Measure Algebras and Applications

Characterization of frames in terms of R-duals in separable Hilbert spaces

Farkhondeh Takhteh[1]

1. Persian Gulf University, Bushehr, Iran. Email: f.takhteh@pgu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 24 March 2024
Received in revised form:
26 May 2024
Accepted: 21 June 2024
Published Online:
20 August 2024

Keywords:
Hilbert space,
Frame,
R-dual,
Riesz basis

2020 Mathematics Subject Classification:
42C15

ABSTRACT

In this paper, we consider the concept of R-duality with respect to Riesz bases. In particular, we study the concept of R-duality with respect to Riesz bases, constructed by anti-linear operators, for Bessel sequences. Using these anti-linear operators, we give some characterizations for frames and Riesz bases.

Cite this article: Takhteh, F. (2024). Characterization of frames in terms of R-duals in separable Hilbert spaces. *Measure Algebras and Applications*, 2(1), 92–103. http://doi.org/10.22091/maa.2024.10714.1019

Publisher: University of Qom

DOI: 10.22091/maa.2024.10714.1019

Extended Abstract

Introduction

Let $\mathcal{H}$ be a separable Hilbert space. A sequence $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ in $\mathcal{H}$ is a frame for $\mathcal{H}$ if there exist constants $0 < A \leq B < \infty$ such that

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

If only the right-hand side inequality is required, it is called a Bessel sequence. It is called a tight frame if there is a constant $A > 0$ such that

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i\rangle|^2 = A\|f\|^2.$$

It is called a Parseval frame if $A = 1$. It is called a frame sequence if it is a frame for its closed linear span.

Two Bessel sequences $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ and $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ are called dual frames if

$$f = \sum_{i=1}^{\infty}\langle f, f_i\rangle g_i = \sum_{i=1}^{\infty}\langle f, g_i\rangle f_i \qquad \forall f \in \mathcal{H}.$$

A sequence $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ in $\mathcal{H}$ is called a Riesz sequence for $\mathcal{H}$ if there exist constants $0 < A \leq B < \infty$ such that

$$A\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i\right\|^2 \leq B\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2,$$

for all $\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$, where A and B are called Riesz bounds. It is called a Riesz basis for $\mathcal{H}$ if $\overline{span\{f_i\}_{i=1}^{\infty}} = \mathcal{H}$.

If $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ is a Riesz basis, it is well known that $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ has a unique dual Riesz basis. In the other words, there exists a unique Riesz basis $\{\tilde{f}_i\}_{i=1}^{\infty}$ such that

$$\langle f_i, \tilde{f}_j\rangle = \delta_{i,j}, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

If $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ has Riesz bounds A, B, then the dual Riesz sequence has bounds $\frac{1}{B}, \frac{1}{A}$.

Frames in Hilbert spaces were introduced by Duffin and Schaeffer [6] in 1952, when they were studying some problems in nonharmonic Fourier series. Frames were popularized after the work of Daubechies, Grossmann and Meyer [5] where the theory of frames was related to wavelets and Gabor systems. Indeed, after this work, frames were studied widely and deeply, particularly in the more specialized context of wavelet frames and Gabor frames, which are two key tools in signal processing, image processing, data compression, and sampling.

Let g be a function in $L^2(\mathbb{R})$ and a, b be two positive constants. The collection $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ where $E_{mb}f(x) = e^{2\pi imbx}f(x)$ and $T_{na}f(x) = f(x - na)$ is called a Gabor frame in $L^2(\mathbb{R})$ if it is a frame for the Hilbert space $L^2(\mathbb{R})$.

Gabor frames, introduced by D. Gabor in 1946, have been extensively studied. One of the most important results for Gabor frames is the Ron-Shen duality principle that precisely characterizes Gabor frames. It states that for every $g \in L^2(\mathbb{R})$ and $a, b > 0$ with $ab \leq 1$, $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ is a frame with bounds A, B for $L^2(\mathbb{R})$ if and only if $\{\frac{1}{\sqrt{ab}}E_{\frac{m}{a}}T_{\frac{n}{b}}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ is a Riesz sequence with bounds A, B.

For generalization of the duality principle from Gabor frames to abstract frame theory, the concept of R-duality with respect to orthonormal bases is defined as follows:
Let $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ and $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ be orthonormal bases for a separable Hilbert space $\mathcal{H}$. Let $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ be a sequence such that for every $j \in \mathbb{N}$, $\sum_{i\in\mathbb{N}} |\langle f_i, e_j\rangle|^2 < \infty$ and

$$\omega_j^f = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle f_i, e_j\rangle h_i.$$

The sequence $(\omega_j^f)_{j\in\mathbb{N}}$ is called the R-dual sequence of $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ with respect to $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ and $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

The R-duality with respect to orthonormal bases is discussed in several papers. In this paper, first, we consider the concept of R-duality with respect to Riesz bases. In particular, for the Bessel sequences, we define the concept of R-duality concerning Riesz bases using an anti-linear map. Using this anti-linear map, we give characterizations of frames and Riesz bases. Also, we give characterizations of frames and Riesz bases in terms of their R-dual sequences with respect to Riesz bases. We show the relation of the R-dual sequence of the sum of Bessel sequences and the sum of the R-dual sequence with respect to Riesz bases. Also, we give some characterizations for sums of frames and sums of Riesz bases. In addition, we generalize some of the results in [1].

