambda^*)^* = T_\Lambda D_c$ برقرار است. از سوی دیگر، $dom(D_c)$ در $\oplus H_j$ چگال است و $(D_c T_\Lambda^*)^*$ عملگری کران‌دار است، پس $T_\Gamma^* = D_c T_\Lambda^*$ کران‌دار است. در نتیجه $(D_c T_\Lambda^*)^*$ بستار $T_\Lambda D_c$ است. بنابراین

$$S_\Gamma = \overline{T_\Lambda D_c} D_c T_\Lambda^*.$$

(آ \Rightarrow ب) فرض کنیم، $ICR, D_c|_{ran T_\Lambda^*}$ و $ran T_\Lambda^* \subseteq dom D_c$ عملگر باشد. چون Λ, g -قاب است، بنابراین ICR, T_Λ^* است. به‌خصوص، با برد بسته است. بنابر قضیهٔ گراف بسته $D_c|_{ran T_\Lambda^*}$ عملگر کران‌دار است و چون $ICR, D_c|_{ran T_\Lambda^*}$ عملگر است، می‌توان نتیجه گرفت که ثابت‌های $A', B' > 0$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$A' \|g\| \leq \|D_c g\| \leq B' \|g\|, \quad (g \in ran T_\Lambda^*).$$

اگر A, B کران‌های g -قاب $\{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ باشند، آنگاه

$$A \|f\|^2 \leq \|T_\Lambda^* f\|^2 \leq B \|f\|^2, \quad (f \in H).$$

در نتیجه به‌ازای هر $f \in H$ داریم:

$$\begin{aligned} AA' \|f\|^2 &\leq A' \|T_\Lambda^* f\|^2 \leq \|D_c T_\Lambda^*(f)\|^2 \\ &\leq B' \|T_\Lambda^* f\|^2 \leq BB' \|f\|^2, \quad (f \in H). \end{aligned}$$

لذا

$$AA' \|f\|^2 \leq \|T_\Gamma^*(f)\|^2 \leq BB' \|f\|^2, \quad (f \in H).$$

و به دنبال آن Γ, g -قاب است. علاوه بر این

$$S_\Gamma = (D_c T_\Lambda^*)^* (D_c T_\Lambda^*) = \overline{T_\Lambda D_c} D_c T_\Lambda^*.$$

□

گزاره ۷.۱. فرض کنید $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ ، یک g -قاب در H نسبت به $\{H_j : j \in J\}$ باشد. در این صورت $\Gamma = \{c_j \Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ یک g -قاب است اگر و تنها اگر $D_c|_{ran T_\Lambda^*}$ یک عملگر ICR کران‌دار باشد.

اثبات. فرض کنیم Λ, g -قاب با کران‌های $A, B > 0$ باشد. در نتیجه برای هر $f \in H$

$$\sqrt{A} \|f\| \leq \|T_\Lambda^* f\| \leq \sqrt{B} \|f\|.$$

اگر Γ, g -قاب با کران‌های $A', B' > 0$ باشد، آنگاه به‌ازای هر $f \in H$

$$\sqrt{A'} \|f\| \leq \|T_\Gamma^* f\| = \|D_c T_\Lambda^*(f)\| \leq \sqrt{B'} \|f\|.$$

پس برای هر $f \in H$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{A'}}{\sqrt{B}} \|T_\Lambda^*(f)\| &\leq \sqrt{A'} \|f\| \leq \|D_c T_\Lambda^*(f)\| \\ &\leq \frac{\sqrt{B'}}{\sqrt{A}} \|T_\Lambda^*(f)\|, \end{aligned}$$

بنابراین $D|_{ran T_\Lambda^*}$ یک عملگر ICR کران‌دار است.

