Measure Algebras and Applications

A^{**}-biprojectivity of Banach algebras based on maximal ideal space

Amir Sahami[1], **Mehdi Rostami**[2]

1. Department of Mathematics, Faculty of Basic Science, Ilam University, P.O. Box 69315-516 Ilam, Iran. Email: a.sahami@ilam.ac.ir
2. Corresponding Author, Department of Mathematics and Computer Science, Amirkabir University of Technology (Tehran Polytechnic), Iran. Email: mross@aut.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 28 December 2023
Received in revised form:
17 April 2024
Accepted: 20 June 2024
Published Online:
20 August 2024

Keywords:
Banach algebra,
φ-A^{**}-biprojective,
φ-inner amenable,
Group algebra,
Measure algebra

2020 Mathematics Subject Classification:
43A20, 46M10

ABSTRACT

In this paper, we continue the study of A^{**}-biprojectivity of Banach algebras, was introduced in [19], and the relation between this new notion and φ-amenability of Banach algebras is investigated. A^{**}-biprojectivity of Segal algebras and lower triangular matrix algebras is studied. Also, we introduce the notion of φ-A^{**}-biprojectivity of Banach algebras. Some examples indicate that this notion is weaker than A^{**}-biprojectivity. We obtain the relation between this notion and φ-amenability and φ-inner amenability. Finally, we investigate this new notion on certain Banach algebras such as group algebras, measure algebras, and lower triangular Banach algebras.

Cite this article: Sahami, A., & Rostami, M. (2024). A^{**}-biprojectivity of Banach algebras based on maximal ideal space. *Measure Algebras and Applications*, 2(1), 71–84. http://doi.org/10.22091/MAA.2024.10255.1012

Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/MAA.2024.10255.1012

Extended Abstract

Introduction

The concept of amenability (for discrete groups) originated by J. von Neumann in 1929, as, a discrete group is amenable if it admits a finitely additive left invariant probability measure. After that formally, it was introduced for all locally compact groups by M.M. Day. This concept was later extended to Banach algebras by B. E. Johnson in 1972 and has since grown into a fascinating area of research with applications in diverse fields, such as abstract harmonic analysis, operator algebras, and ergodic theory. In fact, a Banach algebra A is said to be amenable if the first cohomology group of A with coefficients in every dual Banach A-bimodule X^* is trivial. This notion has been considered as an important cohomological notion for Banach algebras by many mathematicians. After that many researchers studied the properties of this notion and the relation with many other cohomological notions. In 2006 Ghahramani et al. introduced the concept of approximate amenability as a notion weaker than amenability and improved the results related to amenability. A Banach algebra A is called approximately amenable if every continuous derivation from A into every dual Banach A-bimodule is approximately inner. They presented many examples to indicate that approximate amenability is different from amenability. In 2008, Kaniuth, Lau and Pym by inspiration of left amenability of F-algebras, was done by Lau [12], introduced φ-amenability of Banach algebras. This notion was studied by many authors and it was proved that φ-amenability has a near relation to the existence of a bounded approximate identity for $\ker\varphi$. A net (e_α) in A is an approximate identity for A if $\|ae_\alpha - a\| \to a$ and $\|e_\alpha a - a\| \to a$, for all $a \in A$. Helemskii in the 1980s defined biprojective Banach algebras as an important tool in homological notions and investigated any hereditary properties of this concept, interested readers are referred to his comprehensive book [3]. A Banach algebra A is called biprojective if there exists a bounded A-bimodule morphism $\rho\colon A \to A\widehat{\otimes}A$ such that $\pi_A \circ \rho(a) = a$. After that, some other weaker or stronger notions were defined and investigated. For example, Zhang in 1999 [23] introduced approximate biprojective Banach algebras. Sahami and Pourabbas in 2014 [22] by inspiration of φ-amenability introduced φ-biprojective Banach algebras and studied some properties of this notion. After that extensive research was done on this notion for some Banach algebras such as group algebras, measure algebras, semigroup algebras and Lipschitz algebras. A Banach algebra A is called φ-biprojective if there exists a continuous module morphism $\rho : A \to A\widehat{\otimes}A$ such that $\varphi \circ \pi_A \circ \rho(a) = \varphi(a)$, for all $a \in A$, where φ is a nonzero bounded multiplicative linear functional on A. The authors, in [19], introduced the notion of A^{**}-biprojective Banach algebras and found the relation between this notion with some other cohomological notions. Also, A^{**}-biprojectivity of certain Banach algebras such as Lipschitz algebras and triangular Banach algebras had been studied. In this paper, we investigate the relation between A^{**}-biprojectivity and φ-amenability. After that we define the notion of φ-A^{**}-biprojective Banach algebras and we obtain the relation between this notion and some other cohomological notions. Also, we study φ-A^{**}-biprojectivity of Banach algebras associated to a locally compact group.

Conclusion

In this paper, the following definitions are stated:

***Definition* 0.1.** *A Banach algebra A is called biprojective if there exists a bounded A-bimodule morphism $\rho\colon A \to A\widehat{\otimes}A$ such that $\pi_A \circ \rho(a) = a$.*

***Definition* 0.2.** *A Banach algebra A is called left φ-amenable if there exists a bounded net (m_α) in A such that*

$$am_\alpha - \varphi(a)m_\alpha \to 0, \qquad \varphi(m_\alpha) \to 1,$$

for all $a \in A$.