Conclusion

The main results of this paper are:

***Definition* 0.1.** *Let $(f_i)_{i\in I}$ be a Bessel sequence for $\mathcal{H}$ and $(h_i)_{i\in I}$ be a Riesz basis. Define the anti-linear operator $M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ by*

$$M(f) = \sum_{i\in I} \langle f_i, f\rangle h_i. \tag{0.1}$$

M is a well-defined and bounded anti-linear operator on $\mathcal{H}$. Its adjoint M^* is an anti-linear operator and

$$M^* f = \sum_{i\in I} \langle h_i, f\rangle f_i.$$

***Theorem* 0.2.** *Let $(e_j)_{j\in I}$ and $(h_i)_{i\in I}$ be Riesz bases for $\mathcal{H}$, $(f_i)_{i\in I}$ be a sequence such that $\sum_{i\in I} |\langle f_i, e_j\rangle|^2 < \infty$ for every $j \in I$ and $(\omega_j^f)_{j\in I}$ be the R-dual sequence of $(f_i)_{i\in I}$ with respect to $(e_j)_{j\in I}$ and $(h_i)_{i\in I}$. Then $(f_i)_{i\in I}$ is a frame in $\mathcal{H}$ if and only if $(\omega_j^f)_{j\in I}$ is a Riesz sequence in $\mathcal{H}$.*

***Theorem* 0.3.** *Let $(e_j)_{j\in I}$ and $(h_i)_{i\in I}$ be Riesz bases for $\mathcal{H}$, $(f_i)_{i\in I}$ be a sequence such that $\sum_{i\in I} |\langle f_i, e_j\rangle|^2 < \infty$ for every $j \in I$ and $(\omega_j^f)_{j\in I}$ be the R-dual sequence of $(f_i)_{i\in I}$ with respect to $(e_j)_{j\in I}$ and $(h_i)_{i\in I}$. Then, the following statements are equivalent:*

1. *$(f_i)_{i\in I}$ is a Riesz basis in $\mathcal{H}$.*
2. *$(\omega_j^f)_{j\in I}$ is a Riesz basis in $\mathcal{H}$.*

***Proposition* 0.4.** *Let $(f_i)_{i\in I}$ and $(g_i)_{i\in I}$ be Bessel sequences for $\mathcal{H}$ and $(\omega_j^f)_{j\in I}$ and $(\omega_j^g)_{j\in I}$ be the R-dual sequences of $(f_i)_{i\in I}$ and $(g_i)_{i\in I}$ with respect to Riesz bases $(e_j)_{j\in I}$ and $(h_i)_{i\in I}$, respectively. Then $(\omega_j^f + \omega_j^g)_{j\in I}$ is the R-dual sequence of $(f_i + g_i)_{i\in I}$ with respect to Riesz bases $(e_j)_{j\in I}$ and $(h_i)_{i\in I}$.*

***Corollary* 0.5.** *With the assumptions of Proposition 0.4,*

1. $(f_i + g_i)_{i\in I}$ *is a frame if and only if* $(\omega_j^f + \omega_j^g)_{j\in I}$ *is a Riesz sequence.*

2. $(f_i + g_i)_{i\in I}$ *is a Riesz basis if and only if* $(\omega_j^f + \omega_j^g)_{j\in I}$ *is a Riesz basis.*

***Example* 0.6.** *Let* $\mathcal{H}$ *be a separable Hilbert space and let* $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ *be an orthonormal basis for* $\mathcal{H}$*. Define* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *as follows:*

$$T(e_j) = \begin{cases} 2e_j, & j = 2k, \\ e_j, & j = 2k+1. \end{cases}$$

It is easy to see that for each $x \in \mathcal{H}$

$$\|x\| \leq \|Tx\| \leq 2\|x\|. \tag{0.2}$$

Also, $\overline{span\{T(e_i)\}_{i\in I}} = \mathcal{H}$*. Thus,* $\{f_i\}_{i\in I} = \{T(e_i)\}_{i\in I}$ *is a Riesz basis for* $\mathcal{H}$*.*
Consider the following Riesz bases:

$$\{z_i\}_{i\in I} = \{e_1, 3e_2, e_3, e_4, ...\},$$

and

$$\{h_i\}_{i\in I} = \{2e_1, e_2, e_3, e_4, ...\}.$$

A simple calculation implies that the R-dual of $\{f_i\}_{i\in I}$ *with respect to* $\{z_i\}_{i\in I}$ *and* $\{h_i\}_{i\in I}$ *is*

$$\{\omega_j^f\}_{j\in I} = \{2e_1, 6e_2, e_3, 2e_4, e_5, 2e_6, e_7, 2e_8, ...\},$$

which is a Riesz basis for $\mathcal{H}$*.*

***Lemma* 0.7.** *Let* $(f_i)_{i\in I}$ *be a Bessel sequence for* $\mathcal{H}$ *with the synthesis operator* T_f*. Let* $(\omega_j^f)_{j\in I}$ *be the R-dual of* $(f_i)_{i\in I}$ *with respect to Riesz bases* $(e_i)_{i\in I}$ *and* $(h_i)_{i\in I}$*. Then* $h \in (span\{\omega_j^f : j \in I\})^{\perp}$ *if and only if* $(\langle h_i, h\rangle)_{i\in I} \in kerT_f$*.*