برعکس، اگر $ICR, D|_{ran T_\Lambda^*}$ عملگر کران‌دار باشد، آنگاه ثابت‌های $A'', B'' > 0$ وجود دارند به‌طوری‌که به‌ازای هر $f \in H$

$$A'' \|T_\Lambda^*(f)\| \leq \|D_c T_\Lambda^*(f)\| = \|T_\Gamma^*(f)\| \leq B'' \|T_\Lambda^*(f)\|.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} A''\sqrt{A'}\|f\| &\leq A''\|T_{\Lambda}^*(f)\| \leq \|T_{\Gamma}^*(f)\| \\ &\leq B''\|T_{\Lambda}^*(f)\| \leq B''\sqrt{B'}\|f\|, \end{aligned}$$

□

و نتیجه به دست می‌آید.

ما اکنون یک شرط هم‌ارز به‌ظاهر بدیهی را برای مقیاس‌پذیری بیان می‌کنیم، که بیان و اثبات آن در حالت کلی در فضاهای هیلبرت دلخواه تفکیک‌پذیر آسان نیست.

گزاره ۸.۱. فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ ، $-g$ قاب با عملگر قاب S_{Λ} و عملگر تحلیل T_{Λ}^* باشد. در این صورت، گزاره‌های زیر هم‌ارز هستند.

(آ) Λ ، $-g$ قاب مقیاس‌پذیر (مثبت، اکیداً مثبت) است.

(ب) عملگر قطری نامنفی (مثبت، اکیداً مثبت) D در $\bigoplus_{j \in J} H_j$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\overline{T_{\Lambda} D}(DT_{\Lambda}^*) = I_H.$$

اثبات. (ب \Rightarrow آ) فرض کنیم Λ $-g$ قاب مقیاس‌پذیر با دنباله اسکالرهایی $\{c_j\}_{j \in J} \subset \mathbb{R}^+$ باشد. بنابراین $\Gamma = \{c_j \Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ ، $-g$ قاب پارسوال است. در نتیجه، بنابر گزاره ۶.۱، $ran T_{\Lambda}^* \subset dom D_c$ و $S_{\Gamma} = \overline{T_{\Lambda} D_c}(D_c T_{\Lambda}^*)$ عملگر $-g$ قاب Γ است. چون عملگر $-g$ قاب پارسوال، عملگر همانی است، پس

$$\overline{T_{\Lambda} D_c}(D_c T_{\Lambda}^*) = I_H.$$

(آ \Rightarrow ب) فرض کنیم، D عملگری قطری نامنفی در $\bigoplus_{j \in J} H_j$ باشد، به‌طوری‌که

$$\overline{T_{\Lambda} D_c}(D_c T_{\Lambda}^*) = I_H.$$

آنگاه DT_{Λ}^* روی H قابل تعریف است. به‌خصوص، $ran T_{\Lambda}^* \subset dom D$ می‌دانیم که چون Λ یک $-g$ قاب است پس T_{Λ}^* عملگری کران‌دار و از پایین نیز کران‌دار است همچنین D عملگری کران‌دار و $|ran T_{\Lambda}^*|$ از پایین کران‌دار است پس DT_{Λ}^* عملگری کران‌دار است و از پایین کران‌دار است.

از سوی دیگر

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle (T_{\Lambda} D)^*(DT_{\Lambda}^*)x, x \rangle = \|DT_{\Lambda}^*x\|^2, \quad (x \in H).$$

پس DT_{Λ}^* ایزومتري است. در نتیجه DT_{Λ}^* عملگری ICR است.

فرض کنیم $\{c_j\}_{j \in J}$ دنباله اسکالری نامنفی باشد، به‌طوری‌که $D = D_c$ از گزاره ۶.۱ نتیجه می‌شود که $\Gamma = \{c_j \Lambda_j\}_{j \in J}$ ، $-g$ قاب با عملگر قاب $S_{\Gamma} = I_H$ است. در نتیجه Γ $-g$ قاب پارسوال است.

□

اثبات‌های مثبت و اکیداً مقیاس‌پذیری Λ به‌طور مشابه است.

یک نتیجه بسیار مفید از گزاره ۶.۱ ارائه می‌دهیم، که نشان می‌دهد مقیاس‌پذیری تحت تبدیلات یکانی پایا است.

