



## Characterization of frames in terms of $R$ -duals in separable Hilbert spaces

Farkhondeh Takhteh<sup>1</sup> 

1. Persian Gulf University, Bushehr, Iran. Email: [f.takhteh@pgu.ac.ir](mailto:f.takhteh@pgu.ac.ir)

---

---

### Article Info

### ABSTRACT

---

---

#### Article type:

Research Article

#### Article history:

Received: 24 March 2024

Received in revised form:

26 May 2024

Accepted: 21 June 2024

Published Online:

20 August 2024

#### Keywords:

Hilbert space,

Frame,

$R$ -dual,

Riesz basis

In this paper, we consider the concept of  $R$ -duality with respect to Riesz bases. In particular, we study the concept of  $R$ -duality with respect to Riesz bases, constructed by anti-linear operators, for Bessel sequences. Using these anti-linear operators, we give some characterizations for frames and Riesz bases.

#### 2020 Mathematics Subject

#### Classification:

42C15

---

---

**Cite this article:** Takhteh, F. (2024). Characterization of frames in terms of  $R$ -duals in separable Hilbert spaces. *Measure Algebras and Applications*, 1(2), 92–103. <http://doi.org/10.22091/maa.2024.10714.1019>



©The Author(s).

**Publisher:** University of Qom

**DOI:** 10.22091/maa.2024.10714.1019

## Extended Abstract

### Introduction

Let  $\mathcal{H}$  be a separable Hilbert space. A sequence  $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$  in  $\mathcal{H}$  is a frame for  $\mathcal{H}$  if there exist constants  $0 < A \leq B < \infty$  such that

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

If only the right-hand side inequality is required, it is called a Bessel sequence. It is called a tight frame if there is a constant  $A > 0$  such that

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i \rangle|^2 = A\|f\|^2.$$

It is called a Parseval frame if  $A = 1$ . It is called a frame sequence if it is a frame for its closed linear span.

Two Bessel sequences  $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$  and  $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$  are called dual frames if

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle g_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, g_i \rangle f_i \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

A sequence  $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$  in  $\mathcal{H}$  is called a Riesz sequence for  $\mathcal{H}$  if there exist constants  $0 < A \leq B < \infty$  such that

$$A \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i \right\|^2 \leq B \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2,$$

for all  $\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ , where  $A$  and  $B$  are called Riesz bounds. It is called a Riesz basis for  $\mathcal{H}$  if  $\overline{\text{span}\{f_i\}_{i=1}^{\infty}} = \mathcal{H}$ .

If  $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$  is a Riesz basis, it is well known that  $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$  has a unique dual Riesz basis. In the other words, there exists a unique Riesz basis  $\{\tilde{f}_i\}_{i=1}^{\infty}$  such that

$$\langle f_i, \tilde{f}_j \rangle = \delta_{i,j}, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

If  $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$  has Riesz bounds  $A, B$ , then the dual Riesz sequence has bounds  $\frac{1}{B}, \frac{1}{A}$ .

Frames in Hilbert spaces were introduced by Duffin and Schaeffer [6] in 1952, when they were studying some problems in nonharmonic Fourier series. Frames were popularized after the work of Daubechies, Grossmann and Meyer [5] where the theory of frames was related to wavelets and Gabor systems. Indeed, after this work, frames were studied widely and deeply, particularly in the more specialized context of wavelet frames and Gabor frames, which are two key tools in signal processing, image processing, data compression, and sampling.

Let  $g$  be a function in  $L^2(\mathbb{R})$  and  $a, b$  be two positive constants. The collection  $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  where  $E_{mb}f(x) = e^{2\pi imbx}f(x)$  and  $T_{na}f(x) = f(x - na)$  is called a Gabor frame in  $L^2(\mathbb{R})$  if it is a frame for the Hilbert space  $L^2(\mathbb{R})$ .

Gabor frames, introduced by D. Gabor in 1946, have been extensively studied. One of the most important results for Gabor frames is the Ron-Shen duality principle that precisely characterizes Gabor frames. It states that for every  $g \in L^2(\mathbb{R})$  and  $a, b > 0$  with  $ab \leq 1$ ,  $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  is a frame with bounds  $A, B$  for  $L^2(\mathbb{R})$  if and only if  $\{\frac{1}{\sqrt{ab}}E_{\frac{m}{a}}T_{\frac{n}{b}}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  is a Riesz sequence with bounds  $A, B$ .

For generalization of the duality principle from Gabor frames to abstract frame theory, the concept of R-duality with respect to orthonormal bases is defined as follows:

Let  $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$  and  $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$  be orthonormal bases for a separable Hilbert space  $\mathcal{H}$ . Let  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  be a sequence such that for every  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\langle f_i, e_j \rangle|^2 < \infty$  and

$$\omega_j^f = \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle f_i, e_j \rangle h_i.$$

The sequence  $(\omega_j^f)_{j \in \mathbb{N}}$  is called the R-dual sequence of  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  with respect to  $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$  and  $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .

The R-duality with respect to orthonormal bases is discussed in several papers. In this paper, first, we consider the concept of R-duality with respect to Riesz bases. In particular, for the Bessel sequences, we define the concept of R-duality concerning Riesz bases using an anti-linear map. Using this anti-linear map, we give characterizations of frames and Riesz bases. Also, we give characterizations of frames and Riesz bases in terms of their R-dual sequences with respect to Riesz bases. We show the relation of the R-dual sequence of the sum of Bessel sequences and the sum of the R-dual sequence with respect to Riesz bases. Also, we give some characterizations for sums of frames and sums of Riesz bases. In addition, we generalize some of the results in [1].

