



Is the space of Holder functions predual of L^1 ?

Azin Golbaharan¹ 

1. Kharazmi University, Tehran, Iran. Email: golbaharan@khu.ac.ir

Article Info

ABSTRACT

Article type:

Research Article

Article history:

Received: 01 March 2024

Received in revised form:

07 May 2024

Accepted: 21 June 2024

Published Online:

20 August 2024

Keywords:

Lipschitz function,

Little Lipschitz space,

Holder function space,

$L^1(\mu)$

Let (X, d) be a compact pointed metric space. In this paper, we investigate the condition on the underlying metric space (X, d) which implies that the little Lipschitz space on (X, d) is predual of $L^1(\mu)$. Then, we conclude that the space of Holder functions on every compact pointed space, and for each $0 < \alpha < 1$ is not predual of $L^1(\mu)$.

2020 Mathematics Subject

Classification:

47B33, 46J10

Cite this article: Golbaharan, A. (2024). Is the space of Holder functions predual of L^1 ?. *Measure Algebras and Applications*, 1(2), 85–91. <http://doi.org/10.22091/MAA.2024.10469.1015>



©The Author(s).

Publisher: University of Qom

DOI: 10.22091/MAA.2024.10469.1015

Extended Abstract

Introduction

A metric space (X, d) is pointed if it carries a distinguished element or base point e . Let (X, d_X) and (Y, d_Y) be metric spaces. A map $f : X \rightarrow Y$ is Lipschitz if

$$\mathbf{L}(f) = \sup_{\substack{x, x' \in X \\ x \neq x'}} \frac{d_Y(f(x), f(x'))}{d_X(x, x')} < \infty. \quad (0.1)$$

Suppose that (X, d) is a compact pointed metric space. The collection of all Lipschitz functions $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ with $f(e) = 0$ is called Lipschitz space and is denoted by $\text{Lip}_0(X)$. The usual norm on $\text{Lip}_0(X)$ is defined by (0.1) which gives a Banach space. The little Lipschitz space, $\text{lip}_0(X)$, is the closed subspace of $\text{Lip}_0(X)$ consists of all functions $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ such that

$$\lim_{d(x, x') \rightarrow 0} \frac{|f(x) - f(x')|}{d(x, x')} = 0.$$

We say that $\text{lip}_0(X)$ separates the points of X uniformly if there exists a constant $c > 1$ such that for every $x, y \in X$, some $f \in \text{lip}_0(X)$ satisfies $\mathbf{L}(f) \leq c$ and $|f(x) - f(y)| = d(x, y)$. In the general case, it is possible that $\text{lip}_0(X)$ does not separate points of X uniformly. For each constant $0 < \alpha < 1$ and metric space (X, d) , we denote by X^α the same set together with the metric d^α and call it Holder metric space. The Holder space, $\text{lip}_0(X^\alpha)$ separates the points of X uniformly.

Let (X, d) be a metric space. A molecule of X is a function $m : X \rightarrow \mathbb{C}$ which is supported on a finite set and which satisfies $\sum_{x \in X} m(x) = 0$. For $x, y \in X$ define the molecule m_{xy} by $m_{xy} = \chi_x - \chi_y$. We denote the set of molecules on X by $\mathfrak{m}(X)$ and give it the norm

$$\|m\|_{\text{AE}} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^k |a_i| d(x_i, y_i) : m = \sum_{i=1}^k a_i m_{x_i y_i} \right\}$$

and we let $\text{AE}(X)$ be the completion of the space of molecules on X .

We examine the condition on the underlying metric space (X, d) which implies that $\text{lip}_0(X^\alpha)^* = L^1(\mu)$ for some measure μ on X . Then we conclude that the space of Holder functions on every compact pointed space is not predual of $L^1(\mu)$.

Conclusion

In this paper, the next theorem and corollary are presented:

Theorem 0.1. *Let (X, d) be a compact pointed metric space. The little Lipschitz space, $\text{lip}_0(X)$ is predual of $L^1(\mu)$ and $\frac{1}{d(x, e)} m_{xe}$ is an extreme point of the closed unit ball of $\text{lip}_0(X)^*$ for all $x \in X \setminus \{e\}$ if and only if for each $x, y \in X$, $d(x, y) = d(x, e) + d(e, y)$.*

Corollary 0.2. *The space of Holder functions on a compact pointed metric space with at least two distinct points of base point is not predual of L^1 .*



آیا فضای توابع هلدر پیش‌دوگان L^1 است؟

آذین گل‌بهاران^۱

۱. دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. رایانامه: golbaharan@khu.ac.ir