***Definition* 0.3.** *A Banach algebra A is called A^{**}-biprojective if there exists bounded A-module morphism $\rho : A \to A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ such that for all $a \in A$*

$$\pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \kappa_A(a).$$

***Definition* 0.4.** *Let A be a Banach algebra and $\varphi \in \Delta(A)$. A is called φ-A^{**}-biprojective if there exists a net $\rho : A \to A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ such that for all $a \in A$*

$$\widetilde{\varphi} \circ \pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \varphi(a).$$

Also, the next theorems and corollaries are presented:

***Theorem* 0.5.** *Let A be a Banach algebra with a left approximate identity. If A is A^{**}-biprojective, then A is left φ-amenable.*

***Corollary* 0.6.** *Let G be a locally compact group. If $S^1(G)$ is $S^1(G)^{**}$-biprojective, then G is amenable.*

***Lemma* 0.7.** *Let $|I| \geq 1$ be an index set with the smallest element. Then $LO(I, A)$ is not $LO(I, A)^{**}$-biprojective.*

***Theorem* 0.8.** *Let A be a Banach algebra and $\varphi \in \Delta(A)$. If A is φ-inner amenable and φ-A^{**}-biprojective, then A is left and right φ-amenable.*

***Theorem* 0.9.** *Let G be a locally compact group and $\varphi \in \Delta(L^1(G))$. The algebra $L^1(G)$ is φ-$L^1(G)^{**}$-biprojective if and only if G is amenable.*

***Theorem* 0.10.** *Let G be a locally compact group and $\varphi \in \Delta(M(G))$. The algebra $M(G)$ is φ-$M(G)^{**}$-biprojective if and only if G is amenable and discrete.*

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۳، دوره ۲، شماره ۱، ص ۸۴-۷۱

A^{**} -دوتصویری جبرهای باناخ بر پایه فضای ایده‌آل ماکسیمال

امیر سهامی [۱] ، **مهدی رستمی** [۲]✉

۱. دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ایلام، ایلام، ایران. رایانامه: a. sahami@ilam. ac. ir
۲. نویسندهٔ مسئول، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران. رایانامه: mross@aut. ac. ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۰/۷
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۱/۲۹
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۳/۳۱
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۵/۳۰

کلمات کلیدی:
جبر باناخ،
φ-A^{**}- دوتصویر،
میانگین‌پذیر داخلی،
جبر گروهی،
جبر اندازه

رده‌بندی ریاضی:
43A20, 46M10

چکیده

در این مقاله، مطالعهٔ جبرهای باناخ A^{**} -دوتصویر را که در منبع [۱۹] معرفی شدند، ادامه می‌دهیم و ارتباط آن‌ها را با مفهوم φ -میانگین‌پذیری بررسی می‌کنیم. A^{**} -دوتصویری جبرهای سگال و جبرهای ماتریسی پایین مثلثی را مطالعه می‌کنیم. همچنین، مفهوم جبرهای باناخ φ-A^{**} -دوتصویر را معرفی می‌کنیم و رابطهٔ بین این مفهوم و φ -میانگین‌پذیری و φ -میانگین‌پذیری داخلی را به دست می‌آوریم. در نهایت، این مفهوم جدید، برای جبرهای باناخ خاص مانند جبرهای گروهی، جبرهای اندازه و جبرهای باناخ پایین مثلثی بررسی می‌شود.

استناد: سهامی، امیر.، رستمی، مهدی. (۱۴۰۳). A^{**} -دوتصویری جبرهای باناخ بر پایه فضای ایده‌آل ماکسیمال. جبرهای اندازه و کاربردها، ۲(۱)، ۸۴-۷۱.

http://doi.org/10.22091/MAA.2024.10255.1012

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

مفهوم میانگین‌پذیری (برای گروه‌های گسسته) توسط ج. فون نویمان در سال ۱۹۲۹ آغاز شد، که در آن، یک گروه گسسته میانگین‌پذیر است هرگاه یک اندازهٔ احتمال جمعی پایای چپ موجود باشد. پس‌از آن م. م. دی این مفهوم را به‌طور رسمی برای تمام گروه‌های فشردهٔ موضعی معرفی کرد. بعدها این مفهوم توسط ب. ا. جانسون در سال ۱۹۷۲ برای جبرهای باناخ توسیع داده شد و ازآن‌پس به‌عنوان یک موضوع تحقیقاتی جالب مورد توجه قرار گرفت و کاربردهای فراوانی در شاخه‌های مختلف ازجمله آنالیز هارمونیک مجرد، جبر عملگرها و نظریهٔ ارگودیک پیدا کرد. در واقع، جبر باناخ A میانگین‌پذیر گفته می‌شود هرگاه اولین گروه همانستگی A با ضرایب در هر A -دومدول باناخ دوگان X^* بدیهی باشد. این مفهوم بعدها به‌عنوان یک خاصیت همانستگی مهم برای جبرهای باناخ مورد توجه بسیاری از ریاضیدانان قرار گرفت. پس‌از آن تحقیقات بسیاری در مورد خواص این مفهوم و ارتباط آن با بسیاری از مفاهیم دیگر همانستگی مورد مطالعه قرار گرفت. در سال ۲۰۰۶ قهرمانی و همکاران مفهوم ضعیف‌تر میانگین‌پذیری تقریبی را معرفی کردند و توانستند بسیاری از نتایج مربوط به میانگین‌پذیری را تعمیم دهند. جبر باناخ A میانگین‌پذیر تقریبی نامیده می‌شود هرگاه هر اشتقاق پیوسته از A به توی هر A -دومدول باناخ دوگان درونی تقریبی باشد. آن‌ها با ذکر مثال‌های متعدد نشان دادند که این مفهوم با مفهوم میانگین‌پذیری متفاوت است. در سال ۲۰۰۸ کانیوث، لائو و پیم مفهوم φ -میانگین‌پذیری جبرهای باناخ را معرفی کردند که این تعریف با الهام از تعریف میانگین‌پذیری چپ F -جبرها که قبلاً توسط لائو [۱۲] انجام شده بود شکل گرفت. این مفهوم مورد توجه بسیاری قرار گرفت و ثابت شد که φ -میانگین‌پذیری رابطهٔ نزدیکی با وجود یکهٔ تقریبی کران‌دار برای $\ker\varphi$ دارد. تور (e_α) در A را یکهٔ تقریبی گوییم هرگاه برای هر $a\in A$، $||ae_\alpha - a|| \to 0$ و $||e_\alpha a - a|| \to 0$. هلمسکی در دهه ۱۹۸۰ جبرهای باناخ دوتصویر را تعریف کرد که تا به اکنون به‌عنوان یکی از ابزارهای مهم در همانستگی جبرهای باناخ شناخته می‌شود. در واقع، جبر باناخ A دوتصویر نامیده می‌شود هرگاه همریختی A -دومدولی پیوسته $\rho : A \to A\widehat{\otimes}A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\pi_A\circ\rho = id_A$. پس‌از آن مفاهیم دیگری که قوی‌تر یا ضعیف‌تر از این مفهوم بودند نیز تعریف و مورد بررسی قرار گرفتند. به‌عنوان مثال، ژانگ در سال ۱۹۹۹ [۲۳] جبرهای باناخ دوتصویر تقریبی را معرفی کرد. سهامی و پورعباس در سال ۲۰۱۴ [۲۲] با الهام از تعریف φ -میانگین‌پذیری مفهوم جبرهای باناخ φ -دوتصویر را معرفی کردند و خواص آن را مورد بررسی قرار دادند. پس‌از آن نیز تحقیقات گسترده‌ای روی این مفهوم برای بسیاری از جبرها ازجمله جبر گروهی، جبر اندازه، جبر نیم‌گروهی و جبرهای لیپشیتزی انجام پذیرفت. جبر باناخ A، φ -دوتصویر نامیده می‌شود هرگاه همریختی A -مدولی پیوسته $\rho : A \to A\widehat{\otimes}A$ موجود باشد به‌طوری‌که $\varphi\circ\pi_A\circ\rho(a) = \varphi(a)$، که در آن φ یک تابعک خطی ضربی کران‌دار ناصفر روی A است. نویسندگان در [۱۹] مفهوم جبرهای باناخ A^{**} -دوتصویر را معرفی کردند و رابطهٔ آن را با برخی از مفاهیم همانستگی مطالعه کردند. همچنین A^{**} -دوتصویری برخی از جبرهای باناخ ازجمله جبرهای لیپشیتزی و جبرهای مثلثی را بررسی کردند. در این مقاله ارتباط بین A^{**} -دوتصویری و φ -میانگین‌پذیری را بررسی می‌کنیم. سپس جبرهای باناخ φ-A^{**}- دوتصویر را تعریف می‌کنیم و ارتباط آن را با برخی دیگر از مفاهیم همانستگی به دست می‌آوریم. همچنین این مفهوم را برای جبرهای وابسته به یک گروه فشردهٔ موضعی مطالعه می‌کنیم.