## Conclusion

The main results of this paper are:

**Definition 0.1.** Let  $(f_i)_{i \in I}$  be a Bessel sequence for  $\mathcal{H}$  and  $(h_i)_{i \in I}$  be a Riesz basis. Define the anti-linear operator  $M : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  by

$$M(f) = \sum_{i \in I} \langle f_i, f \rangle h_i. \quad (0.1)$$

$M$  is a well-defined and bounded anti-linear operator on  $\mathcal{H}$ . Its adjoint  $M^*$  is an anti-linear operator and

$$M^* f = \sum_{i \in I} \langle h_i, f \rangle f_i.$$

**Theorem 0.2.** Let  $(e_j)_{j \in I}$  and  $(h_i)_{i \in I}$  be Riesz bases for  $\mathcal{H}$ ,  $(f_i)_{i \in I}$  be a sequence such that  $\sum_{i \in I} |\langle f_i, e_j \rangle|^2 < \infty$  for every  $j \in I$  and  $(\omega_j^f)_{j \in I}$  be the R-dual sequence of  $(f_i)_{i \in I}$  with respect to  $(e_j)_{j \in I}$  and  $(h_i)_{i \in I}$ . Then  $(f_i)_{i \in I}$  is a frame in  $\mathcal{H}$  if and only if  $(\omega_j^f)_{j \in I}$  is a Riesz sequence in  $\mathcal{H}$ .

**Theorem 0.3.** Let  $(e_j)_{j \in I}$  and  $(h_i)_{i \in I}$  be Riesz bases for  $\mathcal{H}$ ,  $(f_i)_{i \in I}$  be a sequence such that  $\sum_{i \in I} |\langle f_i, e_j \rangle|^2 < \infty$  for every  $j \in I$  and  $(\omega_j^f)_{j \in I}$  be the R-dual sequence of  $(f_i)_{i \in I}$  with respect to  $(e_j)_{j \in I}$  and  $(h_i)_{i \in I}$ . Then, the following statements are equivalent:

1.  $(f_i)_{i \in I}$  is a Riesz basis in  $\mathcal{H}$ .
2.  $(\omega_j^f)_{j \in I}$  is a Riesz basis in  $\mathcal{H}$ .

**Proposition 0.4.** Let  $(f_i)_{i \in I}$  and  $(g_i)_{i \in I}$  be Bessel sequences for  $\mathcal{H}$  and  $(\omega_j^f)_{j \in I}$  and  $(\omega_j^g)_{j \in I}$  be the R-dual sequences of  $(f_i)_{i \in I}$  and  $(g_i)_{i \in I}$  with respect to Riesz bases  $(e_j)_{j \in I}$  and  $(h_i)_{i \in I}$ , respectively. Then  $(\omega_j^f + \omega_j^g)_{j \in I}$  is the R-dual sequence of  $(f_i + g_i)_{i \in I}$  with respect to Riesz bases  $(e_j)_{j \in I}$  and  $(h_i)_{i \in I}$ .

**Corollary 0.5.** *With the assumptions of Proposition 0.4,*

1.  $(f_i + g_i)_{i \in I}$  is a frame if and only if  $(\omega_j^f + \omega_j^g)_{j \in I}$  is a Riesz sequence.
2.  $(f_i + g_i)_{i \in I}$  is a Riesz basis if and only if  $(\omega_j^f + \omega_j^g)_{j \in I}$  is a Riesz basis.

**Example 0.6.** *Let  $\mathcal{H}$  be a separable Hilbert space and let  $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$  be an orthonormal basis for  $\mathcal{H}$ . Define  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  as follows:*

$$T(e_j) = \begin{cases} 2e_j, & j = 2k, \\ e_j, & j = 2k + 1. \end{cases}$$

*It is easy to see that for each  $x \in \mathcal{H}$*

$$\|x\| \leq \|Tx\| \leq 2\|x\|. \quad (0.2)$$

*Also,  $\overline{\text{span}\{T(e_i)\}_{i \in I}} = \mathcal{H}$ . Thus,  $\{f_i\}_{i \in I} = \{T(e_i)\}_{i \in I}$  is a Riesz basis for  $\mathcal{H}$ .*

*Consider the following Riesz bases:*

$$\{z_i\}_{i \in I} = \{e_1, 3e_2, e_3, e_4, \dots\},$$

*and*

$$\{h_i\}_{i \in I} = \{2e_1, e_2, e_3, e_4, \dots\}.$$

*A simple calculation implies that the R-dual of  $\{f_i\}_{i \in I}$  with respect to  $\{z_i\}_{i \in I}$  and  $\{h_i\}_{i \in I}$  is*

$$\{\omega_j^f\}_{j \in I} = \{2e_1, 6e_2, e_3, 2e_4, e_5, 2e_6, e_7, 2e_8, \dots\},$$

*which is a Riesz basis for  $\mathcal{H}$ .*

**Lemma 0.7.** *Let  $(f_i)_{i \in I}$  be a Bessel sequence for  $\mathcal{H}$  with the synthesis operator  $T_f$ . Let  $(\omega_j^f)_{j \in I}$  be the R-dual of  $(f_i)_{i \in I}$  with respect to Riesz bases  $(e_i)_{i \in I}$  and  $(h_i)_{i \in I}$ . Then  $h \in (\text{span}\{\omega_j^f : j \in I\})^{\perp}$  if and only if  $(\langle h_i, h \rangle)_{i \in I} \in \ker T_f$ .*

**Proposition 0.8.** *Let  $(f_i)_{i \in I}$  be a frame sequence for  $\mathcal{H}$ ,  $(e_i)_{i \in I}$  be a Riesz basis and  $(h_i)_{i \in I}$  be an orthonormal basis for  $\mathcal{H}$ . Let  $(\omega_j^f)_{j \in I}$  be the R-dual of  $(f_i)_{i \in I}$  with respect to Riesz bases  $(e_i)_{i \in I}$  and  $(h_j)_{j \in I}$ . Then  $(\omega_j^f)_{j \in I}$  is a frame sequence for  $\mathcal{H}$ .*