چکیده	اطلاعات مقاله
	نوع مقاله: مقاله پژوهشی
	تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۱۱ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۲/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۴/۱ تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۵/۳۰
فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک فشرده شامل یک نقطه پایه‌ای باشد. در این مقاله بررسی می‌کنیم تحت چه شرطی روی فضای متریک زمینه (X, d) فضای لیپ‌شیتس کوچک، $\text{lip}_\alpha(X)$ ، پیش‌دوگان $L^1(\mu)$ است. سپس نتیجه می‌گیریم فضای توابع هلدر بر هر فضای متریک فشرده نقطه‌ای و هر $0 < \alpha < 1$ ، پیش‌دوگان $L^1(\mu)$ نیست.	کلمات کلیدی: تابع لیپ‌شیتس، فضای لیپ‌شیتس کوچک، فضای توابع هلدر، $L^1(\mu)$
	رده‌بندی ریاضی: 47B33, 46J10

استناد: گل‌بهاران، آذین. (۱۴۰۳). آیا فضای توابع هلدر پیش‌دوگان L^1 است؟. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۲)، ۸۵-۹۱.
<http://doi.org/10.22091/MAA.2024.10469.1015>



ناشر: دانشگاه قم.
© نویسندگان.

۱ مقدمه

اگر فضای متریک (X, d) حاوی یک نقطه متمایز باشد آن را فضای متریک نقطه‌ای گوئیم و نقطه متمایز آن را نقطه پایه‌ای نامیم. فرض کنیم (X, d_X) و (Y, d_Y) فضاهای متریک باشند. تابع $f: X \rightarrow Y$ را لپ‌شیتس نامیم هرگاه

$$\mathbf{L}(f) = \sup_{\substack{x, x' \in X \\ x \neq x'}} \frac{d_Y(f(x), f(x'))}{d_X(x, x')} < \infty. \quad (1.1)$$

فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک نقطه‌ای با نقطه پایه‌ای e باشد. گردایه تمام توابع لپ‌شیتس $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ را که $f(e) = 0$ فضای لپ‌شیتس نامیده و با نماد $\text{Lip}_0(X)$ نمایش می‌دهیم. تابع $\mathbf{L}(\cdot)$ در (۱.۱)، یک نرم روی $\text{Lip}_0(X)$ تعریف می‌کند که آن را تبدیل به یک فضای باناخ می‌کند. فضای لپ‌شیتس کوچک، $\text{lip}_0(X)$ ، زیرفضای بسته $\text{Lip}_0(X)$ متشکل از همه توابع $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ است که

$$\lim_{d(x, x') \rightarrow 0} \frac{|f(x) - f(x')|}{d(x, x')} = 0.$$

گوئیم فضای لپ‌شیتس کوچک نقاط X را به‌طور یکنواخت جدا می‌کند هرگاه ثابت $c > 1$ یافت شود که به‌ازای هر $x, y \in X$ تابع $f \in \text{lip}_0(X)$ ، با خاصیت $\mathbf{L}(f) \leq c$ و $|f(x) - f(y)| = d(x, y)$ موجود باشد. در حالت کلی ممکن است فضای لپ‌شیتس کوچک نقاط X را جدا نکند. به‌عنوان نمونه به‌ازای فضای متریک $X = [0, 1]$ مجهز به متر اقلیدسی، $\text{lip}_0(X)$ فقط شامل تابع ثابت صفر خواهد بود. به‌ازای ثابت $0 < \alpha < 1$ و فضای متریک (X, d) ساختار (X, d^α) مجدداً یک فضای متریک است که آن را فضای هلدر می‌نامیم و به‌اختصار با X^α نمایش می‌دهیم. به‌علاوه $\text{lip}_0(X^\alpha)$ فضای توابع هلدر نامیده می‌شود و همواره نقاط X را به‌طور یکنواخت جدا می‌کند. تابع اسکالر-مقدار m روی فضای متریک (X, d) که دارای تکیه‌گاه متناهی است و $\sum_{x \in X} m(x) = 0$ ، یک ملکول نام دارد. فضای همه ملکول‌های روی X را با $\mathfrak{A}(X)$ نمایش می‌دهیم و نرم زیر را روی آن در نظر می‌گیریم.

$$\|m\|_{\text{AE}} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^k |a_i| d(x_i, y_i) : m = \sum_{i=1}^k a_i m_{x_i y_i} \right\}$$

