Measure Algebras and Applications

Is the space of Holder functions predual of L^1?

Azin Golbaharan[1]

1. Kharazmi University, Tehran, Iran. Email: golbaharan@khu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 01 March 2024
Received in revised form:
07 May 2024
Accepted: 21 June 2024
Published Online:
20 August 2024

Keywords:
Lipschitz function,
Little Lipschitz space,
Holder function space,
$\mathrm{L}^1(\mu)$

2020 Mathematics Subject Classification:
47B33, 46J10

ABSTRACT

Let (X, d) be a compact pointed metric space. In this paper, we investigate the condition on the underlying metric space (X, d) which implies that the little Lipschitz space on (X, d) is predual of $\mathrm{L}^1(\mu)$. Then, we conclude that the space of Holder functions on every compact pointed space, and for each $0 < \alpha < 1$ is not predual of $\mathrm{L}^1(\mu)$.

Cite this article: Golbaharan, A. (2024). Is the space of Holder functions predual of L^1?. *Measure Algebras and Applications*, 2(1), 85–91. http://doi.org/10.22091/MAA.2024.10469.1015

Publisher: University of Qom

DOI: 10.22091/MAA.2024.10469.1015

Extended Abstract

Introduction

A metric space (X, d) is pointed if it carries a distinguished element or base point e. Let (X, d_X) and (Y, d_Y) be metric spaces. A map $f : X \to Y$ is Lipschitz if

$$\mathbf{L}(f) = \sup_{\substack{x,x' \in X \\ x \neq x'}} \frac{d_Y(f(x), f(x'))}{d_X(x, x')} < \infty. \tag{0.1}$$

Suppose that (X, d) is a compact pointed metric space. The collection of all Lipschitz functions $f : X \to \mathbb{C}$ with $f(e) = 0$ is called Lipschitz space and is denoted by $\mathrm{Lip}_0(X)$. The usual norm on $\mathrm{Lip}_0(X)$ is defined by (0.1) which gives a Banach space. The little Lipschitz space, $\mathrm{lip}_0(X)$, is the closed subspace of $\mathrm{Lip}_0(X)$ consists of all functions $f : X \to \mathbb{C}$ such that

$$\lim_{d(x,x') \to 0} \frac{|f(x) - f(x')|}{d(x, x')} = 0.$$

We say that $\mathrm{lip}_0(X)$ separates the points of X uniformly if there exists a constant $c > 1$ such that for every $x, y \in X$, some $f \in \mathrm{lip}_0(X)$ satisfies $\mathbf{L}(f) \leq c$ and $|f(x) - f(y)| = d(x, y)$. In the general case, it is possible that $\mathrm{lip}_0(X)$ does not separate points of X uniformly. For each constant $0 < \alpha < 1$ and metric space (X, d), we denote by X^α the same set together with the metric d^α and call it Holder metric space. The Holder space, $\mathrm{lip}_0(X^\alpha)$ separates the points of X uniformly.

Let (X, d) be a metric space. A molecule of X is a function $m : X \to \mathbb{C}$ which is supported on a finite set and which satisfies $\sum_{x \in X} m(x) = 0$. For $x, y \in X$ define the molecule m_{xy} by $m_{xy} = \chi_x - \chi_y$. We denote the set of molecules on X by $æ(X)$ and give it the norm

$$\|m\|_{\mathrm{AE}} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} |a_i| d(x_i, y_i) : m = \sum_{i=1}^{k} a_i m_{x_i y_i} \right\}$$

and we let $AE(X)$ be the completion of the space of molecules on X.

We examine the condition on the underlying metric space (X, d) which implies that $\mathrm{lip}_0(X^\alpha)^* = \mathrm{L}^1(\mu)$ for some measure μ on X. Then we conclude that the space of Holder functions on every compact pointed space is not predual of $\mathrm{L}^1(\mu)$.