**Proposition 0.9.** *Let  $(f_i)_{i \in I}$  be a Bessel sequence with bound  $A_1$  and frame operator  $S_f$  and  $M$  be defined as (0.1). Let  $(e_i)_{i \in I}$  and  $(h_i)_{i \in I}$  be Riesz bases for  $\mathcal{H}$ . Then the following statements hold.*

1. *If  $(e_i)_{i \in I}$  is an orthonormal basis for  $\mathcal{H}$  and  $S_{\omega}$  is the frame operator of  $(\omega_j^f)_{j \in I}$ , then  $MM^* = S_{\omega}$ .*
2. *If  $(h_i)_{i \in I}$  is an orthonormal basis for  $\mathcal{H}$ , then*
  - (a)  $M^*M = S_f$ .
  - (b)  $\left\| \sum_{j \in I} \bar{a}_j \omega_j^f \right\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle f, f_i \rangle|^2$ , where  $f = \sum_{j \in I} a_j e_j$ .



## ساختارسازی قاب‌ها برحسب $R$ -دوگان‌ها در فضاهای هیلبرت جدایی‌پذیر

فرخنده تخته<sup>۱</sup>

۱. گروه ریاضی، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران. رایانامه: [f.takhteh@pgu.ac.ir](mailto:f.takhteh@pgu.ac.ir)

اطلاعات مقاله	چکیده
<p>نوع مقاله: مقاله پژوهشی</p> <p>تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱/۵ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۳/۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۴/۱ تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۵/۳۰</p> <p>کلمات کلیدی: فضای هیلبرت، قاب، <math>R</math>-دوگان، پایه ریس</p> <p>رده‌بندی ریاضی: 42C15</p>	<p>در این مقاله، <math>R</math>-دوگان‌ها نسبت به پایه‌های ریس را در فضاهای هیلبرت مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به‌ویژه، برای دنباله‌های بسط با استفاده از یک عملگر مزدوج خطی مفهوم <math>R</math>-دوگان‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم و نتایج و ساختارسازی‌هایی را برای قاب‌ها، پایه‌های ریس و دنباله‌های ریس برحسب <math>R</math>-دوگان‌ها به دست می‌آوریم.</p>

استناد: تخته، فرخنده. (۱۴۰۳). ساختارسازی قاب‌ها برحسب  $R$ -دوگان‌ها در فضاهای هیلبرت جدایی‌پذیر. جبرهای اندازه و کاربردها، (۲)۱، ۹۲-۱۰۳.

<http://doi.org/10.22091/maa.2024.10714.1019>



ناشر: دانشگاه قم.  
© نویسندگان.

## ۱ مقدمه

فرض کنیم  $g$  یک تابع در  $L^2(\mathbb{R})$  و  $a, b$  دو عدد مثبت باشند. در این صورت، خانواده  $\{EmbTnag\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  که در آن  $EmbTnag(x) = e^{2\pi imbx} f(x)$  و  $Tnaf(x) = f(x - na)$  یک قاب گابور نامیده می شود اگر آن یک قاب برای فضای هیلبرت  $L^2(\mathbb{R})$  باشد.

قابهای گابور در سال ۱۹۴۶ توسط گابور<sup>۱</sup> در مرجع [۹] معرفی شدند و به طور وسیع مورد مطالعه قرار گرفتند، برای نمونه مراجع [۷، ۱۰] را مشاهده کنید.

یکی از نتایج مهم در مورد قابهای گابور، اصل دوگانی رن-شن<sup>۲</sup> است (مرجع [۱۱] را ملاحظه کنید) که دقیقاً قابهای گابور را ساختار سازی می کند. در واقع، بیان می کند که اگر  $g \in L^2(\mathbb{R})$  با  $a, b > 0$  یا  $ab \leq 1$ ، در این صورت  $\{EmbTnag\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  یک قاب با کرانهای  $A, B$  برای  $L^2(\mathbb{R})$  است اگر و فقط اگر  $\{\frac{1}{\sqrt{ab}} E_m^a T_n^b g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  یک دنباله ریس با کرانهای  $A, B$  باشد. برای تعمیم این اصل از قابهای گابور در  $L^2(\mathbb{R})$  به قابها در فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$ ، مفهوم یک  $R$ -دوگان نسبت به پایه های متعامدیکه در [۱] معرفی شد.

فرض کنیم  $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  و  $\{h_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  پایه های متعامدیکه برای فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  باشند. همچنین فرض کنیم  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  یک دنباله در  $\mathcal{H}$  باشد به طوری که به ازای هر  $j \in \mathbb{N}$  داشته باشیم  $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\langle f_i, e_j \rangle|^2 < \infty$ . در این صورت تعریف می کنیم  $\omega_j^f := \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle f_i, e_j \rangle h_i$  و دنباله  $\{\omega_j^f\}_{j \in \mathbb{N}}$  یک  $R$ -دوگان نسبت به پایه های متعامدیکه  $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  و  $\{h_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  نامیده می شود. مفهوم  $R$ -دوگانی نسبت به پایه های متعامدیکه در مقالات زیادی مورد توجه قرار گرفته است، مقالات [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۱۲] و [۱۳] را ملاحظه کنید.

در این مقاله روی مفهوم  $R$ -دوگانها نسبت به پایه های ریس تمرکز می کنیم. به ویژه برای دنباله های بسل، با استفاده از یک عملگر مزدوج خطی (تعریف شده در مرجع [۱۳]) دنباله  $R$ -دوگان آن را تعریف می کنیم. با استفاده از تکنیک های نظریه عملگرها نتایجی را در مورد  $R$ -دوگانها به دست می آوریم.