که در آن به‌ازای هر $x, y \in X$ ، $m_{xy} = \chi_x - \chi_y$ ، فضای ارنس-ایلز، $\text{AE}(X)$ ، عبارت است از کامل‌شده فضای نرم‌دار $(\mathfrak{A}(X), \|\cdot\|_{\text{AE}})$. در صورتی که (X, d) یک فضای متریک نقطه‌ای فشرده باشد و $\text{lip}_0(X)$ نقاط X را به‌طور یکنواخت جدا کند، $\text{lip}_0(X)^* = \text{AE}(X)$ (قضیه ۳.۳.۳ در [۱]). یک فضای باناخ، پیش‌دوگان $L^1(\mu)$ نامیده می‌شود، هرگاه بین دوگان نرمی آن و $L^1(\mu)$ ، یک عملگر خطی، پوشا و طول‌پا موجود باشد. می‌دانیم که فضای $L^1(\mu)$ پیش‌دوگان یگانه ندارد و از دیرباز این پرسش که آیا یک فضای باناخ معین پیش‌دوگان $L^1(\mu)$ است، موضوع پژوهش‌های ریاضی متعددی بوده است. در این مقاله نخست در قضیه‌ای ارتباط بین پاسخ این پرسش درباره فضای لپ‌شیتس کوچک و ساختار فضای متریک زمینه را بیان می‌کنیم. سپس نتیجه می‌گیریم فضای توابع هلدر بر هر فضای متریک نقطه‌ای فشرده پیش‌دوگان $L^1(\mu)$ نیست.

۲ نتایج اصلی

در خلال اثبات قضیه اصلی، به نکته‌ای که در گزاره زیر مطرح می‌شود نیاز داریم.

ملاحظه ۱.۲. اگر f نقطه اکستریم گوی یک $L^1(\mu)$ باشد، آنگاه تکیه‌گاه f یک اتم در فضای اندازه (X, μ) است. زیرا در غیر این صورت $E \subset \text{supp}(f)$ یافت می‌شود که $0 < \mu(E) < \mu(\text{supp}(f))$ و با در نظر گرفتن $t = \int_E |f| d\mu \in (0, 1)$ ، داریم $\| \frac{1}{t} f \chi_E \|_1 = 1$ و $\| \frac{1}{1-t} f \chi_{\text{supp}(f) \setminus E} \|_1 = 1$ ، به‌علاوه $f = t(\frac{1}{t} f \chi_E) + (1-t)(\frac{1}{1-t} f \chi_E)$ که با اکستریم بودن f در تناقض است.

اکنون می‌توانیم قضیه اصلی مقاله را به شرح زیر ارائه دهیم.

قضیه ۲.۲. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک فشرده و e نقطه پایه‌ای آن باشد. فضای لپ‌شیتس کوچک، $\text{lip}_0(X)$ ، پیش‌دوگان $L^1(\mu)$ و برای همه نقاط $x \in X \setminus \{e\}$ نقطه اکستریم گوی یک $\text{lip}_0(X)^*$ است اگر و تنها اگر به‌ازای هر دو نقطه متمایز $x, y \in X$ ، $d(x, y) = d(x, e) + d(e, y)$.

اثبات. ابتدا فرض کنیم μ یک اندازه مثبت روی X و

$$T : \text{lip}_\circ(X)^* \rightarrow L^1(\mu)$$

یکریختی طول‌پا باشد. به‌علاوه فرض کنیم

$$\left\{ \frac{1}{d(x,e)} m_{xe} : x \in X, x \neq e \right\} \subseteq \text{ext}(\text{lip}_\circ(X)^*).$$

به‌ازای هر $x \in X$ چون T یکریختی طول‌پا است و $\frac{1}{d(x,e)} m_{xe} \in \text{ext}(\text{lip}_\circ(X)^*)$ داریم $T(\frac{1}{d(x,e)} m_{xe}) \in \text{ext}(L^1(\mu))$ بنا بر ملاحظه ۱.۲ تکیه‌گاه $T(m_{xe})$ یک اتم در فضای اندازه (X, μ) است و از آنجا که $\|T(\frac{1}{d(x,e)} m_{xe})\|_1 = 1$ اتم $E_x \subseteq X$ وجود دارد که

$$T\left(\frac{1}{d(x,e)} m_{xe}\right) = \frac{1}{\mu(E_x)} \chi_{E_x} \quad (a.e.).$$

روشن است که چون T یکریختی است، به‌ازای هر $x, y \in X$ اگر $x \neq y$ آنگاه E_x و E_y متمایز و در نتیجه مجزا هستند. به‌این ترتیب به‌ازای هر دو نقطه متمایز $x, y \in X \setminus \{e\}$