Conclusion

In this paper, the next theorem and corollary are presented:

***Theorem* 0.1.** *Let (X, d) be a compact pointed metric space. The little Lipschitz space,* $\mathrm{lip}_0(X)$ *is predual of* $\mathrm{L}^1(\mu)$ *and* $\frac{1}{d(x,e)} m_{xe}$ *is an extreme point of the closed unit ball of* $\mathrm{lip}_0(X)*$ *for all $x \in X \setminus \{e\}$ if and only if for each $x, y \in X$, $d(x, y) = d(x, e) + d(e, y)$.*

***Corollary* 0.2.** *The space of Holder functions on a compact pointed metric space with at least two distinct points of base point is not predual of* L^1.

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۳، دوره ۲، شماره ۱، ص ۹۱-۸۵

آیا فضای توابع هلدر پیش‌دوگان L^{1} است؟

آذین گل‌بهاران [۱]

۱. دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. رایانامه: golbaharan@khu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۱۱
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۲/۱۸
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۴/۱
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۵/۳۰

کلمات کلیدی:
تابع لیپ‌شیتس،
فضای لیپ‌شیتس کوچک،
فضای توابع هلدر،
$\mathrm{L}^{1}(\mu)$

رده‌بندی ریاضی:
47B33, 46J10

چکیده

فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک فشرده شامل یک نقطهٔ پایه‌ای باشد. در این مقاله بررسی می‌کنیم تحت چه شرطی روی فضای متریک زمینهٔ (X,d) فضای لیپ‌شیتس کوچک، $\mathrm{lip}_{\circ}(X)$، پیش‌دوگان $\mathrm{L}^{1}(\mu)$ است. سپس نتیجه می‌گیریم فضای توابع هلدر بر هر فضای متریک فشردهٔ نقطه‌ای و هر $\circ < \alpha < ۱$، پیش‌دوگان $\mathrm{L}^{1}(\mu)$ نیست.

استناد: گل‌بهاران، آذین. (۱۴۰۳). آیا فضای توابع هلدر پیش‌دوگان L^{1} است؟. جبرهای اندازه و کاربردها، ۲(۱)، ۹۱-۸۵.
http://doi.org/10.22091/MAA.2024.10469.1015

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

اگر فضای متریک (X,d) حاوی یک نقطهٔ متمایز باشد آن را فضای متریک نقطه‌ای گوییم و نقطهٔ متمایز آن را نقطهٔ پایه‌ای نامیم. فرض کنیم (X,d_X) و (Y,d_Y) فضاهای متریک باشند. تابع $f:X\to Y$ را لیپ‌شیتس نامیم هرگاه

$$\mathbf{L}(f)=\sup_{\substack{x,x'\in X\\ x\neq x'}}\frac{d_Y(f(x),f(x'))}{d_X(x,x')}<\infty. \qquad (۱.۱)$$

فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک نقطه‌ای با نقطهٔ پایه‌ای e باشد. گردایهٔ تمام توابع لیپ‌شیتس $f:X\to\mathbb{C}$ را که $f(e)=0$ فضای لیپ‌شیتس نامیده و با نماد $\mathrm{Lip}_0(X)$ نمایش می‌دهیم. تابع $\mathbf{L}(\cdot)$ در (۱.۱)، یک نرم روی $\mathrm{Lip}_0(X)$ تعریف می‌کند که آن را تبدیل به یک فضای باناخ می‌کند. فضای لیپ‌شیتس کوچک، $\mathrm{lip}_0(X)$، زیرفضای بستهٔ $\mathrm{Lip}_0(X)$ متشکل از همهٔ توابع $f:X\to\mathbb{C}$ است که