## ۲ تعاریف و مقدمات

در این بخش، مفاهیم و قضایای مورد نیاز را یادآوری می کنیم.

**تعریف ۱.۲.** فرض کنیم  $\{e_j\}_{j \in I}$  و  $\{h_i\}_{i \in I}$  دو پایه ریس برای  $\mathcal{H}$  باشند. فرض کنیم  $\{f_i\}_{i \in I}$  دنباله ای در  $\mathcal{H}$  باشد به طوری که برای هر  $j \in I$  داشته باشیم  $\sum_{i \in I} |\langle f_i, e_j \rangle|^2 < \infty$ . در این صورت، تعریف می کنیم  $\omega_j^f := \sum_{i \in I} \langle f_i, e_j \rangle h_i$  و دنباله  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  را یک  $R$ -دوگان  $\{f_i\}_{i \in I}$  نسبت به پایه های ریس  $\{e_j\}_{j \in I}$  و  $\{h_i\}_{i \in I}$  می نامیم.

**تعریف ۲.۲.** فرض کنید  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک دنباله بسل در  $\mathcal{H}$  و  $\{h_i\}_{i \in I}$  یک پایه ریس باشند. در این صورت، عملگر مزدوج خطی  $M: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  را به صورت

$$M(f) = \sum_{i \in I} \langle f_i, f \rangle h_i \quad (۱.۲)$$

تعریف می کنیم. این عملگر خوش تعریف و کران دار است. الحاقی  $M$  یعنی  $M^*$  یک عملگر مزدوج خطی به صورت زیر است:

$$M^* f = \sum_{i \in I} \langle h_i, f \rangle f_i.$$

**ملاحظه ۳.۲.** فرض کنیم  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک دنباله بسل،  $\{e_j\}_{j \in I}$  و  $\{h_i\}_{i \in I}$  دو پایه ریس برای  $\mathcal{H}$  باشند. در این صورت، اگر  $M$  عملگر تعریف شده در (۱.۲) باشد، آنگاه  $M(e_j) = \sum_{i \in I} \langle f_i, e_j \rangle h_i$  لذا  $\omega_j^f = M(e_j)$  پس  $\{M(e_j)\}_{j \in I}$ ، یک  $R$ -دوگان  $\{f_i\}_{i \in I}$  نسبت به  $\{e_j\}_{j \in I}$  و  $\{h_i\}_{i \in I}$  است.

قضیه زیر، الگوریتمی را معرفی می کند که  $\{f_i\}_{i \in I}$  را بر حسب یک  $R$ -دوگانش نسبت به پایه های ریس نمایش دهد (مراجع [۱، ۱۵] را ملاحظه کنید).

<sup>1</sup>Gabor

<sup>2</sup>Ron-Shen

**قضیه ۴.۲.** فرض کنیم  $\{e_j\}_{j \in I}$  و  $\{h_i\}_{i \in I}$  دو پایه ریس برای  $\mathcal{H}$  باشند و  $\{f_i\}_{i \in I}$  دنباله‌ای در  $\mathcal{H}$  باشد به طوری که برای هر  $j \in I$  داشته باشیم  $\sum_{i \in I} |\langle f_i, e_j \rangle|^2 < \infty$ . در این صورت، شرایط زیر برقرار هستند:

(الف) برای هر  $i \in I$  داریم:

$$f_i = \sum_{j \in I} \langle \omega_j^f, \tilde{h}_i \rangle \tilde{e}_j,$$

که در آن،  $\{\tilde{h}_i\}_{i \in I}$  به ترتیب دوگان‌های کانونی  $\{e_j\}_{j \in I}$  و  $\{h_i\}_{i \in I}$  هستند.

(ب)  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک  $R$ -دوگان  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  نسبت به  $\{\tilde{h}_i\}_{i \in I}$  و  $\{\tilde{e}_j\}_{j \in I}$  است.

**قضیه ۵.۲.** فرض کنیم  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک دنباله بسط با کران  $A$  باشد،  $\{h_i\}_{i \in I}$  و  $\{e_j\}_{j \in I}$  دو پایه ریس برای  $\mathcal{H}$  باشند و  $M$  را عملگر تعریف شده در (۱.۲) در نظر می‌گیریم. فرض کنیم  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  یک  $R$ -دوگان  $\{f_i\}_{i \in I}$  نسبت به  $\{h_i\}_{i \in I}$  و  $\{e_j\}_{j \in I}$  باشد. در این صورت،  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  یک دنباله بسط در  $\mathcal{H}$  است. علاوه بر این، گزاره‌های زیر معادل هستند:

(۱)  $R(M)$  (برد  $M$ ) بسته است و  $M$  یک‌به‌یک است.

(۲)  $M$  از پایین کران‌دار است.

(۳)  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک قاب برای  $\mathcal{H}$  است.

**قضیه ۶.۲.** فرض کنیم  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک دنباله بسط و  $\{h_i\}_{i \in I}$  یک پایه ریس برای  $\mathcal{H}$  باشد. در این صورت، عملگر مزدوج خطی  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} : M$  (تعریف شده در (۱.۲)) وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک پایه ریس باشد.

### ۳ نتایج اصلی

قضیه زیر یک ساختارسازی برای قاب بر حسب  $R$ -دوگان آن نسبت به پایه‌های ریس ارائه می‌دهد.

**قضیه ۱.۳.** فرض کنید  $\{h_i\}_{i \in I}$  و  $\{e_j\}_{j \in I}$  دو پایه ریس برای  $\mathcal{H}$  باشند و  $\{f_i\}_{i \in I}$  دنباله‌ای باشد به طوری که برای هر  $j \in I$  داشته باشیم  $\sum_{i \in I} |\langle f_i, e_j \rangle|^2 < \infty$ . همچنین فرض کنید  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  دنباله  $R$ -دوگان  $\{f_i\}_{i \in I}$  نسبت به پایه‌های ریس  $\{h_i\}_{i \in I}$  و  $\{e_j\}_{j \in I}$  باشد. در این صورت  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک قاب برای  $\mathcal{H}$  است اگر و فقط اگر  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  یک دنباله ریس برای  $\mathcal{H}$  باشد.