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|m_{xy}\|_{AE} \\ &= \|T(m_{xy})\|_1 \\ &= \|T(m_{xe}) - T(m_{ye})\|_1 \\ &= \left\| \frac{d(x,e)}{\mu(E_x)} \chi_{E_x} - \frac{d(y,e)}{\mu(E_y)} \chi_{E_y} \right\|_1 \\ &= \int_X \left| \frac{d(x,e)}{\mu(E_x)} \chi_{E_x} - \frac{d(y,e)}{\mu(E_y)} \chi_{E_y} \right| d\mu \\ &= \int_X \frac{d(x,e)}{\mu(E_x)} \chi_{E_x} + \frac{d(y,e)}{\mu(E_y)} \chi_{E_y} d\mu \\ &= d(x,e) + d(e,y). \end{aligned}$$

برعکس، فرض کنیم

$$d(x,y) = d(x,e) + d(e,y) \quad (x,y \in X, x \neq y).$$

اندازه μ را روی X به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mu : P(X) \rightarrow [0, \infty]; \quad \mu(E) = \begin{cases} \sum_{x \in E} d(x,e) & E \neq \emptyset \\ 0 & E = \emptyset \end{cases}$$

به‌ازای هر $m \in \mathfrak{M}(X)$ بنا بر تعریف، $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ وجود دارند که $m(X) = \{z_1, \dots, z_n\} \cup \{0\}$ و $z_1 + \dots + z_n = 0$. به‌علاوه، اگر به‌ازای هر $i \in \{1, \dots, n\}$ قرار دهیم $E_i = m^{-1}(z_i)$ داریم $\bigcup_{i=1}^n E_i$ زیرمجموعه متناهی X است و $m = \sum_{i=1}^n z_i \chi_{E_i}$ بنا بر این

$$\begin{aligned} \|m\|_1 &= \int_X |m| d\mu = \sum_{i=1}^n |z_i| \mu(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n |z_i| \left(\sum_{x \in E_i} d(x,e) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{x \in E_i} |z_i| d(x,e) \end{aligned}$$

و از طرف دیگر

$$m = \sum_{i=1}^n z_i \chi_{E_i} = \sum_{i=1}^n z_i \sum_{x \in E_i} \chi_x = \sum_{i=1}^n \sum_{x \in E_i} z_i m_{xe}$$

لذا

$$\|m\|_{\text{AE}} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{x \in E_i} |z_i| d(x, e) \leq \|m\|_1. \quad (۱.۲)$$

برای اثبات نامساوی بالا در جهت عکس، $\epsilon > 0$ را دلخواه در نظر بگیریم. بنابر تعریف نرم $\|\cdot\|_{\text{AE}}$ ، برای $m \in \mathfrak{ae}(X)$ نقاط $m = \sum_{i=1}^k a_i m_{p_i q_i}$ و اعداد a_1, \dots, a_k در \mathbb{C} یافت می‌شوند که

$$\sum_{i=1}^k |a_i| d(p_i, q_i) < \|m\|_{\text{AE}} + \epsilon.$$

سپس خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \|m\|_1 &= \int_X \left| \sum_{i=1}^k a_i m_{p_i q_i} \right| d\mu \\ &\leq \sum_{i=1}^k |a_i| \int_X |m_{p_i q_i}| d\mu \\ &= \sum_{i=1}^k |a_i| \int_X \chi_{p_i} + \chi_{q_i} d\mu \\ &\leq \sum_{i=1}^k |a_i| (\mu(\{p_i\}) + \mu(\{q_i\})) \\ &\leq \sum_{i=1}^k |a_i| (d(p_i, e) + d(q_i, e)) \\ &= \sum_{i=1}^k |a_i| d(p_i, q_i) \\ &< \|m\|_{\text{AE}} + \epsilon. \end{aligned}$$

به این ترتیب نتیجه می‌گیریم

$$\|m\|_1 \leq \|m\|_{\text{AE}}. \quad (۲.۲)$$

بر اساس (۱.۲) و (۲.۲)، نگاشت همانی $I : \mathfrak{ae}(X) \rightarrow L^1(\mu)$ یک عملگر خطی طول‌پا و به‌ویژه پیوسته یکنواخت است. لذا دارای یک گسترش پیوسته به کامل‌شده $\mathfrak{ae}(X)$ یعنی $\text{AE}(X)$ است که آن را با \tilde{I} نمایش می‌دهیم. عملگر \tilde{I} خاصیت طول‌پایی را حفظ می‌کند، زیرا به‌ازای هر $m \in \text{AE}(X)$ دنباله‌ای از اعضای $\mathfrak{ae}(X)$ مانند $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ موجود است که نسبت به نرم $\|\cdot\|_{\text{AE}}$ به m میل می‌کند و خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \|m\|_{\text{AE}} &= \lim_{i \rightarrow \infty} \|m_i\|_{\text{AE}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \|\tilde{I}(m_i)\|_1 \\ &= \|\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{I}(m_i)\|_1 = \|\tilde{I}(m)\|_1. \end{aligned}$$