***Proposition* 0.8.** *Let* $(f_i)_{i\in I}$ *be a frame sequence for* $\mathcal{H}$*,* $(e_i)_{i\in I}$ *be a Riesz basis and* $(h_i)_{i\in I}$ *be an orthonormal basis for* $\mathcal{H}$*. Let* $(\omega_j^f)_{j\in I}$ *be the R-dual of* $(f_i)_{i\in I}$ *with respect to Riesz bases* $(e_i)_{i\in I}$ *and* $(h_j)_{j\in I}$*. Then* $(\omega_j^f)_{j\in I}$ *is a frame sequence for* $\mathcal{H}$*.*

***Proposition* 0.9.** *Let* $(f_i)_{i\in I}$ *be a Bessel sequence with bound* A_1 *and frame operator* S_f *and* M *be defined as (0.1). Let* $(e_i)_{i\in I}$ *and* $(h_i)_{i\in I}$ *be Riesz bases for* $\mathcal{H}$*. Then the following statements hold.*

1. *If* $(e_i)_{i\in I}$ *is an orthonormal basis for* $\mathcal{H}$ *and* S_ω *is the frame operator of* $(\omega_j^f)_{j\in I}$*, then* $MM^* = S_\omega$*.*

2. *If* $(h_i)_{i\in I}$ *is an orthonormal basis for* $\mathcal{H}$*, then*
   (a) $M^*M = S_f$*.*
   (b) $\left\|\sum_{j\in I} \overline{a_j}\omega_j^f\right\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2$*, where* $f = \sum_{j\in I} a_j e_j$*.*

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۳، دوره ۲، شماره ۱، ص ۱۰۳-۹۲

ساختارسازی قاب‌ها برحسب R-دوگان‌ها در فضاهای هیلبرت جدایی‌پذیر

فرخنده تخته [۱]

۱. گروه ریاضی، دانشگاه خلیج‌فارس، بوشهر، ایران. رایانامه: f.takhteh@pgu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱/۵
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۳/۶
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۴/۱
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۵/۳۰

کلمات کلیدی:
فضای هیلبرت،
قاب،
R-دوگان،
پایهٔ ریس

رده‌بندی ریاضی:
42C15

چکیده

در این مقاله، R-دوگان‌ها نسبت به پایه‌های ریس را در فضاهای هیلبرت مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به‌ویژه، برای دنباله‌های بسل با استفاده از یک عملگر مزدوج‌خطی مفهوم R-دوگان‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم و نتایج و ساختارسازی‌هایی را برای قاب‌ها، پایه‌های ریس و دنباله‌های ریس برحسب R-دوگان‌ها به دست می‌آوریم.

استناد: تخته، فرخنده. (۱۴۰۳). ساختارسازی قاب‌ها برحسب R-دوگان‌ها در فضاهای هیلبرت جدایی‌پذیر. جبرهای اندازه و کاربردها، ۲(۱)، ۱۰۳-۹۲.

http://doi.org/10.22091/maa.2024.10714.1019

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

فرض کنیم g یک تابع در $L^2(\mathbb{R})$ و a, b دو عدد مثبت باشند. در این صورت، خانوادهٔ $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ که در آن $E_{mb}f(x) = e^{2\pi imbx}f(x)$ و $T_{na}f(x) = f(x-na)$ یک قاب گابور نامیده می‌شود اگر آن یک قاب برای فضای هیلبرت $L^2(\mathbb{R})$ باشد.

قاب‌های گابور در سال ۱۹۴۶ توسط **گابور** [1] در مرجع [۹] معرفی شدند و به‌طور وسیع مورد مطالعه قرار گرفتند، برای نمونه مراجع [۷، ۱۰] را مشاهده کنید.

یکی از نتایج مهم در مورد قاب‌های گابور، اصل دوگانی **رن- شن** [2] است (مرجع [۱۱] را ملاحظه کنید) که دقیقاً قاب‌های گابور را ساختارسازی می‌کند. در واقع، بیان می‌کند که اگر $g\in L^2(\mathbb{R})$، $a, b > 0$ با $ab \leq 1$، در این صورت $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ یک قاب با کران‌های A, B برای $L^2(\mathbb{R})$ است اگر و فقط اگر $\{\frac{1}{\sqrt{ab}}E_{\frac{m}{a}}T_{\frac{n}{b}}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ یک دنبالهٔ ریس با کران‌های A, B باشد.

برای تعمیم این اصل از قاب‌های گابور در $L^2(\mathbb{R})$ به قاب‌ها در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، مفهوم یک R-دوگان نسبت به پایه‌های متعامدیکه در [۱] معرفی شد.

فرض کنیم $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ و $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ پایه‌های متعامدیکه برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند. همچنین فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ یک دنباله در $\mathcal{H}$ باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $j\in\mathbb{N}$، داشته باشیم $\sum_{i\in\mathbb{N}}|\langle f_i, e_j\rangle|^2 < \infty$. در این صورت تعریف می‌کنیم $\omega_j^f := \sum_{i\in\mathbb{N}}\langle f_i, e_j\rangle h_i$، و دنبالهٔ $\{\omega_j^f\}_{j\in\mathbb{N}}$ یک R-دوگان $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ نسبت به پایه‌های متعامدیکه $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ و $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ نامیده می‌شود.