نتیجه ۹.۱. فرض کنیم H و K دو فضای هیلبرت و $\Lambda = \{\Lambda_j \in B(H, H_j) : j \in J\}$ ، $-g$ قاب باشد و $U \in B(K, H)$ عملگری یکانی باشد، یعنی $UU^* = I_H$ و $U^*U = I_K$. آنگاه Λ $-g$ قاب مقیاس‌پذیر است اگر و تنها اگر $\Lambda U = \{\Lambda_j U \in B(K, H_j) : j \in J\}$ $-g$ قاب مقیاس‌پذیر باشد.

اثبات. فرض کنیم Λ یک $-g$ قاب مقیاس‌پذیر در H با عملگر قطری D باشد. چون عملگر تحلیل $\Lambda U = T_{\Lambda}^* U$ ، ΛU عملگر تحلیل $T_{\Lambda U}^*$ است، لذا داریم:

$$\begin{aligned} \overline{(T_{\Lambda U} D)}(DT_{\Lambda U}^*) &= \overline{(U^* T_{\Lambda} D)}(DT_{\Lambda}^* U) \\ &= U^* \overline{(T_{\Lambda} D)}(DT_{\Lambda}^*) U \\ &= U^* U \\ &= I_K. \end{aligned}$$

در نتیجه ΛU مقیاس‌پذیر است.

برعکس، کافی است توجه کنیم که اگر U یک یکرختی باشد، آنگاه U^* یک یکرختی است و چون $\Lambda = (\Lambda U)U^*$ ، به این ترتیب حکم به دست می‌آید. \square

۲ قاب‌های تکه‌ای مقیاس‌پذیر در فضا‌های هیلبرت

کاسازا و همکارانش برای اولین بار مفهوم قاب‌های تکه‌ای مقیاس‌پذیر را روی فضا‌های \mathbb{R}^n در مقاله [۴] تعریف نموده‌اند و برخی از نتایج را در این فضا به دست آوردند. ما نیز در این بخش تلاش کرده‌ایم این مفهوم را روی فضا‌های هیلبرت دلخواه تعریف نماییم و تعدادی از این نتایج را در فضا‌های هیلبرت دلخواه، به خصوص در فضا‌های هیلبرت با بعد متناهی تعمیم دهیم و در ادامه یک شرط لازم و کافی برای مشخصه‌سازی قاب‌های تکه‌ای مقیاس‌پذیر ارائه می‌دهیم. نهایتاً، شرایطی را که موجب می‌شود این مفهوم در فضای حاصلضرب تانسوری فضا‌های هیلبرت دلخواه برقرار شود را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. اکنون تعریف قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر برای تعداد متناهی عملگر تصویر متعامد P_1, \dots, P_m که در آن $m \geq 2$ را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنید $\{x_i : i \in I\}$ یک قاب در H باشد. آن را قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر گویند، هرگاه عملگرهای تصویر متعامد P_1, \dots, P_m روی H وجود داشته باشند به طوری که $\sum_{j=1}^m P_j = I$ ، و زیرمجموعه‌ای از ضرایب

$$\{a_i^1, \dots, a_i^m : i \in I\} \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0}$$

موجود باشند، به طوری که

$$\{a_i^1 P_1(x_i) + \dots + a_i^m P_m(x_i) : i \in I\}$$

یک قاب پارسوال روی H باشد. گاهی آن را \mathcal{P} -مقیاس‌پذیر^۱ گویند هرگاه $\mathcal{P} := \{P_1, \dots, P_m\}$.

در کل این بخش، به‌ازای هر $j \in [m]$ ، قرار می‌دهیم $H_j = P_j(H)$. مشاهده می‌شود قاب‌های مقیاس‌پذیر، تکه‌ای مقیاس‌پذیر هستند. درحالی‌که مثال‌هایی در مقاله [۴]، با جزئیات بیشتر زده شده است، که نشان می‌دهد عکس آن برقرار نیست. نتیجه اصلی این بخش را در ادامه ارائه خواهیم نمود.