توجه کنیم که طول‌پایی \tilde{I} بسته بودن برد آن را ایجاب می‌کند در ادامه نشان می‌دهیم \tilde{I} پوشا نیز هست. به‌ازای هر $E \subseteq X$ با شرط $\mu(E) < \infty$ داریم $\sum_{x \in E} d(x, e) = \mu(E) < \infty$ لذا مجموعه E حداکثر شمارش‌پذیر است. پس می‌توان نوشت

بنابراین در فضای $AE(X)$ سری $\sum_{n \in \mathbb{N}} m_{x_n e}$ همگرای مطلق و در نتیجه همگرا است، لذا $\chi_E = \sum_{n \in \mathbb{N}} m_{x_n e}$ متعلق به $AE(X)$ است. به‌ویژه

$$\tilde{I}(\chi_E) = \tilde{I}\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} m_{x_n e}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{I}(m_{x_n e}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} I(m_{x_n e}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m_{x_n e} = \chi_E$$

بنابراین زیرفضای توابع پله‌ای که در $L^1(\mu)$ چگال است مشمول در زیرفضای بسته $\tilde{I}(AE(X))$ از $L^1(\mu)$ است که پوشایی \tilde{I} را ایجاد می‌کند. در انتها به‌ازای هر $x_0 \in X \setminus \{e\}$ به‌ازای $r_{x_0} = d(x_0, e) > 0$ داریم $B(x_0, r_{x_0}) \cap X = \{x_0\}$ و در نتیجه $\chi_{x_0} \in \text{lip}_0(X)$ به‌علاوه با به کار بردن قضیه ۳.۳۱ در [۱] برای تابع $f_{x_0} = d(x_0, e)\chi_{x_0}$ نتیجه می‌گیریم $\frac{1}{d(x_0, e)}m_{x_0 e}$ یک نقطه اکستریم از گوی $\text{lip}_0(X)^* = AE(X)$ است. \square

پاسخ به پرسش اصلی مقاله در نتیجه زیر بیان می‌شود.

نتیجه ۳.۲. فضای توابع هلدر روی یک فضای متریک نقطه‌ای فشرده با حداقل دو نقطه متمایز از نقطه پایه‌ای، پیش‌دوگان $L^1(\mu)$ نیست.

اثبات. فرض خلف بگیریم فضای توابع هلدر روی فضای متریک نقطه‌ای فشرده (X, d) ، که حداقل دو نقطه متمایز از نقطه پایه‌ای دارد، پیش‌دوگان $L^1(\mu)$ است. توجه کنیم که با یک بررسی مقدماتی چون $0 < \alpha < 1$ ، به‌ازای هر سه نقطه متمایز $x, y, z \in X$ داریم

$$d(x, z)^\alpha < d(x, y)^\alpha + d(y, z)^\alpha.$$

از این‌رو از گزاره ۳.۳۴ در [۱] و قضیه ۳.۳۹ در [۱] نتیجه می‌گیریم

$$\left\{ \frac{1}{d(x, e)} m_{x e} : x \in X, x \neq e \right\} \subseteq \text{ext}(\text{lip}_0(X^\alpha)^*).$$

لذا بنابر قضیه بالا،

$$d(x, y)^\alpha = d(x, e)^\alpha + d(e, y)^\alpha \quad (x, y \in X, x \neq y),$$

که ایجاد می‌کند $d(x, e) = 0$ یا $d(y, e) = 0$ در واقع نتیجه می‌گیریم X حداکثر یک نقطه متمایز از e دارد که با فرض در تناقض است. \square

با به کار بردن نتیجه ۳.۳۲ در [۱] به‌جای قضیه ۳.۳۹ در [۱] در برهان نتیجه اخیر، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۴.۲. اگر X یک فضای متریک نقطه‌ای فشرده با حداقل دو نقطه متمایز از نقطه پایه‌ای و قطر حداکثر دو باشد، آنگاه $\text{lip}_0(X)$ پیش‌دوگان $L^1(\mu)$ است اگر و تنها اگر

$$d(x, y) = d(x, e) + d(e, y) \quad (x, y \in X, x \neq y).$$

References

- [1] Weaver, N. (2018). Lipschitz Algebras (Second Edition). *World Scientific, Singapore.*