$$\lim_{d(x,x')\to 0}\frac{|f(x)-f(x')|}{d(x,x')}=0.$$

گوییم فضای لیپ‌شیتس کوچک نقاط X را به‌طور یکنواخت جدا می‌کند هرگاه ثابت $c>1$ یافت شود که به‌ازای هر $x,y\in X$، تابع $f\in\mathrm{lip}_0(X)$، با خاصیت $\mathbf{L}(f)\le c$ و $|f(x)-f(y)|=d(x,y)$ موجود باشد. در حالت کلی ممکن است فضای لیپ‌شیتس کوچک نقاط X را جدا نکند. به‌عنوان نمونه به‌ازای فضای متریک $X=[0,1]$ مجهز به متر اقلیدسی، $\mathrm{lip}_0(X)$ فقط شامل تابع ثابت صفر خواهد بود. به‌ازای ثابت $0<\alpha<1$ و فضای متریک (X,d) ساختار (X,d^α) مجدداً یک فضای متریک است که آن را فضای هلدر می‌نامیم و به‌اختصار با X^α نمایش می‌دهیم. به‌علاوه $\mathrm{lip}_0(X^\alpha)$ فضای توابع هلدر نامیده می‌شود و همواره نقاط X را به‌طور یکنواخت جدا می‌کند. تابع اسکالر-مقدار m روی فضای متریک (X,d) که دارای تکیه‌گاه متناهی است و $\sum_{x\in X}m(x)=0$، یک ملکول نام دارد. فضای همهٔ ملکول‌های روی X را با $\text{\ae}(X)$ نمایش می‌دهیم و نرم زیر را روی آن در نظر می‌گیریم.

$$\|m\|_{\mathrm{AE}}=\inf\left\{\sum_{i=1}^{k}|a_i|d(x_i,y_i):m=\sum_{i=1}^{k}a_im_{x_iy_i}\right\}$$

که در آن به‌ازای هر $x,y\in X$، $m_{xy}=\chi_x-\chi_y$. فضای ارنس-ایلز، $\mathrm{AE}(X)$، عبارت است از کامل‌شدهٔ فضای نرم‌دار $(\text{\ae}(X),\|\cdot\|_{\mathrm{AE}})$. درصورتی‌که (X,d) یک فضای متریک نقطه‌ای فشرده باشد و $\mathrm{lip}_0(X)$ نقاط X را به‌طور یکنواخت جدا کند، $\mathrm{lip}_0(X)^*=\mathrm{AE}(X)$ (قضیه ۳.۳.۳ در [۱]). یک فضای باناخ، پیش‌دوگان $\mathrm{L}^1(\mu)$ نامیده می‌شود، هرگاه بین دوگان نرمی آن و $\mathrm{L}^1(\mu)$، یک عملگر خطی، پوشا و طولپا موجود باشد. می‌دانیم که فضای $\mathrm{L}^1(\mu)$ پیش‌دوگان یگانه ندارد و از دیرباز این پرسش که آیا یک فضای باناخ معین پیش‌دوگان $\mathrm{L}^1(\mu)$ است، موضوع پژوهش‌های ریاضی متعددی بوده است. در این مقاله نخست در قضیه‌ای ارتباط بین پاسخ این پرسش دربارهٔ فضای لیپ‌شیتس کوچک و ساختار فضای متریک زمینه را بیان می‌کنیم. سپس نتیجه می‌گیریم فضای توابع هلدر بر هر فضای متریک نقطه‌ای فشرده پیش‌دوگان $\mathrm{L}^1(\mu)$ نیست.

۲ نتایج اصلی

در خلال اثبات قضیهٔ اصلی، به نکته‌ای که در گزارهٔ زیر مطرح می‌شود نیاز داریم.

ملاحظه ۱.۲. اگر f نقطهٔ اکستریم گوی یکهٔ $\mathrm{L}^1(\mu)$ باشد، آنگاه تکیه‌گاه f یک اتم در فضای اندازهٔ (X,μ) است. زیرا در غیر این صورت $E\subset\mathrm{supp}(f)$ یافت می‌شود که $0<\mu(E)<\mu(\mathrm{supp}(f))$ و با در نظر گرفتن $t=\int_E|f|d\mu\in(0,1)$، داریم $\|\frac{1}{t}f\chi_E\|_1=1$ و $\|\frac{1}{1-t}f\chi_{\mathrm{supp}(f)\setminus E}\|_1=1$. به‌علاوه $f=t(\frac{1}{t}f\chi_E)+(1-t)(\frac{1}{t}f\chi_E)$ که با اکستریم بودن f در تناقض است.

اکنون می‌توانیم قضیهٔ اصلی مقاله را به شرح زیر ارائه دهیم.