۲ تعاریف و مقدمات

فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک A -دومدول باناخ باشد. در این صورت فضای دوگان X یعنی X^* با اعمال مدولی زیر یک A -دومدول باناخ است:

$$(a\cdot f)(x) = f(x\cdot a),\ (f\cdot a)(x) = f(a\cdot x) \qquad (a\in A, x\in X, f\in X^*).$$

اگر $A\widehat{\otimes}A$ فضای حاصلضرب تانسوری تصویری باشد در این صورت $A\widehat{\otimes}A$ یک باناخ A- دومدول با اعمال مدولی زیر است:

$$a\cdot(b\otimes c) = ab\otimes c,\ (b\otimes c)\cdot a = b\otimes ca \qquad (a,b,c\in A)$$

بنابراین $(A\widehat{\otimes}A)^*$ با اعمال مدولی زیر یک باناخ A- دومدول است:

$$\begin{aligned}&(a\cdot f)(b\otimes c) = f(b\otimes ca),\\ &(f\cdot a)(b\otimes c) = f(ab\otimes c) \qquad (a,b,c\in A, f\in (A\widehat{\otimes}A)^*).\end{aligned}$$

به‌طور مشابه می‌توان $(A\widehat{\otimes}A)^{**}$ را به‌عنوان یک باناخ A -دومدول در نظر گرفت. به یک تابعک خطی ضربی ناصفر روی جبر باناخ A یک مشخصه گفته می‌شود و مجموعهٔ تمام مشخصه‌های روی A را با نماد $\Delta(A)$ نمایش می‌دهیم. در سرتاسر این مقاله، $\kappa_A : A\to A^{**}$

نشانندهٔ طبیعی و $\pi_A : A\hat{\otimes}A \to A$ نگاشت ضربی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\pi_A(a \otimes b) = ab \qquad (a, b \in A).$$

آرنز در سال ۱۹۵۱ دو ضرب روی دوگان دوم یک جبر باناخ تعریف کرد تا بتواند آن را تبدیل به یک جبر باناخ کند. در واقع این ضرب‌ها توسیع ضرب معمولی روی جبر هستند. به این ضرب‌ها ضرب آرنز اول و دوم گفته می‌شود که به ترتیب با نمادهای $\Box$ و $\Diamond$ نمایش داده می‌شوند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\langle F\Box G, f\rangle = \langle F, G\cdot f\rangle, \qquad \langle F\Diamond G, f\rangle = \langle G, f\cdot F\rangle,$$

و

$$\langle G\cdot f, a\rangle = \langle G, f\cdot a\rangle, \qquad \langle f\cdot F, a\rangle = \langle F, a\cdot f\rangle,$$

و

$$\langle f\cdot a, b\rangle = \langle f, ab\rangle, \qquad \langle a\cdot f, b\rangle = \langle f, ba\rangle,$$

که در آن $F, G \in A^{**}$، $f \in A^*$ و $a, b \in A$.

دقت شود که اگر A یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(A)$، آنگاه توسیع یکتایی از φ به A^{**} موجود است که آن را با $\widetilde{\varphi}$ نمایش می‌دهیم. در واقع برای هر $F \in A^{**}$ قرار می‌دهیم

$$\widetilde{\varphi}(F) = F(\varphi).$$

۳ نتایج اصلی

ابتدا تعریف جبرهای باناخ A^{**}-دوتصویر را ارائه می‌دهیم. برای جزئیات بیشتر به منبع [۱۹] مراجعه شود.

تعریف ۱.۳. جبر باناخ A را A^{**}-دوتصویر نامیم هرگاه همریختی پیوسته A- دومدولی $\rho : A \to A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ موجود باشد به‌طوری‌که به ازای هر $a \in A$

$$\pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \kappa_A(a)$$

که در آن $\pi_{A^{**}} : A^{**}\widehat{\otimes}A^{**} \to A^{**}$ عملگر ضربی با ضابطهٔ $\pi_{A^{**}}(F \otimes G) = F\Box G$ است.

در قضیهٔ زیر به بررسی رابطهٔ بین A^{**}-دوتصویری جبر باناخ A با φ-میانگین‌پذیری می‌پردازیم.