اثبات. فرض کنید  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک قاب برای  $\mathcal{H}$  باشد و  $M$  عملگر مزدوج خطی (۱.۲) باشد. در این صورت بنابر قضیه ۵.۲،  $M$  یک عملگر مزدوج خطی از پایین کران‌دار است. پس اعداد ثابت مثبت  $A_1$  و  $A_2$  وجود دارند به طوری که

$$A_1 \|f\|^2 \leq \|M(f)\|^2 \leq A_2 \|f\|^2 \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

فرض کنید  $A'_1 \leq A'_2 < \infty$  کران‌های ریس برای  $\{e_j\}_{j \in I}$  و  $\mathcal{F}$  یک زیرمجموعه متناهی از  $I$  باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j \in \mathcal{F}} a_j \omega_j^f \right\|^2 &= \left\| \sum_{j \in \mathcal{F}} a_j M(e_j) \right\|^2 = \left\| M\left(\sum_{j \in \mathcal{F}} \bar{a}_j e_j\right) \right\|^2 \\ &\leq A_2 \left\| \sum_{j \in \mathcal{F}} \bar{a}_j e_j \right\|^2 \\ &\leq A_2 A'_1 \sum_{j \in \mathcal{F}} |a_j|^2 \end{aligned}$$

در نتیجه  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  یک دنباله ریس برای  $\mathcal{H}$  است ( $A_1 A'_1$  کران پایین است).

برعکس، فرض کنید  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  یک دنباله ریس با کرانهای ریس  $0 < A_1 \leq A_2$  برای  $\mathcal{H}$  باشد. همچنین فرض کنید  $0 < B_1 \leq B_2$  و  $0 < C_1 \leq C_2$  به ترتیب کرانهای ریس برای  $\{e_i\}_{i \in I}$  و  $\{h_i\}_{i \in I}$  باشند. اگر  $f \in \text{span}\{e_k\}_{k \in I}$ ، آنگاه زیرمجموعه متناهی  $F$  از  $I$  و ثابتهای  $\{c_j : j \in F\}$  موجود هستند به طوری که  $f = \sum_{j \in F} c_j e_j$ . بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} |\langle f_i, f \rangle|^2 &= \sum_{i \in I} \left| \sum_{j \in F} \langle f_i, c_j e_j \rangle \right|^2 \leq \frac{1}{C_1} \left\| \sum_{i \in I} \sum_{j \in F} \langle f_i, c_j e_j \rangle h_i \right\|^2 \\ &= \frac{1}{C_1} \left\| \sum_{j \in F} \bar{c}_j \sum_{i \in I} \langle f_i, e_j \rangle h_i \right\|^2 \\ &= \frac{1}{C_1} \left\| \sum_{j \in F} \bar{c}_j \omega_j^f \right\|^2 \\ &\leq \frac{A_2}{C_1} \sum_{j \in F} |c_j|^2 \\ &\leq \frac{A_2}{B_1 C_1} \left\| \sum_{j \in F} c_j e_j \right\|^2 = \frac{A_2}{B_1 C_1} \|f\|^2. \end{aligned}$$

با اثباتی مشابه خواهیم داشت:

$$\sum_{i \in I} |\langle f_i, f \rangle|^2 \geq \frac{A_1}{B_2 C_2} \|f\|^2.$$

□

چون  $\overline{\text{span}\{e_k\}_{k \in I}} = \mathcal{H}$  نتیجه می شود  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک قاب برای  $\mathcal{H}$  است.

**قضیه ۲.۳.** فرض کنید  $\{h_i\}_{i \in I}$  و  $\{e_j\}_{j \in I}$  دو پایه ریس برای  $\mathcal{H}$  باشند و  $\{f_i\}_{i \in I}$  دنباله ای در  $\mathcal{H}$  باشد به طوری که برای هر  $j \in I$  داشته باشیم  $\sum_{i \in I} |\langle f_i, e_j \rangle|^2 < \infty$ . همچنین فرض کنید  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  دنباله  $R$ -دوگان  $\{f_i\}_{i \in I}$  نسبت به  $\{h_i\}_{i \in I}$  و  $\{e_j\}_{j \in I}$  باشد. در این صورت عبارتهای زیر معادل هستند:

۱.  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک پایه ریس برای  $\mathcal{H}$  است.

۲.  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  یک پایه ریس برای  $\mathcal{H}$  است.

اثبات. (۱)  $\Leftrightarrow$  (۲). فرض کنید  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک پایه ریس برای  $\mathcal{H}$  باشد. بنابر قضیه ۱.۳،  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  یک دنباله ریس برای  $\mathcal{H}$  است. برای کامل شدن برهان، کافی است ثابت کنیم  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  در  $\mathcal{H}$  کامل است. برای این منظور فرض کنید،  $h \in \mathcal{H}$  و برای هر  $j \in I$  داشته باشیم  $\langle h, \omega_j^f \rangle = 0$ . حال برای هر  $j \in I$  خواهیم داشت:

$$0 = \langle h, \omega_j^f \rangle = \left\langle h, \sum_{i \in I} \langle f_i, e_j \rangle h_i \right\rangle = \left\langle e_j, \sum_{i \in I} \langle h_i, h \rangle f_i \right\rangle.$$

چون  $\{e_i\}_{i \in I}$  در  $\mathcal{H}$  کامل است، پس  $\sum_{i \in I} \langle h_i, h \rangle f_i = 0$ . اما  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک پایه ریس برای  $\mathcal{H}$  است، در نتیجه برای هر  $i \in I$   $\langle h_i, h \rangle = 0$ . از کامل بودن  $\{h_i\}_{i \in I}$  نتیجه می شود  $h = 0$ .