مفهوم R-دوگانی نسبت به پایه‌های متعامدیکه در مقالات زیادی مورد توجه قرار گرفته است، مقالات [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۱۲] و [۱۳] را ملاحظه کنید.

در این مقاله روی مفهوم R-دوگان‌ها نسبت به پایه‌های ریس تمرکز می‌کنیم. به‌ویژه برای دنباله‌های بسل، با استفاده از یک عملگر مزدوج‌خطی (تعریف‌شده در مرجع [۱۳]) دنبالهٔ R-دوگان آن را تعریف می‌کنیم. با استفاده از تکنیک‌های نظریهٔ عملگرها نتایجی را در مورد R-دوگان‌ها به دست می‌آوریم.

۲ تعاریف و مقدمات

در این بخش، مفاهیم و قضایای مورد نیاز را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ دو پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشند. فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ دنباله‌ای در $\mathcal{H}$ باشد به‌طوری‌که برای هر $j\in I$، داشته باشیم $\sum_{i\in I}|\langle f_i, e_j\rangle|^2 < \infty$. در این صورت، تعریف می‌کنیم $\omega_j^f := \sum_{i\in I}\langle f_i, e_j\rangle h_i$، دنبالهٔ $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ را یک R-دوگان $\{f_i\}_{i\in I}$ نسبت به پایه‌های ریس $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ می‌نامیم.

تعریف ۲.۲. فرض کنید $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل در $\mathcal{H}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس باشد. در این صورت، عملگر مزدوج‌خطی $M:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ را به‌صورت

$$M(f) = \sum_{i\in I}\langle f_i, f\rangle h_i \tag{۱.۲}$$

تعریف می‌کنیم. این عملگر خوش‌تعریف و کران‌دار است. الحاقی M یعنی M^* یک عملگر مزدوج‌خطی به‌صورت زیر است:

$$M^*f = \sum_{i\in I}\langle h_i, f\rangle f_i.$$

ملاحظه ۳.۲. فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل، $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ دو پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشند. در این صورت، اگر M عملگر تعریف‌شده در (۱.۲) باشد، آنگاه $M(e_j) = \sum_{i\in I}\langle f_i, e_j\rangle h_i$، لذا $\omega_j^f = M(e_j)$ پس $\{M(e_j)\}_{j\in I}$، یک R-دوگان $\{f_i\}_{i\in I}$ نسبت به $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ است.

قضیهٔ زیر، الگوریتمی را معرفی می‌کند که $\{f_i\}_{i\in I}$ را برحسب یک R-دوگانش نسبت به پایه‌های ریس نمایش دهد (مراجع [۱، ۱۵] را ملاحظه کنید).

[1] Gabor
[2] Ron-Shen

قضیه ۴.۲. فرض کنیم $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ دو پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشند و $\{f_i\}_{i\in I}$ دنباله‌ای در $\mathcal{H}$ باشد به‌طوری‌که برای هر $j\in I$ داشته باشیم $\sum_{i\in I}|\langle f_i, e_j\rangle|^2<\infty$. در این صورت، شرایط زیر برقرار هستند:

(الف) برای هر $i\in I$ داریم:

$$f_i=\sum_{j\in I}\langle \omega_j^f, \widetilde{h_i}\rangle \widetilde{e_j},$$

که در آن، $\{\widetilde{e_j}\}_{j\in I}$ و $\{\widetilde{h_i}\}_{i\in I}$ به‌ترتیب دوگان‌های کانونی $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ هستند.

(ب) $\{f_i\}_{i\in I}$ یک R-دوگان $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ نسبت به $\{\widetilde{h_i}\}_{i\in I}$ و $\{\widetilde{e_j}\}_{j\in I}$ است.

قضیه ۵.۲. فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل با کران A باشد، $\{h_i\}_{i\in I}$ و $\{e_j\}_{j\in I}$ دو پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشند و M را عملگر تعریف‌شده در (۱.۲) در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ یک R-دوگان $\{f_i\}_{i\in I}$ نسبت به $\{h_i\}_{i\in I}$ و $\{e_j\}_{j\in I}$ باشد. در این صورت، $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ یک دنبالهٔ بسل در $\mathcal{H}$ است. علاوه‌بر این، گزاره‌های زیر معادل هستند:

(۱) $R(M)$ (برد M) بسته است و M یک‌به‌یک است.

(۲) M از پایین کران‌دار است.

(۳) $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ است.

قضیه ۶.۲. فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل و $\{h_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت، عملگر مزدوج‌خطی $M:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ (تعریف‌شده در (۱.۲)) وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس باشد.

۳ نتایج اصلی

قضیهٔ زیر یک ساختارسازی برای قاب برحسب R-دوگان آن نسبت به پایه‌های ریس ارائه می‌دهد.