قضیه ۲.۲. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک فشرده و e نقطهٔ پایه‌ای آن باشد. فضای لیپ‌شیتس کوچک، $\mathrm{lip}_0(X)$، پیش‌دوگان $\mathrm{L}^1(\mu)$ و برای همهٔ نقاط $x\in X\setminus\{e\}$، $\frac{1}{d(x,e)}m_{xe}$ نقطهٔ اکستریم گوی یکهٔ $\mathrm{lip}_0(X)^*$ است اگر و تنها اگر به‌ازای هر دو نقطهٔ متمایز $x,y\in X$، $d(x,y)=d(x,e)+d(e,y)$.

اثبات. ابتدا فرض کنیم μ یک اندازهٔ مثبت روی X و

$$T : \mathrm{lip}_{\circ}(X)^* \to \mathrm{L}^{۱}(\mu)$$

یکریختی طول‌پا باشد. به‌علاوه فرض کنیم

$$\left\{\frac{۱}{d(x,e)}m_{xe} : x \in X, x \neq e\right\} \subseteq \mathrm{ext}(\mathrm{lip}_{\circ}(X)^*).$$

به‌ازای هر $x \in X$ چون T یکریختی طول‌پا است و $\frac{۱}{d(x,e)}m_{xe} \in \mathrm{ext}(\mathrm{lip}_{\circ}(X)^*)$ داریم $T(\frac{۱}{d(x,e)}m_{xe}) \in \mathrm{ext}(\mathrm{L}^{۱}(\mu))$. بنابر ملاحظه ۱.۲ تکیه‌گاه $T(m_{xe})$ یک اتم در فضای اندازهٔ (X,μ) است و ازآنجاکه $\|T(\frac{۱}{d(x,e)}m_{xe})\|_{۱} = ۱$، اتم $E_x \subseteq X$ وجود دارد که

$$T(\frac{۱}{d(x,e)}m_{xe}) = \frac{۱}{\mu(E_x)}\chi_{E_x} \ (a.e.).$$

روشن است که چون T یکریختی است، به‌ازای هر $x, y \in X$، اگر $x \neq y$، آنگاه E_x و E_y متمایز و درنتیجه مجزا هستند. به‌این‌ترتیب به‌ازای هر دو نقطهٔ متمایز $x, y \in X \setminus \{e\}$،

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|m_{xy}\|_{\mathrm{AE}} \\ &= \|T(m_{xy})\|_{۱} \\ &= \|T(m_{xe}) - T(m_{ey})\|_{۱} \\ &= \|\frac{d(x,e)}{\mu(E_x)}\chi_{E_x} - \frac{d(y,e)}{\mu(E_y)}\chi_{E_y}\|_{۱} \\ &= \int_X |\frac{d(x,e)}{\mu(E_x)}\chi_{E_x} - \frac{d(y,e)}{\mu(E_y)}\chi_{E_y}| d\mu \\ &= \int_X \frac{d(x,e)}{\mu(E_x)}\chi_{E_x} + \frac{d(y,e)}{\mu(E_y)}\chi_{E_y} d\mu \\ &= d(x,e) + d(e,y). \end{aligned}$$

برعکس، فرض کنیم

$$d(x,y) = d(x,e) + d(e,y) \qquad (x, y \in X, \ x \neq y).$$

اندازهٔ μ را روی X به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mu : P(X) \to [\circ, \infty]; \qquad \mu(E) = \begin{cases} \sum_{x\in E} d(x,e) & E \neq \emptyset \\ \circ & E = \emptyset \end{cases}$$

به‌ازای هر $m \in \text{æ}(X)$ بنابر تعریف، $z_{۱}, \cdots, z_n \in \mathbb{C} \setminus \{\circ\}$ وجود دارند که $m(X) = \{z_{۱}, \cdots, z_n\} \cup \{\circ\}$ و $z_{۱} + \cdots + z_n = \circ$. به‌علاوه، اگر به‌ازای هر $i \in \{۱, \cdots, n\}$ قرار دهیم $E_i = m^{-۱}(z_i)$ داریم $\cup_{i=۱}^n E_i$ زیرمجموعهٔ متناهی X است و $m = \sum_{i=۱}^n z_i \chi_{E_i}$. بنابراین

$$\begin{aligned} \|m\|_{۱} &= \int_X |m| d\mu = \sum_{i=۱}^n |z_i|\mu(E_i) \\ &= \sum_{i=۱}^n |z_i|(\sum_{x\in E_i} d(x,e)) = \sum_{i=۱}^n \sum_{x\in E_i} |z_i| d(x,e) \end{aligned}$$