(۱)  $\Leftrightarrow$  (۲). فرض کنید  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  یک پایه ریس برای  $\mathcal{H}$  باشد. بنابر قضیه ۱.۳،  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک قاب برای  $\mathcal{H}$  است. برای کامل کردن برهان، کافی است نشان دهیم اگر  $\{c_i\}_{i \in I} \in \ell^2(I)$  و  $\sum_{i \in I} c_i f_i = 0$ ، آنگاه برای هر  $i \in I$  داریم  $c_i = 0$ . از آنجایی که  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک دنباله بسل برای  $\mathcal{H}$  است، پس  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  نیز یک دنباله بسل برای  $\mathcal{H}$  است. بنابر ملاحظه ۳.۲،  $\{f_i\}_{i \in I} = \{M_1(\tilde{h}_i)\}_{i \in I}$  که  $M_1 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  به صورت زیر است:

$$M_1(g) = \sum_{j \in I} \langle \omega_j^f, g \rangle \tilde{e}_j. \quad (1.3)$$



از پیوستگی  $M_1$  نتیجه می‌شود

$$\sum_{i \in I} c_i f_i = M_1 \left( \sum_{i \in I} \tilde{c}_i \tilde{h}_i \right) = 0.$$

بنابر قضیه ۶.۲،  $M_1$  یک عملگر وارون‌پذیر است. بنابراین  $\sum_{i \in I} \tilde{c}_i \tilde{h}_i = 0$ . حال چون  $\{\tilde{h}_i\}_{i \in I}$  یک پایه ریس برای  $\mathcal{H}$  است، برای هر  $i \in I$  نتیجه می‌شود  $c_i = 0$ .  $\square$

**ملاحظه ۳.۳.** در قضیه ۲.۳، اگر  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک دنباله بسط باشد، می‌توانیم برهان ساده‌تری برای آن ارائه دهیم. چون  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک دنباله بسط برای  $\mathcal{H}$  است،  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  نیز یک دنباله بسط برای  $\mathcal{H}$  است. فرض کنید  $M_1$  عملگر مزدوج‌خطی تعریف‌شده در (۱.۳) باشد. برای هر  $g \in \mathcal{H}$  خواهیم داشت:

$$M_1(g) = \sum_{j \in I} \langle \omega_j^f, g \rangle \tilde{e}_j = \sum_{j \in I} \langle M(e_j), g \rangle \tilde{e}_j = \sum_{j \in I} \langle M^*(g), e_j \rangle \tilde{e}_j = M^*(g).$$

در نتیجه  $M_1 = M^*$ . بنابر قضیه ۶.۲،  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک پایه ریس برای  $\mathcal{H}$  است اگر و فقط اگر  $M_1$  یک عملگر وارون‌پذیر باشد. چون  $M_1 = M^*$  وارون‌پذیری  $M_1$  و  $M$  باهم معادل هستند. باز هم بنابر قضیه ۶.۲، وارون‌پذیری  $M$  معادل با این است که  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  یک پایه ریس برای  $\mathcal{H}$  است.

**مثال ۴.۳.** فرض کنید  $\{e_i\}_{i \in I}$  یک پایه متعامدیکه برای  $\mathcal{H}$  باشد. عملگر  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(e_j) = \begin{cases} 2e_j, & j = 2k, \\ e_j, & j = 2k + 1 \end{cases}$$

برای هر  $x \in \mathcal{H}$  رابطه زیر برقرار است:

$$\|x\| \leq \|Tx\| \leq 2\|x\|. \quad (2.3)$$

همچنین  $\overline{\text{span}\{T(e_i)\}_{i \in I}} = \mathcal{H}$ . پس دنباله  $\{f_i\}_{i \in I} = \{T(e_i)\}_{i \in I}$  یک پایه ریس برای  $\mathcal{H}$  است. اکنون پایه‌های ریس

$$\{z_i\}_{i \in I} = \{e_1, 2e_2, e_3, e_4, \dots\}$$

و

$$\{h_i\}_{i \in I} = \{2e_1, e_2, e_3, e_4, \dots\}$$

را در نظر بگیرید. با انجام محاسبات ساده‌ای می‌توان دید که دنباله  $R$ -دوگان  $\{f_i\}_{i \in I}$  بر حسب  $\{z_i\}_{i \in I}$  و  $\{h_i\}_{i \in I}$  دنباله

$$\{\omega_j^f\}_{j \in I} = \{2e_1, 6e_2, e_3, 2e_4, e_5, 2e_6, e_7, 2e_8, \dots\}$$

است که یک پایه ریس برای  $\mathcal{H}$  است.

**گزاره ۵.۳.** فرض کنید  $\{f_i\}_{i \in I}$  و  $\{g_i\}_{i \in I}$  دو دنباله بسط برای  $\mathcal{H}$  باشند و  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  و  $\{\omega_j^g\}_{j \in I}$  به ترتیب  $R$ -دوگان‌های  $\{f_i\}_{i \in I}$  و  $\{g_i\}_{i \in I}$  نسبت به پایه‌های ریس  $\{e_j\}_{j \in I}$  باشند. در این صورت  $R$ -دوگان  $\{f_i + g_i\}_{i \in I}$  نسبت به پایه‌های ریس  $\{h_i\}_{i \in I}$  و  $\{e_j\}_{j \in I}$  است.