قضیه ۱.۳. فرض کنید $\{h_i\}_{i\in I}$ و $\{e_j\}_{j\in I}$ دو پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشند و $\{f_i\}_{i\in I}$ دنباله‌ای باشد به‌طوری‌که برای هر $j\in I$ داشته باشیم $\sum_{i\in I}|\langle f_i, e_j\rangle|^2<\infty$. همچنین فرض کنید $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ دنبالهٔ R-دوگان $\{f_i\}_{i\in I}$ نسبت به پایه‌های ریس $\{h_i\}_{i\in I}$ و $\{e_j\}_{j\in I}$ باشد. در این صورت $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ است اگر و فقط اگر $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ یک دنبالهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشد.

اثبات. فرض کنید $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد و M عملگر مزدوج‌خطی (۱.۲) باشد. در این صورت بنابر قضیه ۵.۲، M یک عملگر مزدوج‌خطی از پایین کران‌دار است. پس اعداد ثابت مثبت A_1 و A_2 وجود دارند به‌طوری‌که

$$A_1\|f\|^2\leq \|M(f)\|^2\leq A_2\|f\|^2\quad \forall f\in\mathcal{H}.$$

فرض کنید $0<A_1'\leq A_2'$ کران‌های ریس برای $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\mathcal{F}$ یک زیرمجموعهٔ متناهی از I باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{j\in\mathcal{F}} a_j\omega_j^f\Big\|^2=\Big\|\sum_{j\in\mathcal{F}} a_jM(e_j)\Big\|^2 &= \Big\|M(\sum_{j\in\mathcal{F}}\overline{a_j}e_j)\Big\|^2\\ &\leq A_2\Big\|\sum_{j\in\mathcal{F}}\overline{a_j}e_j\Big\|^2\\ &\leq A_2A_2'\sum_{j\in\mathcal{F}}|a_j|^2\end{aligned}$$

درنتیجه $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ یک دنبالهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ است (A_1A_1' کران پایین است).

برعکس، فرض کنید $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ یک دنبالهٔ ریس با کران‌های ریس $0<A_1\leq A_2$ برای $\mathcal{H}$ باشد. همچنین فرض کنید $0<B_1\leq B_2$ و $0<C_1\leq C_2$ به‌ترتیب کران‌های ریس برای $\{e_i\}_{i\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ باشند. اگر $f\in span\{e_k\}_{k\in I}$، آنگاه زیرمجموعهٔ متناهی F از I و ثابت‌های $\{c_j: j\in F\}$ موجود هستند به‌طوری‌که $f=\sum_{j\in F}c_je_j$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}|\langle f_i,f\rangle|^2=\sum_{i\in I}\left|\sum_{j\in F}\langle f_i,c_je_j\rangle\right|^2 &\leq \frac{1}{C_1}\left\|\sum_{i\in I}\sum_{j\in F}\langle f_i,c_je_j\rangle h_i\right\|^2\\ &= \frac{1}{C_1}\left\|\sum_{j\in F}\overline{c_j}\sum_{i\in I}\langle f_i,e_j\rangle h_i\right\|^2\\ &= \frac{1}{C_1}\left\|\sum_{j\in F}\overline{c_j}\omega_j^f\right\|^2\\ &\leq \frac{A_2}{C_1}\sum_{j\in F}|c_j|^2\\ &\leq \frac{A_2}{B_1C_1}\left\|\sum_{j\in F}c_je_j\right\|^2=\frac{A_2}{B_1C_1}\|f\|^2.\end{aligned}$$

با اثباتی مشابه خواهیم داشت:

$$\sum_{i\in I}|\langle f_i,f\rangle|^2\geq\frac{A_1}{B_2C_2}\|f\|^2.$$

چون $\overline{span\{e_k\}_{k\in I}}=\mathcal{H}$ نتیجه می‌شود $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ است. □

قضیه ۲.۳. فرض کنید $\{h_i\}_{i\in I}$ و $\{e_j\}_{j\in I}$ دو پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشند و $\{f_i\}_{i\in I}$ دنباله‌ای در $\mathcal{H}$ باشد به‌طوری‌که برای هر $j\in I$، داشته باشیم $\sum_{i\in I}|\langle f_i,e_j\rangle|^2<\infty$. همچنین فرض کنید $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ دنبالهٔ R-دوگان $\{f_i\}_{i\in I}$ نسبت به $\{h_i\}_{i\in I}$ و $\{e_j\}_{j\in I}$ باشد. در این صورت عبارت‌های زیر معادل هستند:

۱. $\{f_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ است.

۲. $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ یک پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ است.

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲). فرض کنید $\{f_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشد. بنابر قضیه ۱.۳، $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ یک دنبالهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ است. برای کامل شدن برهان، کافی است ثابت کنیم $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ در $\mathcal{H}$ کامل است. برای این منظور فرض کنید، $h\in\mathcal{H}$ و برای هر $j\in I$ داشته باشیم $\langle h,\omega_j^f\rangle=0$. حال برای هر $j\in I$ خواهیم داشت:

$$0=\langle h,\omega_j^f\rangle=\left\langle h,\sum_{i\in I}\langle f_i,e_j\rangle h_i\right\rangle=\left\langle e_j,\sum_{i\in I}\langle h_i,h\rangle f_i\right\rangle.$$

چون $\{e_i\}_{i\in I}$ در $\mathcal{H}$ کامل است، پس $\sum_{i\in I}\langle h_i,h\rangle f_i=0$. اما $\{f_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ است، درنتیجه برای هر $i\in I$، $\langle h_i,h\rangle=0$. از کامل بودن $\{h_i\}_{i\in I}$ نتیجه می‌شود $h=0$.