و از طرف دیگر

$$m = \sum_{i=1}^{n} z_i \chi_{E_i} = \sum_{i=1}^{n} z_i \sum_{x\in E_i} \chi_x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x\in E_i} z_i m_{xe}$$

لذا

$$\|m\|_{\mathrm{AE}} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{x\in E_i} |z_i| d(x,e) \leq \|m\|_1. \tag{۱.۲}$$

برای اثبات نامساوی بالا در جهت عکس، $\epsilon > 0$ را دلخواه در نظر بگیریم. بنابر تعریف نرم $\|.\|_{\mathrm{AE}}$، برای $m \in \text{æ}(X)$ نقاط $p_1, \cdots, p_k, q_1, \cdots, q_k$ در X و اعداد $a_1, \cdots, a_k$ در $\mathbb{C}$ یافت می‌شوند که $m = \sum_{i=1}^{k} a_i m_{p_i q_i}$ و

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i| d(p_i, q_i) < \|m\|_{\mathrm{AE}} + \epsilon.$$

سپس خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\|m\|_1 &= \int_X |\sum_{i=1}^{k} a_i m_{p_i q_i}| d\mu \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} |a_i| \int_X |m_{p_i q_i}| d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{k} |a_i| \int_X \chi_{p_i} + \chi_{q_i} d\mu \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} |a_i| (\mu(\{p_i\}) + \mu(\{q_i\})) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} |a_i| (d(p_i, e) + d(q_i, e)) \\
&= \sum_{i=1}^{k} |a_i| d(p_i, q_i) \\
&< \|m\|_{\mathrm{AE}} + \epsilon.
\end{aligned}$$

به‌این‌ترتیب نتیجه می‌گیریم

$$\|m\|_1 \leq \|m\|_{\mathrm{AE}}. \tag{۲.۲}$$

بر اساس (۱.۲) و (۲.۲)، نگاشت همانی $I : \text{æ}(X) \to \mathrm{L}^1(\mu)$ یک عملگر خطی طول‌پا و به‌ویژه پیوستهٔ یکنواخت است. لذا دارای یک گسترش پیوسته به کامل‌شدهٔ $\text{æ}(X)$ یعنی $\mathrm{AE}(X)$ است که آن را با $\tilde{I}$ نمایش می‌دهیم. عملگر $\tilde{I}$ خاصیت طول‌پایی را حفظ می‌کند، زیرا به‌ازای هر $m \in \mathrm{AE}(X)$ دنباله‌ای از اعضای $\text{æ}(X)$ مانند $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ موجود است که نسبت به نرم $\|.\|_{\mathrm{AE}}$ به m میل می‌کند و خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\|m\|_{\mathrm{AE}} = \lim_{i\to\infty} \|m_i\|_{\mathrm{AE}} &= \lim_{i\to\infty} \|\tilde{I}(m_i)\|_1 \\
&= \|\lim_{i\to\infty} \tilde{I}(m_i)\|_1 = \|\tilde{I}(m)\|_1.
\end{aligned}$$

توجه کنیم که طول‌پایی $\tilde{I}$ بسته بودن برد آن را ایجاب می‌کند در ادامه نشان می‌دهیم $\tilde{I}$ پوشا نیز هست. به‌ازای هر $E \subseteq X$ با شرط $\mu(E) < \infty$ داریم $\sum_{x\in E} d(x,e) = \mu(E) < \infty$، لذا مجموعهٔ E حداکثر شمارش‌پذیر است. پس می‌توان نوشت