قضیه ۲.۲. $X = \{x_i : i \in I\} \subseteq H$ تکه‌ای مقیاس‌پذیر با تصویر متعامد P_1, \dots, P_m و ضرایب مقیاس $\{a_i^j : i \in I, j \in [m]\}$ است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $j \in [m]$ ، قاب مقیاس‌پذیر در H_j با ضرایب مقیاس $\{a_i^j : i \in I\}$ باشد و به‌ازای هر $x \in H$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \neq j, k, j=1}^m a_i^j a_i^k \operatorname{Re}[\langle x, P_j x_i \rangle \overline{\langle x, P_k x_i \rangle}] = 0.$$

اثبات. (\Rightarrow) فرض کنیم $\{x_i : i \in I\}$ قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر با تصاویر متعامد P_1, \dots, P_m و ضرایب مقیاس $\{a_i^j : i \in I, j \in [m]\}$ روی H باشد. در این صورت $\{a_i^1 P_1 x_i + \dots + a_i^m P_m x_i : i \in I\}$ قاب پارسوال روی H است. چون تصویر متعامد یک قاب (قاب پارسوال)، یک قاب (قاب پارسوال) است و به‌ازای هر $j \in [m]$ ، خواهیم داشت:

$$P_j(a_i^1 P_1 x_i + \dots + a_i^j P_j x_i + \dots + a_i^m P_m x_i) = a_i^j P_j x_i,$$

بنابراین به‌ازای هر $j \in [m]$ ، قاب پارسوال $\{a_i^j P_j x_i : i \in I\}$ قاب پارسوال است.

^۱ \mathcal{P} -piecewise

همچنین به‌ازای هر $x \in H$ داریم:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \sum_{i \in I} \left| \sum_{j=1}^m \langle x, a_i^j P_j(x_i) \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^m |\langle x, a_i^j P_j(x_i) \rangle|^2 + 2 \sum_{i \in I} \sum_{1 \leq j < k \leq m} a_i^j a_i^k \operatorname{Re} \left(\langle x, P_j x_i \rangle \overline{\langle x, P_k x_i \rangle} \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i \in I} |\langle x, a_i^j P_j(x_i) \rangle|^2 + 2 \sum_{i \in I} \sum_{1 \leq j < k \leq m} a_i^j a_i^k \operatorname{Re} \left(\langle x, P_j x_i \rangle \overline{\langle x, P_k x_i \rangle} \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \|P_j x\|^2 + 2 \sum_{i \in I} \sum_{1 \leq j < k \leq m} a_i^j a_i^k \operatorname{Re} \left(\langle x, P_j x_i \rangle \overline{\langle x, P_k x_i \rangle} \right). \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\sum_{i \in I} \sum_{1 \leq j < k \leq m} a_i^j a_i^k \operatorname{Re} \left(\langle x, P_j x_i \rangle \overline{\langle x, P_k x_i \rangle} \right) = 0.$$

(\Leftarrow) فرض کنیم $x \in H$. با توجه به روند اثبات فوق، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \left| \sum_{j=1}^m \langle x, a_i^j P_j x_i \rangle \right|^2 &= \sum_{j=1}^m \|P_j(x)\|^2 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{i \in I} \sum_{1 \leq j < k \leq m} \langle x, a_i^j P_j x_i \rangle \overline{\langle x, a_i^k P_k x_i \rangle} \right) \\ &= \|x\|^2, \end{aligned}$$

□

به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

نتیجه ۳.۲. فرض کنید $X = \{x_i : i \in I\}$ قاب تک‌های مقیاس‌پذیر با تصاویر متعامد P_1, \dots, P_m باشد. آنگاه دنباله $\{P_j x_i : i \in I, j \in [m]\}$ قاب مقیاس‌پذیر H است.