(۲) $\Leftarrow$ (۱). فرض کنید $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ یک پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشد. بنابر قضیه ۱.۳، $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ است. برای کامل کردن برهان، کافی است نشان دهیم اگر $\{c_i\}_{i\in I}\in\ell^2(I)$ و $\sum_{i\in I}c_if_i=0$، آنگاه برای هر $i\in I$ داریم $c_i=0$. ازآنجایی‌که $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل برای $\mathcal{H}$ است، پس $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ نیز یک دنبالهٔ بسل برای $\mathcal{H}$ است. بنابر ملاحظه ۲.۳، $\{f_i\}_{i\in I}=\{M_1(\widetilde{h_i})\}_{i\in I}$ که $M_1:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ به‌صورت زیر است:

$$M_1(g)=\sum_{j\in I}\langle\omega_j^f,g\rangle\widetilde{e_j}. \qquad (۱.۳)$$

از پیوستگی M_1 نتیجه می‌شود

$$\sum_{i\in I} c_i f_i = M_1\left(\sum_{i\in I}\overline{c_i}\widetilde{h_i}\right) = 0.$$

بنابر قضیه ۶.۲، M_1 یک عملگر وارون‌پذیر است. بنابراین $\sum_{i\in I}\overline{c_i}\widetilde{h_i} = 0$. حال چون $\{\widetilde{h_i}\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ است، برای هر $i \in I$ نتیجه می‌شود $c_i = 0$. $\square$

ملاحظه ۳.۳. در قضیه ۲.۳، اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل باشد، می‌توانیم برهان ساده‌تری برای آن ارائه دهیم. چون $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل برای $\mathcal{H}$ است، $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ نیز یک دنبالهٔ بسل برای $\mathcal{H}$ است. فرض کنید M_1 عملگر مزدوج‌خطی تعریف‌شده در (۱.۳) باشد. برای هر $g \in \mathcal{H}$ خواهیم داشت:

$$M_1(g) = \sum_{j\in I}\langle \omega_j^f, g\rangle \widetilde{e_j} = \sum_{j\in I}\langle M(e_j), g\rangle \widetilde{e_j} = \sum_{j\in I}\langle M^*(g), e_j\rangle \widetilde{e_j} = M^*(g).$$

درنتیجه $M^* = M_1$. بنابر قضیه ۶.۲، $\{f_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ است اگر و فقط اگر M_1 یک عملگر وارون‌پذیر باشد. چون $M^* = M_1$ وارون‌پذیری M_1 و M باهم معادل هستند. بازهم بنابر قضیه ۶.۲، وارون‌پذیری M معادل با این است که $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ یک پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ است.

مثال ۴.۳. فرض کنید $\{e_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ متعامدیکه برای $\mathcal{H}$ باشد. عملگر $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(e_j) = \begin{cases} 2e_j, & j = 2k, \\ e_j, & j = 2k+1 \end{cases}$$

برای هر $x \in \mathcal{H}$ رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\|x\| \leq \|Tx\| \leq 2\|x\|. \tag{۲.۳}$$

همچنین $\overline{span\{T(e_i)\}_{i\in I}} = \mathcal{H}$. پس دنبالهٔ $\{f_i\}_{i\in I} = \{T(e_i)\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ است. اکنون پایه‌های ریس

$$\{z_i\}_{i\in I} = \{e_1, 3e_2, e_3, e_4, \ldots\}$$

و

$$\{h_i\}_{i\in I} = \{2e_1, e_2, e_3, e_4, \ldots\}$$

را در نظر بگیرید. با انجام محاسبات ساده‌ای می‌توان دید که دنبالهٔ R-دوگان $\{f_i\}_{i\in I}$ برحسب $\{z_i\}_{i\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ دنبالهٔ

$$\{\omega_j^f\}_{j\in I} = \{2e_1, 6e_2, e_3, 2e_4, e_5, 2e_6, e_7, 2e_8, \ldots\}$$

است که یک پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ است.

گزاره ۵.۳. فرض کنید $\{f_i\}_{i\in I}$ و $\{g_i\}_{i\in I}$ دو دنبالهٔ بسل برای $\mathcal{H}$ باشند و $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ و $\{\omega_j^g\}_{j\in I}$ به‌ترتیب R-دوگان‌های $\{f_i\}_{i\in I}$ و $\{g_i\}_{i\in I}$ نسبت به پایه‌های ریس $\{e_j\}_{j\in I}$ $\{h_i\}_{i\in I}$ باشند. در این صورت $\{\omega_j^f + \omega_j^g\}_{j\in I}$ R-دوگان $\{f_i + g_i\}_{i\in I}$ نسبت به پایه‌های ریس $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ است.