تعریف ۲.۳. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(A)$. گوییم A، φ-میانگین‌پذیر چپ است هرگاه تور کران‌دار (m_α) در A موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$

$$am_\alpha - \varphi(a)m_\alpha \to ۰, \qquad \varphi(m_\alpha) \to ۱.$$

تور (e_α) را یکهٔ تقریبی چپ جبر باناخ A گوییم هرگاه برای هر $a \in A$، $e_\alpha a \to a$. یکهٔ تقریبی (e_α) را کران‌دار گوییم هرگاه $K > ۰$ وجود داشته باشد که $\|e_\alpha\| \leq K$. به‌طور مشابه یکهٔ تقریبی راست کران‌دار نیز تعریف می‌شود. جبر باناخ A دارای یکهٔ تقریبی کران‌دار است هرگاه دارای یکهٔ تقریبی چپ کران‌دار و راست کران‌دار باشد.

قضیه ۳.۳. فرض کنیم A یک جبر باناخ با یکهٔ تقریبی چپ (راست) باشد و $\varphi \in \Delta(A)$. اگر A، A^{**}-دوتصویر باشد، آنگاه A φ-میانگین‌پذیر چپ (راست) است.

اثبات. ازآنجاکه جبر A، A^{**}-دوتصویر است لذا طبق تعریف عملگر خطی $\rho : A \to A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $a, b \in A$ داریم:

$$\pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \kappa_A(a), \qquad \rho(ab) = \rho(a)\cdot b = a\cdot\rho(b).$$

طبق [۲، لم ۱.۷] نگاشت

$$\Psi : A^{**}\widehat{\otimes}A^{**} \to (A\widehat{\otimes}A)^{**}$$

موجود است به‌طوری‌که برای هر $a,b\in A$ و $n\in A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) $\Psi(\kappa_A(a)\otimes\kappa_A(b))=\kappa_{A\widehat{\otimes}A}(a\otimes b)$

ب) $\Psi(n)\cdot a=\Psi(n\cdot a)$

پ) $a\cdot\Psi(n)=\Psi(a\cdot n)$

ت) $\pi_A^{**}(\Psi(n))=\pi_{A^{**}}(n)$.

نگاشت $\theta: A\to (A\widehat{\otimes}\frac{A}{\ker\varphi})^{**}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\theta(a)=(id_A\otimes q)^{**}\circ\Psi\circ\rho(a),$$

که در آن $id_A: A\to A$ نگاشت همانی و $q: A\to\frac{A}{\ker\varphi}$ نگاشت خارج‌قسمتی است. دقت کنیم که نگاشت $id_A\otimes q$ یک همریختی A-مدولی است و درنتیجه $(id_A\otimes q)^{**}$ نیز یک A-مدولی همریختی است. چون A دارای یکهٔ تقریبی چپ است لذا $\overline{A\ker\varphi}=\ker\varphi$. پس برای هر $k\in\ker\varphi$ دنباله‌های $\{a_n\}$ در A و $\{k_n\}$ در $\ker\varphi$ وجود دارند که $k=\lim_{n\to\infty}a_nk_n$. ازآنجاکه برای هر $k\in\ker\varphi$، $q(k)=\circ$ لذا داریم

$$\begin{aligned}\theta(k)=\theta(\lim_{n\to\infty}a_nk_n)&=\lim_{n\to\infty}\theta(a_nk_n)\\&=\lim_{n\to\infty}(id_A\otimes q)^{**}\circ\Psi\circ\rho(a_nk_n)\\&=\lim_{n\to\infty}(id_A\otimes q)^{**}\circ\Psi\circ\rho(a_n)k_n=\circ.\end{aligned}$$

درنتیجه نگاشت θ یک A- مدول همریختی چپ کران‌دار $\widetilde{\theta}:\frac{A}{\ker\varphi}\to(A\widehat{\otimes}\frac{A}{\ker\varphi})^{**}$ القا می‌کند. عنصر $a_\circ\in A$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\varphi(a_\circ)=۱$. تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{m}=\widetilde{\theta}(a_\circ+\ker\varphi).$$

همان‌طور که می‌دانیم $\frac{A}{\ker\varphi}\cong\mathbb{C}$ و درنتیجه $\mathbf{m}\in A^{**}$. به‌آسانی می‌توان دید که برای هر $a\in A$ داریم

$$\begin{aligned}a\mathbf{m}=a\widetilde{\theta}(a_\circ+\ker\varphi)&=\widetilde{\theta}(aa_\circ+\ker\varphi)\\&=\widetilde{\theta}(\varphi(a)a_\circ+\ker\varphi)\\&=\varphi(a)\widetilde{\theta}(a_\circ+\ker\varphi)\\&=\varphi(a)\mathbf{m}.\end{aligned}$$

همچنین ازآنجاکه $\widetilde{\varphi}\circ\pi_A^{**}=\widetilde{\varphi}\circ(id_A\otimes q)^{**}$ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(\mathbf{m})=\widetilde{\varphi}\circ\widetilde{\theta}(a_\circ+\ker\varphi)&=\widetilde{\varphi}\circ\theta(a_\circ)\\&=\widetilde{\varphi}\circ(id_A\circ q)^{**}\circ\Psi\circ\rho(a_\circ)\\&=\widetilde{\varphi}\circ\pi_A^{**}\circ\Psi\circ\rho(a_\circ)\\&=\widetilde{\varphi}\circ\pi_{A^{**}}\circ\rho(a_\circ)\\&=\varphi(a_\circ)=۱.\end{aligned}$$

بنابراین A، φ- میانگین‌پذیر چپ است. اثبات میانگین‌پذیری راست A نیز به‌طور مشابه انجام می‌شود. □

تعریف ۴.۳. برای گروه فشردهٔ موضعی G زیرفضای خطی $S(G)$ از جبر گروهی $L^۱(G)$ را یک جبر سگال روی G نامیم هرگاه

الف) $S(G)$ زیرمجموعهٔ چگال در $L^۱(G)$ است.

ب) $S(G)$ با نرم $\|\cdot\|_{S(G)}$ یک فضای باناخ باشد و برای هر $f\in S(G)$ داشته باشیم $\|f\|_{L^۱(G)}\le\|f\|_{S(G)}$.