اثبات. بنابر مفروضات، ضرایب ثابت $\{a_i^1, \dots, a_i^m : i \in I\}$ وجود دارند، به طوری که $\{\sum_{j=1}^m a_i^j P_j x_i : i \in I\}$ یک قاب پارسوال H است و بنابر قضیه ۲.۲

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i \in I} |\langle x, a_i^j P_j x_i \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

□

در نتیجه دنباله $\{P_j x_i : j \in [m], i \in I\}$ قاب مقیاس‌پذیر H است.

اکنون فرع ۲.۳، در مرجع [۴] را به فضاهای هیلبرت دلخواه تعمیم می‌دهیم.

گزاره ۴.۲. فرض کنید $X = \{x_i : i \in I\}$ یک قاب H باشد. اگر تصاویر متعامد P_1, \dots, P_m روی H موجود باشند به طوری که $\sum_{j \in [m]} P_j = I$ و یک افراز $P = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$ از I باشد که به‌ازای هر $j \in [m]$ قاب مقیاس‌پذیر $\{P_j x_i : i \in \sigma_j\}$ قاب مقیاس‌پذیر H_j باشد، آنگاه X قاب تک‌های مقیاس‌پذیر است.

اثبات. فرض کنید به‌ازای هر $j \in [m]$ ، $\{a_i^j : i \in \sigma_j\} \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0}$. $\{a_i^j P_j(x_i) : i \in \sigma_j\}$ یک قاب پارسوال H_j است. در این صورت به‌ازای هر $i \in I \setminus \sigma_j$ قرار می‌دهیم $a_i^j = 0$ و به‌ازای هر $j \in [m]$ ، دنباله $\{a_i^j P_j x_i : i \in I\}$ یک قاب پارسوال H_j است. اکنون به‌ازای هر $i \in I$ ، $j, k \in [m]$ ، $j, k \neq i$ خواهیم داشت

$$a_i^j a_i^k = 0.$$

□

بنابر قضیه ۲.۲، نتیجه به دست خواهد آمد.

اکنون به‌ازای هر $j \in [m]$ فرض کنید T_j عملگر تحلیل $\{P_j x_i : i \in I\}$ باشد. در این صورت T_j روی H قابل توسعه است هرگاه به‌ازای هر $k \neq j$ ، روی H_k داشته باشیم $T_j = 0$.

قضیه ۵.۲. فرض کنید $\{x_i : i \in I\} \subseteq H$ یک قاب H و به‌ازای هر $j, j \in [m]$ تصویر متعامد روی H باشد. آنگاه احکام زیر معادل هستند:

- (۱) قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر H با ضرایب مقیاس $\{a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^m : i \in I\}$ است.
 (۲) $\sum_{1 \leq k \neq j \leq m} T_k^* D_k D_j T_j = 0$ ، که در آن به‌ازای هر $j, j \in [m]$ عملگر قطری روی $\ell_2(I)$ با عناصر قطری $\{a_i^j : i \in I\}$ است.

اثبات. می‌دانیم که عملگر تحلیل $\{a_i^j P_j(x_i) : i \in I, j \in [m]\}$ به‌صورت $T = \sum_{j=1}^m D_j T_j$ است. در نتیجه $T^* = \sum_{j=1}^m T_j^* D_j$

$$\begin{aligned} T^* T &= \left(\sum_{k=1}^m T_k^* D_k \right) \left(\sum_{j=1}^m D_j T_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^m T_j^* D_j^* T_j + \sum_{1 \leq k \neq j \leq m} T_k^* D_k D_j T_j. \end{aligned}$$

(۱) \Rightarrow (۲) چون $\{a_i^j P_j(x_i) : i \in I, j \in [m]\}$ یک قاب پارسوال روی H است، آنگاه

$$\begin{aligned} S &= I_H = \sum_{j=1}^m T_j^* D_j^* T_j + \sum_{1 \leq k \neq j \leq m} T_k^* D_k D_j T_j \\ &= \sum_{j=1}^m I_{P_j(H)} + \sum_{1 \leq k \neq j \leq m} T_k^* D_k D_j T_j. \end{aligned}$$

در نتیجه $\sum_{1 \leq k \neq j \leq m} T_k^* D_k D_j T_j = 0$.