اثبات. $\{f_i + g_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل برای $\mathcal{H}$ است. زیرا کافی است ثابت کنیم عملگر ترکیب آن یک عملگر خطی کران‌دار از $\ell^2(I)$ به $\mathcal{H}$ است. برای این منظور فرض کنید A و B به‌ترتیب کران‌های بسل برای $\{f_i\}_{i\in I}$ و $\{g_i\}_{i\in I}$ باشند. برای هر $\{c_k\} \in \ell^2(I)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{k\in I} c_k(f_k + g_k)\right\| &= \left\|\sum_{k\in I} c_k f_k + \sum_{k\in I} c_k g_k\right\| \\ &\leq \left\|\sum_{k\in I} c_k f_k\right\| + \left\|\sum_{k\in I} c_k g_k\right\| \\ &\leq (\sqrt{A} + \sqrt{B})\left(\sum_{k\in I}|c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

بنابراین $\{f_i+g_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل برای $\mathcal{H}$ است.
حال برای هر $j\in I$ خواهیم داشت:

$$\sum_{i\in I}\langle f_i+g_i,e_j\rangle h_i=\sum_{i\in I}\langle f_i,e_j\rangle h_i+\sum_{i\in I}\langle g_i,e_j\rangle h_i=\omega_j^f+\omega_j^g.$$

درنتیجه حکم ثابت می‌شود. □

نتیجه ۶.۳. با فرض‌های گزاره ۵.۳، نتایج زیر برقرار هستند:

(۱) $\{f_i+g_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ است اگر و فقط اگر $\{\omega_j^f+\omega_j^g\}_{j\in I}$ یک دنبالهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشد.

(۲) $\{f_i+g_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ است اگر و فقط اگر $\{\omega_j^f+\omega_j^g\}_{j\in I}$ یک پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشد.

گزاره ۷.۳. فرض کنید $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل با کران A_1 و عملگر قاب S_f باشد. همچنین فرض کنید $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ پایه‌های ریس برای $\mathcal{H}$ باشند و عملگر M به‌صورت (۱.۲) تعریف شود. اگر $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ R-دوگان دنبالهٔ $\{f_i\}_{i\in I}$ نسبت به $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_j\}_{j\in I}$ باشد، در این صورت عبارت‌های زیر برقرار هستند:

(۱) اگر $\{e_j\}_{j\in I}$ یک پایهٔ متعامدیکه برای $\mathcal{H}$ باشد و S_ω عملگر قاب $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ باشد، آنگاه $MM^*=S_\omega$.

(۲) اگر $\{h_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ متعامدیکه برای $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه $M^*M=S_f$ و با فرض $f=\sum_{j\in I}a_je_j$ خواهیم داشت:

$$\left\|\sum_{j\in I}\overline{a_j}\omega_j^f\right\|^۲=\sum_{i\in I}|\langle f,f_i\rangle|^۲.$$

اثبات. برای هر $f\in\mathcal{H}$، داریم:

$$\begin{aligned}S_\omega(f)=\sum_{j\in I}\langle f,\omega_j^f\rangle\omega_j^f &= \sum_{j\in I}\langle f,M(e_j)\rangle M(e_j)\\ &= M\left(\sum_{j\in I}\langle M(e_j),f\rangle e_j\right)\\ &= M\left(\sum_{j\in I}\langle M^*f,e_j\rangle e_j\right)=MM^*f.\end{aligned}$$

برای هر $f\in\mathcal{H}$، داریم:

$$\begin{aligned}M^*M(f) &= \sum_{l\in I}\left\langle h_l,\sum_{i\in I}\langle f_i,f\rangle h_i\right\rangle f_l=\sum_{l\in I}\sum_{i\in I}\langle h_l,h_i\rangle\langle f,f_i\rangle f_l\\ &= \sum_{i\in I}\langle f,f_i\rangle f_i=S(f).\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $f\in\mathcal{H}$، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\langle M^*M(f),f\rangle=\langle S(f),f\rangle.$$

درنتیجه

$$\|M(f)\|^۲=\langle S(f),f\rangle=\sum_{i\in I}|\langle f,f_i\rangle|^۲.$$

اکنون اگر $f = \sum_{j\in I} a_j e_j$، پیوستگی M نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{j\in I}\overline{a_j}\omega_j^f\right\|^۲ &= \left\|\sum_{j\in I}\overline{a_j}M(e_j)\right\|^۲ = \left\|M\left(\sum_{j\in I}a_je_j\right)\right\|^۲ = \|M(f)\|^۲ \\ &= \sum_{i\in I}|\langle f, f_i\rangle|^۲. \end{aligned}$$

$\square$

لم ۸.۳. فرض کنید $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل برای $\mathcal{H}$ با عملگر ترکیب T_f باشد. همچنین فرض کنید $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ R-دوگان دنبالهٔ $\{f_i\}_{i\in I}$ نسبت به پایه‌های ریس $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ باشد. در این صورت $h \in (span\{\omega_j^f : j\in I\})^\perp$ اگر و فقط اگر داشته باشیم $\{\langle h_i, h\rangle\}_{i\in I} \in kerT_f$.