ج) برای هر $f\in S(G)$ و $y\in G$ داشته باشیم $L_y(f)\in S(G)$ و نگاشت $y\mapsto L_y(f)$ از G به توی $S(G)$ پیوسته باشد که در آن $L_y(f)(x)=f(y^{-۱}x)$.

د) برای هر $f\in S(G)$ و $y\in G$ داشته باشیم $\|L_y(f)\|_{S(G)}=\|f\|_{S(G)}$.

برای جزییات بیشتر دربارهٔ جبرهای سگال روی گروه‌های فشردهٔ موضعی به [۱۸] مراجعه شود.

تعریف ۵.۳. فرض کنید G یک گروه فشردهٔ موضعی باشد. گروه G را میانگین‌پذیر نامیم هرگاه دارای میانگین پایای چپ باشد. یعنی عملگر خطی و کران‌دار $T: L^\infty(G) \to \mathbb{C}$ موجود باشد به‌طوری‌که $\|T\| = T(1) = 1$ و برای هر $f \in L^\infty(G)$

$$T(L_x f) = T(f)$$

که در آن $L_x f$ نگاشت انتقال چپ $L_x f(y) = f(x^{-1}y)$ است. به‌عنوان مثالی از گروه‌های میانگین‌پذیر می‌توان به گروه‌های آبلی و گروه‌های فشرده اشاره کرد. برای مطالعهٔ بیشتر به منابع [۱۶] و [۱۷] مراجعه شود.

نتیجه ۶.۳. فرض کنیم G یک گروه فشردهٔ موضعی است. اگر $S(G)$، $S(G)^{**}$ -دوتصویر باشد، آنگاه G میانگین‌پذیر است.

اثبات. می‌دانیم که $S(G)$ همواره دارای یکهٔ تقریبی چپ است. از قضیه ۳.۳ نتیجه می‌شود که اگر $S(G)$، $S(G)^{**}$ -دوتصویر باشد، آنگاه $S(G)$، φ- میانگین‌پذیر چپ است و طبق [۱، قضیه ۲.۳] نتیجه می‌شود که G میانگین‌پذیر است. $\square$

نتیجه ۷.۳. فرض کنیم A یک جبر باناخ با یکهٔ تقریبی چپ و راست باشد و $\varphi \in \Delta(A)$. اگر A، A^{**}- دوتصویر باشد، آنگاه A، φ- جانسون میانگین‌پذیر است.

اثبات. اثبات نتیجهٔ مستقیم قضیه ۳.۳ و [۲۲، قضیه ۲.۲] است. $\square$

فرض کنیم I یک مجموعهٔ جهت‌دار کلی با کوچک‌ترین عضو باشد. $LO(I)$ را مجموعهٔ تمام ماتریس‌های $I \times I$ پایین مثلثی با عناصر در $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم، یعنی

$$LO(I) = \big\{[a_{ij}]_{i,j\in I}:\ a_{ij} \in \mathbb{C}, a_{ij} = 0 \text{ برای هر } i<j\big\}.$$

$LO(I)$ با ضرب ماتریسی و نرم $\|[a_{ij}]\| = \sum_{i,j\in I}\|a_{ij}\|$ تشکیل جبر باناخ می‌دهد.

قضیه ۸.۳. اگر $|I|>1$ و I دارای کوچک‌ترین عضو باشد، آنگاه $LO(I)$، $LO(I)^{**}$- دوتصویر نیست.

اثبات. به برهان خلف فرض کنیم $LO(I)$، $LO(I)^{**}$- دوتصویر باشد. ازآنجاکه جبر $\mathbb{C}$ دارای عنصر همانی است لذا $LO(I)$ یکهٔ تقریبی دارد. نگاشت $\psi: LO(I) \to \mathbb{C}$ را با ضابطهٔ

$$\psi([a_{ij}]) = a_{i_0 i_0}$$

تعریف می‌کنیم که در آن i_0 کوچک‌ترین عنصر I است. به‌وضوح ψ یک مشخصه روی $LO(I)$ است. طبق قضیه ۳.۳ جبر $LO(I)$، ψ- میانگین‌پذیر چپ است. ایده‌آل بستهٔ

$$J = \left\{\begin{bmatrix} a_{i_0 i_0} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ a_{kk'} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ss'} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} :\ a_{i_0 i_0}, a_{kk'}, a_{ss'}, \dots \in \mathbb{C}\right\}$$

در $LO(I)$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $\psi|_J \neq 0$. درنتیجه بنابر [۱۰، لم ۳.۱] ایده‌آل J نیز $\psi|_J$- میانگین‌پذیر چپ است. پس تور کران‌دار $(m_\alpha) \subseteq J$ وجود دارد که برای هر $j \in J$

$$jm_\alpha - \psi(j)m_\alpha \to 0, \quad \psi(m_\alpha) = 1.$$

از طرف دیگر برای هر $j_1, j_2 \in J$ رابطهٔ $j_1 j_2 = \psi(j_2) j_1$ برقرار است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $j \in J$، $j - \psi(j)m_\alpha \to 0$. حال با در نظر گرفتن عنصر

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

به این نتیجه می‌رسیم که $\mathbf{j} = \mathbf{j} - \psi(\mathbf{j})m_\alpha \to 0$ و به تناقض می‌رسیم. $\square$

در ادامه مفهوم A^{**}-دوتصویری وابسته به یک مشخصه را بیان می‌کنیم.

تعریف ۹.۳. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(A)$. گوییم A، φ-A^{**}-دوتصویر است هرگاه همریختی پیوسته A-دومدولی $\rho : A \to A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ موجود باشد به‌طوری‌که به ازای هر $a \in A$

$$\widetilde{\varphi} \circ \pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \varphi(a).$$

به‌وضوح اگر A، A^{**}-دوتصویر باشد، آنگاه φ-A^{**}-دوتصویر است. در ادامه با ذکر مثالی نشان می‌دهیم که عکس این مطلب لزوماً برقرار نیست. فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد و $\ell^1(S)$ مجموعهٔ تمام توابع مختلط مقدار $f : S \to \mathbb{C}$ باشد به‌طوری‌که $\|f\|_1 = \sum_{s\in S} |f(s)| < \infty$. برای هر $f, g \in \ell^1(S)$ ضرب پیچشی f و g به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(f * g)(r) = \sum_{st=r} f(s)g(t) \qquad (r \in S),$$

و در حالتی که هیچ عضوی مانند s و t یافت نشود که $st = r$ آنگاه $\sum_{st=r} f(s)g(t) = 0$. در این صورت $(\ell^1(S), *, \|\cdot\|_1)$ یک جبر باناخ است که آن را جبر نیم‌گروهی وابسته به S می‌نامیم.