اثبات.  $\{f_i + g_i\}_{i \in I}$  یک دنباله بسط برای  $\mathcal{H}$  است. زیرا کافی است ثابت کنیم عملگر ترکیب آن یک عملگر خطی کران‌دار از  $\ell^2(I)$  به  $\mathcal{H}$  است. برای این منظور فرض کنید  $A$  و  $B$  به ترتیب کران‌های بسط برای  $\{f_i\}_{i \in I}$  و  $\{g_i\}_{i \in I}$  باشند. برای هر  $\{c_k\} \in \ell^2(I)$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in I} c_k (f_k + g_k) \right\| &= \left\| \sum_{k \in I} c_k f_k + \sum_{k \in I} c_k g_k \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{k \in I} c_k f_k \right\| + \left\| \sum_{k \in I} c_k g_k \right\| \\ &\leq (\sqrt{A} + \sqrt{B}) \left( \sum_{k \in I} |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

بنابراین  $\{f_i + g_i\}_{i \in I}$  یک دنباله بسط برای  $\mathcal{H}$  است.  
 حال برای هر  $j \in I$  خواهیم داشت:

$$\sum_{i \in I} \langle f_i + g_i, e_j \rangle h_i = \sum_{i \in I} \langle f_i, e_j \rangle h_i + \sum_{i \in I} \langle g_i, e_j \rangle h_i = \omega_j^f + \omega_j^g.$$

□

در نتیجه حکم ثابت می شود.

**نتیجه ۶.۳.** با فرض های گزاره ۵.۳، نتایج زیر برقرار هستند:

(۱)  $\{f_i + g_i\}_{i \in I}$  یک قاب برای  $\mathcal{H}$  است اگر و فقط اگر  $\{\omega_j^f + \omega_j^g\}_{j \in I}$  یک دنباله ریس برای  $\mathcal{H}$  باشد.

(۲)  $\{f_i + g_i\}_{i \in I}$  یک پایه ریس برای  $\mathcal{H}$  است اگر و فقط اگر  $\{\omega_j^f + \omega_j^g\}_{j \in I}$  یک پایه ریس برای  $\mathcal{H}$  باشد.

**گزاره ۷.۳.** فرض کنید  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک دنباله بسط با کران  $A_1$  و عملگر قاب  $S_f$  باشد. همچنین فرض کنید  $\{e_j\}_{j \in I}$  و  $\{h_i\}_{i \in I}$  پایه های ریس برای  $\mathcal{H}$  باشند و عملگر  $M$  به صورت (۱.۲) تعریف شود. اگر  $R$ -دوگان دنباله  $\{f_i\}_{i \in I}$  نسبت به  $\{e_j\}_{j \in I}$  و  $\{h_j\}_{j \in I}$  باشد، در این صورت عبارتهای زیر برقرار هستند:

(۱) اگر  $\{e_j\}_{j \in I}$  یک پایه متعامدیکه برای  $\mathcal{H}$  باشد و  $S_\omega$  عملگر قاب  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  باشد، آنگاه  $MM^* = S_\omega$ .

(۲) اگر  $\{h_i\}_{i \in I}$  یک پایه متعامدیکه برای  $\mathcal{H}$  باشد، آنگاه  $M^*M = S_f$  و با فرض  $f = \sum_{j \in I} a_j e_j$  خواهیم داشت:

$$\left\| \sum_{j \in I} \bar{a}_j \omega_j^f \right\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle f, f_i \rangle|^2.$$

اثبات. برای هر  $f \in \mathcal{H}$  داریم:

$$\begin{aligned} S_\omega(f) &= \sum_{j \in I} \langle f, \omega_j^f \rangle \omega_j^f = \sum_{j \in I} \langle f, M(e_j) \rangle M(e_j) \\ &= M \left( \sum_{j \in I} \langle M(e_j), f \rangle e_j \right) \\ &= M \left( \sum_{j \in I} \langle M^* f, e_j \rangle e_j \right) = MM^* f. \end{aligned}$$

برای هر  $f \in \mathcal{H}$  داریم:

$$\begin{aligned} M^*M(f) &= \sum_{l \in I} \left\langle h_l, \sum_{i \in I} \langle f_i, f \rangle h_i \right\rangle f_l = \sum_{l \in I} \sum_{i \in I} \langle h_l, h_i \rangle \langle f, f_i \rangle f_l \\ &= \sum_{i \in I} \langle f, f_i \rangle f_i = S(f). \end{aligned}$$

بنابراین برای هر  $f \in \mathcal{H}$  رابطه زیر برقرار است:

$$\langle M^*M(f), f \rangle = \langle S(f), f \rangle.$$

در نتیجه

$$\|M(f)\|^2 = \langle S(f), f \rangle = \sum_{i \in I} |\langle f, f_i \rangle|^2.$$

اکنون اگر  $f = \sum_{j \in I} a_j e_j$  پیوستگی  $M$  نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j \in I} \bar{a}_j \omega_j^f \right\|^2 &= \left\| \sum_{j \in I} \bar{a}_j M(e_j) \right\|^2 = \left\| M \left( \sum_{j \in I} a_j e_j \right) \right\|^2 = \|M(f)\|^2 \\ &= \sum_{i \in I} |\langle f, f_i \rangle|^2. \end{aligned}$$

□

**لم ۸.۳.** فرض کنید  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک دنباله بسط برای  $\mathcal{H}$  با عملگر ترکیب  $T_f$  باشد. همچنین فرض کنید  $R$ -دوگان دنباله  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  نسبت به پایه‌های ریس  $\{e_j\}_{j \in I}$  و  $\{h_i\}_{i \in I}$  باشد. در این صورت  $h \in (\text{span}\{\omega_j^f : j \in I\})^\perp$  اگر و فقط اگر داشته باشیم  $\{\langle h_i, h \rangle\}_{i \in I} \in \ker T_f$ .