(۲) \Rightarrow (۱) به‌وضوح اگر $S = I_H$ ، نتیجه به دست می‌آید. \square

در قضیه بعدی نشان خواهیم داد که خاصیت تکه‌ای مقیاس‌پذیر قاب‌ها تحت عملگرهای یکانی روی فضا‌های هیلبرت حفظ می‌شود.

قضیه ۶.۲. فرض کنید H و K دو فضای هیلبرت جدایی‌پذیر باشند. آنگاه $X = \{x_i : i \in I\}$ یک قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر H است اگر و تنها اگر به‌ازای هر عملگر یکانی $U : H \rightarrow K$ ، $UX = \{Ux_i : i \in I\}$ یک قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر K باشد.

اثبات. فرض کنید $X = \{x_i : i \in I\} \subseteq H$ یک قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر H با تصاویر متعامد P_1, P_2, \dots, P_m با ضرایب ثابت $\{a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^m : i \in I\}$ و عملگر یکانی دلخواه $U : H \rightarrow K$ باشد. اگر به‌ازای هر $j \in [m]$ ، $Q_j = UP_j U^*$ ، در این صورت $Q_j^* = Q_j^* = Q_j$ در نتیجه هر Q_j یک تصویر متعامد روی K است. به‌ازای هر $y \in K$ داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \sum_{j \in [m]} |\langle y, a_i^j Q_j(Ux_i) \rangle|^2 &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in [m]} |\langle U^* y, a_i^j P_j(x_i) \rangle|^2 \\ &= \|U^*(y)\|^2 = \|y\|^2, \end{aligned}$$

در نتیجه UX قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر است.

برعکس، می‌دانیم که اگر U یکرخیستی باشد، آنگاه U^* نیز یکرخیستی است لذا کافی است قرار دهیم $X = U^*(UX)$. \square

دنباله $X = \{x_i : i \in I\}$ را یک قاب با نرم برابر گویند، هرگاه به‌ازای هر $j, k \in I$ ، $\|x_j\| = \|x_k\|$. X را یک قاب با نرم واحد نامند، هرگاه به‌ازای هر $j \in I$ ، $\|x_j\| = 1$.

گزاره ۷.۲. فرض کنید $X = \{x_i : i \in I\}$ یک قاب فضای هیلبرت H با بعد متناهی باشد. اگر X قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر با تصاویر متعامد P_1, \dots, P_m و ضرایب ثابت $\{a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^m : i \in I\}$ باشد، آنگاه

$$\dim H = \sum_{j \in [m]} \dim H_j = \sum_{j \in [m]} \sum_{i \in I} (a_i^j)^2 \|P_j(x_i)\|^2.$$

اثبات. می‌دانیم که اگر H یک فضای هیلبرت با بعد متناهی و $\{f_i : i \in I\}$ قاب پرسوال H باشد، آنگاه

$$\sum_{i \in I} \|f_i\|^2 = \dim(H).$$

همچنین اگر $\{g_i : i \in I\}$ قاب پرسوال و $P : H \rightarrow H$ تصویر متعامد روی H باشد، آنگاه $\{P(g_i) : i \in I\}$ قاب پرسوال $K = P(H)$ است. زیرا به‌ازای هر $j \in [m]$ داریم:

$$\left\{ P_j \left(\sum_{k \in [m]} a_i^k P_k(x_i) \right) : i \in I \right\} = \{a_i^j P_j(x_i) : i \in I\}$$

قاب پرسوال $H_j = P_j(H)$ است. بنابراین

$$\sum_{i \in I} \|a_i^j P_j(x_i)\|^2 = \dim(H_j).$$

در نتیجه

$$\sum_{j \in [m]} \sum_{i \in I} \|a_i^j P_j(x_i)\|^2 = \sum_{j \in [m]} \dim H_j = \dim(H).$$