مثال ۱۰.۳. مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ همراه با عمل

$$m \cdot n = \max\{m, n\}$$

تشکیل یک نیم‌گروه می‌دهد که آن را با نماد $\mathbb{N}_{\max}$ نمایش می‌دهیم. در این صورت جبر نیم‌گروهی $A = \ell^1(\mathbb{N}_{\max})$، A^{**}-دوتصویر نیست. زیرا در غیر این صورت همریختی پیوسته A-دومدولی $\rho : A \to A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $a \in A$

$$\pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \kappa_A(a).$$

اگر قرار دهیم $m = \rho(\delta_1)$، آنگاه برای هر $a \in A$ داریم

$$\begin{aligned} a\Psi(m) &= \Psi(am) = \Psi(a\rho(\delta_1)) \\ &= \Psi(\rho(a\delta_1)) = \Psi(\rho(\delta_1 a)) \\ &= \Psi(\rho(\delta_1)a) = \Psi(m)a. \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} \pi_A^{**}(\Psi(m))a &= \pi_A^{**}(\Psi \circ \rho(\delta_1))a \\ &= \pi_{A^{**}} \circ \rho(\delta_1)a \\ &= \kappa_A(\delta_1)a \\ &= \kappa_A(a). \end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که $\Psi(m)$ یک قطر مجازی برای A است و بنابراین A میانگین‌پذیر است. لذا باید $E(\mathbb{N}_{\max}) = E(\mathbb{N})$ مجموعه‌ای متناهی باشد که یک تناقض است. حال ادعا می‌کنیم A، φ-A^{**}-دوتصویر است. همان‌طور که می‌دانیم $\Delta(A) = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\varphi_\infty\}$ که در آن

$$\varphi_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(i), \qquad \varphi_\infty(f) = \sum_{i=1}^{\infty} f(i).$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$ نگاشت $\rho_n : A \to A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho_n(a) = a\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$$

که در آن $\mathbf{m} = \kappa_A(\delta_{n+1} - \delta_n)$. ازآنجاکه $a\mathbf{m} = \varphi_n(a)\mathbf{m}$ بنابراین ρ_n یک همریختی A -مدولی پیوسته است و داریم:

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi_n} \circ \pi_{A^{**}} \circ \rho(a) &= \widetilde{\varphi_n} \circ \pi_{A^{**}}(a\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) \\ &= \widetilde{\varphi_n}(a\mathbf{mm}) \\ &= \varphi(a)\widetilde{\varphi_n}(\mathbf{m}) \\ &= \varphi_n(a).\end{aligned}$$

بنابراین A، φ_n-A^{**} -دوتصویر است. همچنین، اگر قرار دهیم

$$\mathbf{M} = w^* - \lim_n \kappa_A(\delta_n) \in A^{**},$$

به‌راحتی دیده می‌شود ازآنجاکه $a\mathbf{M} = \mathbf{M}a = \varphi_\infty(a)\mathbf{M}$، لذا نگاشت $\rho : A \to A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ با ضابطهٔ

$$\rho(a) = a\mathbf{M} \otimes \mathbf{M}$$

یک همریختی A -مدولی پیوسته است و داریم:

$$\widetilde{\varphi_\infty} \circ \pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \widetilde{\varphi_\infty}(a\mathbf{M^2}) = \varphi_\infty(a).$$

نتیجه می‌گیریم که A، φ_∞-A^{**} -دوتصویر است.

لائو در سال ۱۹۸۸ کلاس F -جبرها را معرفی کرد [۱۲]. در واقع یک F -جبر یک جبر باناخ است که پیش دوگان یک W^* -جبر M باشد به‌طوری‌که عنصر همانی M یک تابعک خطی ضربی روی A باشد. برای اولین بار لائو میانگین‌پذیری چپ F -جبرها را تعریف و به مطالعهٔ خواص آن پرداخت. نصر اصفهانی در سال ۲۰۰۱ [۱۴] مفهوم میانگین‌پذیری داخلی را برای F -جبرها تعریف کرد و نتایج بسیاری در مورد جبرهای مختلف به دست آورد. یکی از این نتایج این بود که جبر گروهی $L^1(G)$ همواره میانگین‌پذیر داخلی است. جباری در سال ۲۰۱۱ در [۶] مفهوم φ -میانگین‌پذیر داخلی را برای جبرهای باناخ معرفی کرد.

تعریف ۱۱.۳. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(A)$. جبر A را φ -میانگین‌پذیر داخلی گوییم هرگاه تور کران‌دار (a_α) در A موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$

$$aa_\alpha - a_\alpha a \to 0, \qquad \varphi(a_\alpha) \to 1.$$

در گزارهٔ زیر به بررسی رابطهٔ بین φ -میانگین‌پذیری و φ-A^{**} -دوتصویری جبرهای باناخ می‌پردازیم.

قضیه ۱۲.۳. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(A)$ و A، φ-A^{**} -دوتصویر باشد. اگر A، φ -میانگین‌پذیر داخلی باشد، آنگاه A، φ -میانگین‌پذیر چپ و راست است.