$E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ که $\sum_{n\in\mathbb{N}} d(x_n, e) = \mu(E) < \infty$. بنابراین در فضای $\mathrm{AE}(X)$ سری $\sum_{n\in\mathbb{N}} m_{x_ne}$ همگرای مطلق و درنتیجه همگرا است، لذا $\chi_E = \sum_{n\in\mathbb{N}} m_{x_ne}$ متعلق به $\mathrm{AE}(X)$ است. به‌ویژه

$$\tilde{I}(\chi_E) = \tilde{I}(\sum_{n\in\mathbb{N}} m_{x_ne}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{I}(m_{x_ne}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} I(m_{x_ne}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m_{x_ne} = \chi_E$$

بنابراین زیرفضای توابع پله‌ای که در $\mathrm{L}^{۱}(\mu)$ چگال است مشمول در زیرفضای بستهٔ $\tilde{I}(\mathrm{AE}(X))$ از $\mathrm{L}^{۱}(\mu)$ است که پوشایی $\tilde{I}$ را ایجاب می‌کند. در انتها به‌ازای هر $x_۰ \in X \setminus \{e\}$ به‌ازای $۰ < r_{x_۰} = d(x_۰, e)$ داریم $B(x_۰, r_{x_۰}) \cap X = \{x_۰\}$ و درنتیجه $\chi_{x_۰} \in \mathrm{lip}_۰(X)$ به‌علاوه با به کار بردن قضیه ۳.۳۱ در [۱] برای تابع $f_{x_۰} = d(x_۰, e)\chi_{x_۰}$ نتیجه می‌گیریم $\frac{۱}{d(x_۰,e)} m_{x_۰e}$ یک نقطهٔ اکستریم از گوی یکهٔ $\mathrm{lip}_۰(X)^* = \mathrm{AE}(X)$ است. □

پاسخ به پرسش اصلی مقاله در نتیجهٔ زیر بیان می‌شود.

نتیجه ۳.۲. فضای توابع هلدر روی یک فضای متریک نقطه‌ای فشرده با حداقل دو نقطهٔ متمایز از نقطهٔ پایه‌ای، پیش‌دوگان $\mathrm{L}^{۱}(\mu)$ نیست.

اثبات. فرض خلف بگیریم فضای توابع هلدر روی فضای متریک نقطه‌ای فشرده (X, d)، که حداقل دو نقطهٔ متمایز از نقطهٔ پایه‌ای دارد، پیش‌دوگان $\mathrm{L}^{۱}(\mu)$ است. توجه کنیم که با یک بررسی مقدماتی چون $۰ < \alpha < ۱$، به‌ازای هر سه نقطهٔ متمایز $x, y, z \in X$، داریم

$$d(x, z)^\alpha < d(x, y)^\alpha + d(y, z)^\alpha.$$

ازاین‌رو از گزاره ۳.۳۴ در [۱] و قضیه ۳.۳۹ در [۱] نتیجه می‌گیریم

$$\left\{\frac{۱}{d(x, e)} m_{xe} : x \in X, x \neq e\right\} \subseteq \mathrm{ext}(\mathrm{lip}_۰(X^\alpha)^*).$$

لذا بنابر قضیهٔ بالا،

$$d(x, y)^\alpha = d(x, e)^\alpha + d(e, y)^\alpha \qquad (x, y \in X,\ x \neq y),$$

که ایجاب می‌کند $d(x, e) = ۰$ یا $d(y, e) = ۰$. در واقع نتیجه می‌گیریم X، حداکثر یک نقطهٔ متمایز از e دارد که با فرض در تناقض است. □

با به کار بردن نتیجه ۳.۳۲ در [۱] به‌جای قضیه ۳.۳۹ در [۱] در برهان نتیجهٔ اخیر، نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۴.۲. اگر X یک فضای متریک نقطه‌ای فشرده با حداقل دو نقطهٔ متمایز از نقطهٔ پایه‌ای و قطر حداکثر دو باشد، آنگاه $\mathrm{lip}_۰(X)$ پیش‌دوگان $\mathrm{L}^{۱}(\mu)$ است اگر و تنها اگر

$$d(x, y) = d(x, e) + d(e, y) \qquad (x, y \in X,\ x \neq y).$$

References

[1] Weaver, N. (2018). Lipschitz Algebras (Second Edition). *World Scientific, Singapore*.