□

قضیه ۸.۲. فرض کنید $X = \{x_i : i \in I\}$ یک قاب تک‌های مقیاس‌پذیر با نرم واحد فضای هیلبرت با بعد متناهی H باشد به طوری که با تصاویر متعامد P_1, \dots, P_m و ضرایب ثابت $\{a_i^j : i \in I, j \in [m]\}$ باشد. آنگاه

$$\sum_{i \in I} \min\{(a_i^j)^2 : j \in [m]\} \leq \dim(H) \quad \text{الف}$$

$$\dim(H) \leq \sum_{i \in I} \max\{(a_i^j)^2 : j \in [m]\} \quad \text{ب)}$$

اثبات. به‌ازای هر $i \in I$ قرار می‌دهیم

$$c_i = \min\{(a_i^j)^2 : j \in [m]\}$$

و

$$l_i = \max\{(a_i^j)^2 : j \in [m]\}.$$

الف) چون به‌ازای هر $j \in [m]$ قاب پرسوال $\{a_i^j P_j(x_i) : i \in I\}$ قاب پرسوال H_j است، لذا

$$\sum_{k \in I} (a_i^j)^2 \|P_j(x_i)\|^2 = \dim H_j.$$

چون به‌ازای هر $i \in I$ $j \in [m]$

$$\sum_{j \in [m]} \|x_i\|^2 = \sum_{j \in [m]} \|P_j(x_i)\|^2, \quad \dim H = \sum_{j \in [m]} \dim H_j,$$

آنگاه

$$\sum_{i \in I} c_i \leq \sum_{i \in I} \sum_{j \in [m]} (a_i^j)^2 \|P_j(x_i)\|^2 \leq \sum_{i \in I} l_i$$

□

و اثبات کامل می‌شود.

ا. خسروی و ب. خسروی در مقاله [۱۱]، نشان دادند که حاصلضرب تانسوری دو قاب دلخواه در فضای هیلبرت، یک قاب است. در ادامه یک شرط لازم و کافی تک‌های مقیاس‌پذیر در حاصلضرب تانسوری قاب‌ها را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۹.۲. فرض کنید $X = \{x_i : i \in I\} \subseteq H$ قاب X و $\{y_j : j \in J\}$ یک قاب A -تنگ K باشد. آنگاه X یک قاب تک‌های مقیاس‌پذیر H با تصاویر متعامد P_1, \dots, P_m و ضرایب مقیاس $\{a_i^j : i \in I, j \in [m]\}$ است اگر و تنها اگر $\{x_i \otimes y_j : i \in I, j \in J\}$ یک قاب تک‌های مقیاس‌پذیر $H \otimes K$ با تصاویر متعامد $P'_1 = P_1 \otimes I_K, \dots, P'_m = P_m \otimes I_K$ و ضرایب مقیاس $\{\frac{1}{\sqrt{A}} a_i^1, \dots, \frac{1}{\sqrt{A}} a_i^m : i \in I\}$ باشد.

اثبات. (\Rightarrow) چون $\{y_j : j \in J\}$ یک قاب A -تنگ است. پس $\{\frac{1}{\sqrt{A}}y_j : j \in J\}$ و همچنین $\{\sum_{j=1}^m a_i^j P_j(x_i) : i \in I\}$ قاب‌های پارسوال H هستند. در این صورت نتایج به‌دست‌آمده در [۱۱] ایجاب می‌کند که

$$\left\{ \sum_{l=1}^m a_i^l P_l(x_i) \otimes \frac{1}{\sqrt{A}} y_j : i \in I, j \in J \right\}$$

یک قاب پارسوال در $H \otimes K$ باشد. بنابراین

$$\left\{ \sum_{l=1}^m \frac{1}{\sqrt{A}} a_i^l P_l'(x_i \otimes y_j) : i \in I, j \in J \right\}$$