اثبات. چون A، φ -میانگین‌پذیر داخلی است لذا تور کران‌دار (a_α) در A وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$

$$aa_\alpha - a_\alpha a \to 0, \qquad \varphi(a_\alpha) \to 1.$$

قرار می‌دهیم $m_\alpha = \rho(a_\alpha)$ و نگاشت $T : A^{**}\widehat{\otimes}A^{**} \to A^{**}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(F \otimes G) = \widetilde{\varphi}(G)F.$$

اگر $\rho : A \to A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ نگاشت مدنظر در تعریف φ-A^{**} -دوتصویری باشد، با در نظر گرفتن $N_\alpha = T \circ \rho(a_\alpha)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}aN_\alpha - \varphi(a)N_\alpha &= aT \circ \rho(a_\alpha) - \varphi(a)T \circ \rho(a_\alpha) \\ &= T \circ \rho(aa_\alpha) - T \circ \rho(a_\alpha a) \\ &= T \circ \rho(aa_\alpha - a_\alpha a) \to 0.\end{aligned}$$

همچنین ازآنجاکه $\widetilde{\varphi} \circ T = \widetilde{\varphi} \circ \pi_{A^{**}}$ به این نتیجه می‌رسیم که

$$\widetilde{\varphi} \circ T \circ \rho(a_\alpha) = \widetilde{\varphi} \circ \pi_{A^{**}} \circ \rho(a_\alpha) = \varphi(a_\alpha) \to 1.$$

پس A، φ -میانگین‌پذیر چپ است. با استدلال مشابه می‌توان ثابت کرد A، φ -میانگین‌پذیر راست است. □

در ادامه با ذکر مثالی نشان می‌دهیم که در لم قبل شرط φ-میانگین‌پذیری داخلی ضروری است.

مثال ۱۳.۳. فرض کنیم $A = C([\circ, \text{۱}])$ فضای تمام توابع پیوسته بر $[\circ, \text{۱}]$ با نرم زیر باشد:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [\circ, \text{۱}]\}.$$

فضای A همراه با ضرب

$$f \cdot g = g(\circ) f,$$

تشکیل جبر باناخ می‌دهد. به‌راحتی می‌توان دید که $\Delta(A)$ یک مجموعهٔ تک عضوی است؛ در واقع $\phi(f) = f(\circ)$ تنها مشخصه روی $C([\circ, \text{۱}])$ است. ادعا می‌کنیم که جبر A، ϕ-میانگین‌پذیر نیست اما ϕ-A^{**}-دوتصویر است. برای اثبات این ادعا، به برهان خلف اگر A، ϕ-میانگین‌پذیر باشد، آنگاه تور (f_α) در A وجود دارد که

$$f \cdot f_\alpha - \phi(f) f_\alpha \to \circ \qquad \phi(f_\alpha) = \text{۱}.$$

درنتیجه

$$\phi(f_\alpha) f - \phi(f) f_\alpha = f - \phi(f) f_\alpha \to \circ.$$

بنابراین برای هر $f \in \ker\phi$ می‌توان نتیجه گرفت که $f \leftarrow \phi(f) f_\alpha = \circ$ و لذا $f = \circ$ و این بدین معنی است که $\ker\phi = \{\circ\}$. ازآنجاکه $\dim(\frac{A}{\ker\phi}) = \text{۱}$ پس $\dim(A) = \text{۱}$ و این یک تناقض است. برای اثبات ادعای دوم نگاشت $\rho : A \to A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho(f) = \kappa_A(f) \otimes \kappa_A(\text{۱}).$$

در این صورت ρ یک همریختی A-مدولی پیوسته است و داریم:

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} \circ \pi_{A^{**}} \circ \rho(f) &= \widetilde{\varphi} \circ \pi_{A^{**}}(\kappa_A(f) \otimes \kappa_A(\text{۱})) \\ &= \widetilde{\varphi}(\kappa_A(f \cdot \text{۱})) \\ &= \phi(f)\phi(\text{۱}) \\ &= \phi(f). \end{aligned}$$

پس نتیجه می‌گیریم که A، $\widetilde{\phi}$-A^{**}-دوتصویر است.

نتیجه ۱۴.۳. فرض کنیم A یک جبر باناخ جابجایی و φ-A^{**}-دوتصویر باشد. در این صورت A، φ-میانگین‌پذیر چپ و راست است.

نتیجه ۱۵.۳. فرض کنیم A یک جبر باناخ دارای یکهٔ تقریبی کران‌دار و φ-A^{**}-دوتصویر باشد. در این صورت A، φ-میانگین‌پذیر چپ و راست است.

در ادامه قصد داریم φ-A^{**}-دوتصویری جبر گروهی را مورد بررسی قرار دهیم. فرض کنید G یک گروه فشردهٔ موضعی با اندازهٔ هار چپ $d\lambda$ و $L^\text{۱}(G)$ جبر گروهی وابسته به گروه G با نرم $\|\cdot\|_\text{۱}$ و ضرب پیچشی باشد [۴]. همچنین فرض کنید $L^\infty(G)$ جبر توابع کران‌دار اساسی با نرم $\|\cdot\|_\infty$ و $M(G)$ جبر اندازهٔ گروه G باشد [۴]. اگر $\widehat{G}$ مجموعهٔ همهٔ همریختی‌های پیوسته $\xi : G \to \mathbb{T}$ باشد، در این صورت

$$\Delta(L^\text{۱}(G)) = \{\varphi_\xi : \ \xi \in \widehat{G}\},$$

که در آن

$$\varphi_\xi(f) = \int_G \overline{\xi(x)} f(x) d\lambda(x).$$

به مرجع [۴، قضیه ۲۳.۷] مراجعه کنید.

قضیه ۱۶.۳. فرض کنید G یک گروه فشردهٔ موضعی باشد. جبر گروهی $L^\text{۱}(G)$، φ-$L^\text{۱}(G)^{**}$-دوتصویر است اگر و فقط اگر G یک گروه میانگین‌پذیر باشد.

اثبات. ازآنجاکه $L^{1}(G)$ همواره دارای یکهٔ تقریبی کران‌دار است درنتیجه $L^{1}(G)$، φ -میانگین‌پذیر داخلی است و طبق قضیه ۱۲.۳ $L^{1}(G)$، φ -میانگین‌پذیر چپ است. بنابراین G میانگین‌پذیر است.