اثبات. برای هر $j \in I$، خواهیم داشت:

$$۰ = \langle h, \omega_j^f\rangle = \langle h, M(e_j)\rangle = \langle e_j, M^*(h)\rangle = \left\langle e_j, \sum_{i\in I}\langle h_i, h\rangle f_i\right\rangle.$$

چون $\{e_j\}_{j\in I}$ یک پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ است، پس $\overline{span\{e_i\}_{i\in I}} = \mathcal{H}$. درنتیجه $\langle e_j, \sum_{i\in I}\langle h_i, h\rangle f_i\rangle = ۰$ اگر و فقط اگر $\sum_{i\in I}\langle h_i, h\rangle f_i = ۰$ و از این نتیجه می‌شود $(\langle h_i, h\rangle)_{i\in I} \in kerT_f$. $\square$

گزاره ۹.۳. فرض کنید $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ قاب، $\{e_j\}_{j\in I}$ یک پایهٔ ریس و $\{h_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ متعامدیکه برای $\mathcal{H}$ باشند. اگر $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ دنبالهٔ R-دوگان دنبالهٔ $\{f_i\}_{i\in I}$ نسبت به $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_j\}_{j\in I}$ باشد، آنگاه $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ یک دنبالهٔ قاب برای $\mathcal{H}$ است.

اثبات. چون $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل نیز برای $\mathcal{H}$ هست، پس بنابر قضیه ۵.۲، $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ یک دنبالهٔ بسل برای $\mathcal{H}$ است. فرض کنید $f \in \overline{span(\omega_j^f)_{j\in I}}$. چون $\{h_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ متعامدیکه برای $\mathcal{H}$ است، پس بنابر لم ۸.۳ داریم $\{\langle h_i, f\rangle\}_{i\in I} \in kerT_f{}^\perp$. فرض کنید $D_۱$ یک کران پایین قاب برای $\{f_i\}_{i\in I}$ و $B_۱$ کران پایین ریس برای $\{e_j\}_{j\in I}$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum_{j\in I}|\langle\omega_j^f, f\rangle|^۲ &= \sum_{j\in I}|\langle M(e_j), f\rangle|^۲ = \sum_{j\in I}|\langle M^*(f), e_j\rangle|^۲ \\ &\geq B_۱\|M^*(f)\|^۲ = B_۱\left\|\sum_{i\in I}\langle h_i, f\rangle f_i\right\|^۲ \\ &\geq B_۱D_۱\sum_{i\in I}|\langle h_i, f\rangle|^۲ = B_۱D_۱\|f\|^۲. \end{aligned}$$

بنابراین $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ یک دنبالهٔ قاب برای $\mathcal{H}$ است. $\square$

References

[1] Casazza, P., Kutyniok, G., & Lammers, M.C. (2004). Duality principles in frame theory. *J. Fourier Anal. Appl*, 10, 383–408. DOI: https://doi.org/10.1007/s00041-004-3024-7.

[2] Casazza, P., Kutyniok, G., & Lammers, M.C. (2005). Duality principle, localization of frames, and Gabor theory, Optics and photonics. *International Society for Optics and Photonics*. DOI: https://doi.org/10.1117/12.615440.

[3] Christensen, O., Kim, H.O., & Kim, R.Y. (2011). On the duality principle by Casazza, Kutyniok, and Lammers. *J. Fourier Anal. Appl*, 17, 640–655. DOI: https://doi.org/10.1007/s00041-010-9151-4.

[4] Chuang, Z., & Zhao, J. (2015). On equivalent conditions of two sequences to be R-dual. *Journal of Inequalities and Applications*, 10, 1–8. DOI: https://doi.org/10.1186/s13660-014-0529-8.

[5] Daubechies, I., Grossmann, A., & Meyer, Y. (1986). Painless nonorthogonal expansions. *J. Math. Phys*, 27, 1271–1286. DOI: https://doi.org/10.1063/1.527388.

[6] Duffin, R.J., & Schaeffer, A.C. (1952). A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Am. Math. Soc*, 72, 341–366. DOI: https://doi.org/10.2307/1990760.

[7] Feichtinger, H.G., & Grochenig, K. (1997). Gabor frames and Time-Frequency Analysis of Distributions. *Journal of Functional Analysis*, 146, 464–495. DOI: https://doi.org/10.1006/jfan.1996.3078.

[8] Folland, G.B. (1994). A Course in Abstract Harmonic Analysis. *CRC Press*. DOI: https://doi.org/10.1201/b19172.

[9] Gabor, D. (1946). Theory of communications. *J. Inst. Elec. Eng*, 93, 429–457.

[10] Gröchenig, K. (2001). Foundation of time-frequency analysis. *Birkhäuser, Boston*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0003-1.

[11] Ron, A., & Shen, Z. (1997). Weyl-Heisenberg frames and Riesz bases in $L_2(\mathbb{R})$. *Duke Math. J*, 89, 237–282. DOI: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-97-08913-4.

[12] Stoeva, D.T., & Christensen, O. (2015). On R-duals and the duality principle in Gabor analysis. *J. Fourier Anal. Appl*, 21, 383–400. DOI: https://doi.org/10.1007/s00041-014-9376-8.

[13] Takhteh, F. (2023). Some results on R-duals in Hilbert spaces. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 13–21. DOI: http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9523.1008.

[14] Wexler, J., & Raz, S. (1990). Discrete Gabor expansions. *Signal Proc*, 21, 207–220. DOI: https://doi.org/10.1016/0165-1684(90)90087-F.

[15] Xiao, X.M., & Zhu, Y.C. (2009). Duality principle of frames in Banach spaces. *Acta. Math. Sci. Ser. A. Chin*, 29, 94–102.