اثبات. برای هر  $j \in I$  خواهیم داشت:

$$\circ = \langle h, \omega_j^f \rangle = \langle h, M(e_j) \rangle = \langle e_j, M^*(h) \rangle = \left\langle e_j, \sum_{i \in I} \langle h_i, h \rangle f_i \right\rangle.$$

چون  $\{e_j\}_{j \in I}$  یک پایه ریس برای  $\mathcal{H}$  است، پس  $\overline{\text{span}\{e_i\}_{i \in I}} = \mathcal{H}$ . در نتیجه  $\langle e_j, \sum_{i \in I} \langle h_i, h \rangle f_i \rangle = \circ$  اگر و فقط اگر  $\sum_{i \in I} \langle h_i, h \rangle f_i = \circ$ .

□

**گزاره ۹.۳.** فرض کنید  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک دنباله قاب،  $\{e_j\}_{j \in I}$  یک پایه ریس و  $\{h_i\}_{i \in I}$  یک پایه متعامدیکه برای  $\mathcal{H}$  باشند. اگر  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  دنباله  $R$ -دوگان دنباله  $\{f_i\}_{i \in I}$  نسبت به  $\{e_j\}_{j \in I}$  و  $\{h_j\}_{j \in I}$  باشد، آنگاه  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  یک دنباله قاب برای  $\mathcal{H}$  است.

اثبات. چون  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک دنباله بسط نیز برای  $\mathcal{H}$  هست، پس بنابر قضیه ۵.۲،  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  یک دنباله بسط برای  $\mathcal{H}$  است. فرض کنید  $f \in \text{span}(\omega_j^f)_{j \in I}$ . چون  $\{h_i\}_{i \in I}$  یک پایه متعامدیکه برای  $\mathcal{H}$  است، پس بنابر لم ۸.۳ داریم  $\{\langle h_i, f \rangle\}_{i \in I} \in \ker T_f^\perp$ . فرض کنید  $D_\perp$  یک کران پایین قاب برای  $\{f_i\}_{i \in I}$  و  $B_\perp$  کران پایین ریس برای  $\{e_j\}_{j \in I}$  باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I} |\langle \omega_j^f, f \rangle|^2 &= \sum_{j \in I} |\langle M(e_j), f \rangle|^2 = \sum_{j \in I} |\langle M^*(f), e_j \rangle|^2 \\ &\geq B_\perp \|M^*(f)\|^2 = B_\perp \left\| \sum_{i \in I} \langle h_i, f \rangle f_i \right\|^2 \\ &\geq B_\perp D_\perp \sum_{i \in I} |\langle h_i, f \rangle|^2 = B_\perp D_\perp \|f\|^2. \end{aligned}$$

□

بنابراین  $\{\omega_j^f\}_{j \in I}$  یک دنباله قاب برای  $\mathcal{H}$  است.

## References

- [1] Casazza, P., Kutyniok, G., & Lammers, M.C. (2004). Duality principles in frame theory. *J. Fourier Anal. Appl.*, 10, 383–408. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00041-004-3024-7>.
- [2] Casazza, P., Kutyniok, G., & Lammers, M.C. (2005). Duality principle, localization of frames, and Gabor theory, Optics and photonics. *International Society for Optics and Photonics*. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.615440>.

- [3] Christensen, O., Kim, H.O., & Kim, R.Y. (2011). On the duality principle by Casazza, Kutyniok, and Lammers. *J. Fourier Anal. Appl.*, 17, 640–655. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00041-010-9151-4>.
- [4] Chuang, Z., & Zhao, J. (2015). On equivalent conditions of two sequences to be  $R$ -dual. *Journal of Inequalities and Applications*, 10, 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1186/s13660-014-0529-8>.
- [5] Daubechies, I., Grossmann, A., & Meyer, Y. (1986). Painless nonorthogonal expansions. *J. Math. Phys.*, 27, 1271–1286. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.527388>.
- [6] Duffin, R.J., & Schaeffer, A.C. (1952). A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Am. Math. Soc.*, 72, 341–366. DOI: <https://doi.org/10.2307/1990760>.
- [7] Feichtinger, H.G., & Grochenig, K. (1997). Gabor frames and Time-Frequency Analysis of Distributions. *Journal of Functional Analysis*, 146, 464–495. DOI: <https://doi.org/10.1006/jfan.1996.3078>.
- [8] Folland, G.B. (1994). A Course in Abstract Harmonic Analysis. *CRC Press*. DOI: <https://doi.org/10.1201/b19172>.
- [9] Gabor, D. (1946). Theory of communications. *J. Inst. Elec. Eng.*, 93, 429–457.
- [10] Gröchenig, K. (2001). Foundation of time-frequency analysis. *Birkhäuser, Boston*. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0003-1>.
- [11] Ron, A., & Shen, Z. (1997). Weyl-Heisenberg frames and Riesz bases in  $L_2(\mathbb{R})$ . *Duke Math. J.*, 89, 237–282. DOI: <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-97-08913-4>.
- [12] Stoeva, D.T., & Christensen, O. (2015). On  $R$ -duals and the duality principle in Gabor analysis. *J. Fourier Anal. Appl.*, 21, 383–400. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00041-014-9376-8>.
- [13] Takhteh, F. (2023). Some results on  $R$ -duals in Hilbert spaces. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 13–21. DOI: <http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9523.1008>.
- [14] Wexler, J., & Raz, S. (1990). Discrete Gabor expansions. *Signal Proc.*, 21, 207–220. DOI: [https://doi.org/10.1016/0165-1684\(90\)90087-F](https://doi.org/10.1016/0165-1684(90)90087-F).
- [15] Xiao, X.M., & Zhu, Y.C. (2009). Duality principle of frames in Banach spaces. *Acta. Math. Sci. Ser. A. Chin.*, 29, 94–102.