برعکس، فرض کنیم G یک گروه میانگین‌پذیر باشد. پس $L^{1}(G)$، φ -میانگین‌پذیر چپ و راست است. لذا M_1 و M_2 در $L^{1}(G)^{**}$ وجود دارند که برای هر $a \in L^{1}(G)$

$$aM_1 = \varphi(a)M_1, \qquad \widetilde{\varphi}(M_1) = 1$$

و

$$M_2 a = \varphi(a)M_2, \qquad \widetilde{\varphi}(M_2) = 1.$$

نگاشت $\rho : L^{1}(G) \to L^{1}(G)^{**}\widehat{\otimes}L^{1}(G)^{**}$ را تعریف می‌کنیم:

$$\rho(a) = aM_1 \otimes M_2.$$

در این صورت داریم:

$$\widetilde{\varphi} \circ \pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \widetilde{\varphi}(aM_1M_2) = \varphi(a).$$

همچنین

$$\rho(ab) = abM_1 \otimes M_2 = \varphi(ab)M_1 \otimes M_2 = \varphi(a)\varphi(b)M_1 \otimes M_2 = a\rho(b),$$

و

$$\begin{aligned}\rho(ab) &= abM_1 \otimes M_2 = \varphi(ab)M_1 \otimes M_2 \\ &= \varphi(a)\varphi(b)M_1 \otimes M_2 = \varphi(a)M_1 \otimes M_2 b \\ &= \rho(a)b.\end{aligned}$$

این ثابت می‌کند که $L^{1}(G)$، φ-$L^{1}(G)^{**}$ -دوتصویر است. □

نتیجه ۱۷.۳. فرض کنید G یک گروه فشردهٔ موضعی باشد. جبر اندازهٔ $M(G)$، φ-$M(G)^{**}$ -دوتصویر است اگر و فقط اگر G یک گروه میانگین‌پذیر و گسسته باشد.

اثبات. اگر $M(G)$، φ-$M(G)^{**}$ -دوتصویر باشد، چون $M(G)$ یکدار است بنابر نتیجه ۱۵.۳ $M(G)$، φ -میانگین‌پذیر چپ است و بنابراین طبق [۱۳، نتیجه ۲.۵] G میانگین‌پذیر و گسسته است. برای حالت برعکس، اگر G میانگین‌پذیر و گسسته باشد، آنگاه $M(G) = \ell^{1}(G)$ و درنتیجه قضیه ۱۶.۳ اثبات را تکمیل می‌کند. □

References

[1] Alaghmandan, M., Nasr-Isfahani, R., & Nemati, M. (2010). Character amenability and contractibility of abstract Segal algebras. *Bull. Austral. Math. Soc*, 82, 274–281. DOI: http://dx.doi.org/10.1017/S0004972710000286.

[2] Ghahramani, F., Loy, R.J., & Willis, G.A. (1996). Amenability and weak amenability of second conjugate Banach algebras. *Proc. Amer. Math. Soc*, 124, 1489–1497. DOI: https://doi.org/10.1090/s0002-9939-96-03177-2.

[3] Helemskii, A.Ya. (1989). The Homology of Banach and Topological Algebras. *Kluwer Academic Publishers, Holland*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-009-2354-6.

[4] Hewitt. E., & Ross, K.A. (1970). Abstract Harmonic Analysis I, *Springer, Berlin*.

[5] Hu, Z., Monfared, M.S., & Traynor, T. (2009). On character amenable Banach algebras. *Studia Math*, 193, 53–78.

[6] Jabbari, A., Mehdi Abad, T., & Zaman Abadi, M. (2011). On ϕ-inner amenable Banach algebras. *Colloq. Math*, 122, 1–10. DOI: https://doi.org/10.4064/cm122-1-1.

[7] Javanshiri, H., & Nemati, M. (2018). Invariant ϕ-means for abstract Segal algebras related to locally compact groups. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 25, 687–698. DOI: http://dx.doi.org/10.36045/bbms/1547780429.

[8] Johnson, B.E. (1972). Cohomology in Banach algebras. *Mem. Amer. Math. Soc*, 127.

[9] Johnson, B.E. (1972). Approximate diagonals and cohomology of certain annihilator Banach algebras. *Amer. J. Math*, 94, 685–698. DOI: https://doi.org/10.2307/2373751.

[10] Kaniuth, E., Lau, A.T., & Pym, J. (2008). On ϕ-amenability of Banach algebras. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc*, 144, 85–96. DOI: https://doi.org/10.1017/S0305004107000874.

[11] Kaniuth, E., Lau, A.T., & Pym, J. (2008). On character amenability of Banach algebras. *J. Math. Anal. Appl*, 344, 942–955. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.03.037.

[12] Lau, A.T. (1983). Analysis on a class of Banach algebras with applications to harmonic analysis on locally compact groups and semigroups. *Fund. Math*, 118, 161–175. DOI: https://doi.org/10.4064/FM-118-3-161-175.

[13] Monfared, M.S. (2008). Character amenability of Banach algebras. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc*, 144, 697–706. DOI: https://doi.org/10.1017/S0305004108001126.

[14] Nasr-Isfahani, R. (2001). Inner amenability of Lau algebras. *Arch. Math*, (Brno) 37, 45–55.

[15] Nasr Isfahani, R., & Soltani Renani, S. (2011). Character contractibility of Banach algebras and homological properties of Banach modules. *Studia Math*, 202, 205–225.

[16] Paterson, A.L.T. (1988). Amenability. *Math. Surveys Monogr, vol. 29, Amer. Math. Soc, Providence, RI*.

[17] Pier, J.P. (1984). Amenability of Locally Compact Groups. *Pure Appl. Math. (N. Y.), John Wiley & Sons, Inc., New York. A Wiley-Interscience Publication*.

[18] Reiter, H. (1971). L^1-algebras and Segal algebras. *Lecture Notes in Mathematics, 231 Springer*. DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0060759.

[19] Rostami, M., & Sahami, A. (2023). A^{**}-biprojectivity of Banach algebras. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 128–140. DOI: http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9829.1011.

[20] Runde, V. (2002). Lectures on Amenability, Lecture Notes in Mathematics (Volume 1774). *Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York*. DOI: https://doi.org/10.1007/b82937.

[21] Sahami, A. (2019). On left ϕ-biprojectivity and left ϕ-biflatness of certain Banach algebras. *Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A*, 81, 97–106.

[22] Sahami, A., & Pourabbas, A. (2013). On ϕ-biflat and ϕ-biprojective Banach algebras. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 20, 789–801. DOI: https://doi.org/10.36045/bbms/1385390764.

[23] Zhang, Y. (1999). Nilpotent ideals in a class of Banach algebras. *Proc. Amer. Math. Soc*, 127, 3237–3242. DOI: http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-99-04896-0.