قاب پارسوال در $H \otimes K$ است. در نتیجه $\{x_i \otimes y_j : i \in I, j \in J\}$ یک قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر $H \otimes K$ است. (\Leftarrow) فرض کنید $x \in H$ و $y \neq 0$ در K باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} \|x\|^2 \|y\|^2 &= \|x \otimes y\|^2 = \sum_{l=1}^m \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \frac{1}{A} (a_i^l)^2 |\langle x, P_l(x_i) \rangle|^2 |\langle y, y_j \rangle|^2 \\ &= \|y\|^2 \sum_{l=1}^m \sum_{i \in I} (a_i^l)^2 |\langle x, P_l(x_i) \rangle|^2. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\|x\|^2 = \sum_{l=1}^m \sum_{i \in I} (a_i^l)^2 |\langle x, P_l(x_i) \rangle|^2.$$

□

اثبات نتیجه زیر شبیه اثبات فوق است.

نتیجه ۱۰.۲. فرض کنید $\{x_i : i \in I\}$ یک قاب λ -تنگ H باشد. در این صورت $\{y_j : j \in J\}$ قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر K با تصاویر متعامد Q_1, \dots, Q_m و با ضرایب مقیاس $\{b_j^1, \dots, b_j^m : j \in J\}$ است اگر و تنها اگر $\{x_i \otimes y_j : i \in I, j \in J\}$ یک قاب تکه‌ای مقیاس‌پذیر $H \otimes K$ با تصاویر متعامد $I_H \otimes Q_1, \dots, I_H \otimes Q_m$ و ضرایب مقیاس $\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} b_j^1, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda}} b_j^m : j \in J\}$ باشد.

References

- [1] Asgari, M.S., & Khosravi, A. (2005). Frames and bases of subspaces in Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 308, 541–553. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.11.036>.
- [2] Cahill, J., & Chen, X. (2013). A note on scalable frames. *Proceedings of the 10th International Conference on Sampling Theory and Applications*, 93–96.
- [3] Casazza, P., Carli, L., & Tran, T. (2024). Piecewise scalable frames. *Linear Algebra and its Applications*, 694, 262–282. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.laa.2024.04.008>.
- [4] Casazza, P., & Chen, X. (2017). Frame scalings: A condition number approach. *Linear Algebra and its Applications*, 523, 152–168. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.laa.2017.02.020>.
- [5] Casazza, P., & Kutyniok, G. (2004). Frames of subspaces. *Contemp. Math. Amer. Math. Soc.*, 345, 87–113.

- [6] Casazza, P.G., & Kutyniok, G. (2013). *Finite Frames: Theory and Applications*. Birkhauser, New York. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8373-3>.
- [7] Christensen, O. (2008). *Frames and Bases*. Birkhauser, Boston. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4678-3>.
- [8] Daubechies, I., Grossmann, A., & Meyer, Y. (1986). Painless nonorthogonal expansions. *J. Math. Phys*, 27, 1271–1286. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.527388>.
- [9] Duffin, R.J., & Schaeffer, A.C. (1952). A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Am. Math. Soc*, 72, 341–366. DOI: <https://doi.org/10.2307/1990760>.
- [10] Khosravi, A., & Farmani, M.R. (2024). Piecewise scalable frames in Hilbert spaces. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 22(3), 2350052. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219691323500522>.
- [11] Khosravi, A., & Khosravi, B. (2007). Frames and bases in tensor product of Hilbert spaces and Hilbert C^* -modules. *Proc. Math. Sci*, 117, 1–12. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12044-007-0001-5>.
- [12] Khosravi, A., & Mirzaee Azandaryani, M. (2014). Approximate duality of g-frames in Hilbert spaces. *Acta Math. Sci*, 34, 639–652. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0252-9602\(14\)60036-9](https://doi.org/10.1016/S0252-9602(14)60036-9).
- [13] Kutyniok, G., Okoudjou, K.A., & Philipp, F. (2013). Scalable frames. *Linear Algebra and its Applications*, 438, 2225–2238. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.10.046>.
- [14] Sun, W. (2006). G-frames and g-Riesz bases. *J. Math. Anal. Appl*, 322, 437–452. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.09.039>.