Measure Algebras and Applications

Local sequence entropy of dynamical systems

Amir Assari[1]

1. Department of Mathematics, Jundi-Shapur University of Technology, Dezful, Iran.
Email: amirassari@jsu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 11 March 2024
Received in revised form: 05 May 2024
Accepted: 18 June 2024
Published Online: 20 August 2024

Keywords:
Entropy,
Finitely ergodic map,
Local entropy,
Sequence entropy

2020 Mathematics Subject Classification:
28D20, 37A35

ABSTRACT

In this paper, we present a local approach to sequence entropy of compact dynamical systems. We show that, given any continuous map on a compact metric space with finitely many ergodic measures and any increasing sequence of natural numbers, there is a local sequence entropy map, in the sense that, its integral with respect to any invariant measure results in the corresponding sequence entropy.

Cite this article: Assari, A. (2024). Local sequence entropy of dynamical systems. *Measure Algebras and Applications*, 1(2), 30–40. http://doi.org/10.22091/MAA.2024.10505.1016

Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/MAA.2024.10505.1016

Extended Abstract

Introduction

The concept of sequence entropy was introduced by Kushnirenko [6]. This invariant could distinguish between automorphisms with zero entropy. Let $(X, \mathcal{B}, \mu)$ be a probability space and $T : X \to X$ be a measurable map preserving μ. Let also, $\Gamma = \{t_i\}_{i\geq 1}$ be a sequence of increasing positive integers (if T is invertible, then the sequence may consist of arbitrary integers). The sequence entropy of T with respect to ξ is defined by

$$h_{\mu,\Gamma}(T, \xi) = \lim\sup_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-t_i}\xi),$$

where $H_\mu(\eta) = -\sum_{A\in\eta} \mu(A) \log \mu(A)$ is the usual Shannon entropy of a partition η. Finally, the metric sequence entropy of T (with respect to Γ) is defined by

$$h_{\mu,\Gamma}(T) = \sup_{\xi} h_{\mu,\Gamma}(T, \xi),$$

where the supremum is taken over all finite partitions of X. Clearly if we set $\Gamma = \{i\}_{i=1}^{\infty}$, then we will have the usual metric entropy. In [8], Newton proved that the sequence entropy of an ergodic automorphism with finite positive entropy is a multiple of the metric entropy of the system. The relationship between sequence entropy and generators was also studied by Rokhlin [18]. The special case of aperiodic automorphisms has also been studied in [8]. One may find a comparison between some results in classical Kolmogorov entropy and sequence entropy in [1]. Comprehensive discussions and results on sequence entropy of dynamical systems may be found in [4, 5]. There are also other concepts of entropy based on sequences of integers that generalize Kolmogorov entropy [21, 22]. There are several local approaches to the concept of entropy in dynamical systems [3, 7, 9, 12–16]. This motivates us to extend the local theory of entropy of dynamical systems to the sequence entropy case. In the present paper, for finitely ergodic dynamical systems, we follow the definition of sequence entropy in a local manner. Given any sequence Γ, we define a local entropy J_Γ which all sequence entropies $h_{\mu,\Gamma}(T)$ with μ, as an invariant measure, are extracted from J_Γ. In the rest of the paper, if $T : X \to X$ is a continuous map on a compact metric space, then we denote by $M(X, T)$ and $E(X, T)$ the set of all T-invariant and T-ergodic probability measures on X respectively. In 1970, Newton presented the relationship between the sequence entropy and Kolmogorov entropy. We first recall the following definition.

***Definition* 0.1.** *([8]) Given an increasing sequence of integers $\Gamma = \{t_i\}_{i=1}^{n}$ let*

$$S_\Gamma(n, k) = \text{card} \bigcup_{i=1}^{n} \{t_i, t_i + 1, ..., t_i + k\},$$

and define

$$K(\Gamma) = \lim_{k\to\infty} \left(\lim\sup_{n\to\infty} \frac{S_\Gamma(n, k)}{n} \right).$$

The following theorem states the relationship between sequence entropy and Kolmogorov entropy for invertible ergodic systems.

***Theorem* 0.2.** *([8]) Let $T : X \to X$ be an invertible map preserving an ergodic measure μ. Then*

(i) $h_{\mu,\Gamma}(T) = 0$ *if* $K(\Gamma) = 0$.

(ii) $h_{\mu,\Gamma}(T) = K(\Gamma)h_\mu(T)$ *if* $0 < h_\mu(T) < \infty$.

(iii) $h_{\mu,\Gamma}(T) = 0$ *if* $0 < K(\Gamma) < \infty$ *and* $h_\mu(T) = 0$.

(iv) $h_{\mu,\Gamma}(T) = \infty$ *if* $0 < K(\Gamma) \leq \infty$ *and* $h_\mu(T) = \infty$.

In Section 2, we present some results on sequence entropy. In Section 3, we present a local approach to the sequence entropy of compact dynamical systems. We assign a map to any compact dynamical system which can be used to extract the sequence entropy by integrating it with respect to any invariant measure. In Section 4, we give some concluding remarks.

Conclusion

In this paper, the following definitions and results are given:

***Definition* 0.3.** *For $x \in X$ and $A \subseteq X$, the average visit time of x in A is defined as follows:*

$$\omega(x, A) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{0 \leq j \leq n-1, T^j(x) \in A\}|,$$

where $|\cdot|$ stands for the cardinality of a set.

***Definition* 0.4.** *Let ξ be a partition and $x \in X$. We define $\Omega(x, \xi)$ as follows:*

$$\Omega(x, \xi) := \sum_{A\in\xi} \phi(\omega(x, A)),$$

where $\phi(t) = -t\log t$ for $t > 0$ and $\phi(0) = 0$. If η is another partition of X, then the conditional version of the previous quantity is defined as follows:

$$\Omega(x, \xi|\eta) := \sum_{A\in\xi, B\in\eta} \omega(x, B)\phi\left(\frac{\omega(x, A\cap B)}{\omega(x, B)}\right).$$

***Definition* 0.5.** *Let $\Gamma = \{t_i\}_{i\geq 1}$ be an increasing sequence of positive integers, and ξ be a finite partition of X. The Γ-local entropy map of T with respect to ξ is defined as follows:*

$$J_\Gamma(x, \xi) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Omega(x, \bigvee_{i=1}^{n} T^{-t_i}\xi).$$

For $\Gamma = \{i\}_{i=1}^\infty$, we simply write $J_\Gamma = J$.

***Lemma* 0.6.** *For any $x \in X$ and partitions ξ and η, we have*

$$\Omega(x, \xi \vee \eta) \geq \Omega(x, \xi) + \Omega(x, \eta|\xi).$$

***Lemma* 0.7.** *For any $x \in X$ and Borel partitions ξ, η, if $\xi < \eta$, then $\Omega(x, \xi) \leq \Omega(x, \eta)$.*

The following theorem is our main result.

***Theorem* 0.8.** *Let $T : X \to X$ be a continuous finitely ergodic map on a compact metric space and $\Gamma = \{t_i\}_{i\geq 1}$ be an increasing sequence of positive integers. Then, for every T-invariant Borel probability measure μ we have*

$$\sup_{\xi} \int_X J_\Gamma(x, \xi) d\mu(x) = h_{\mu,\Gamma}(T),$$

where the supremum is taken over all finite Borel partitions of X.

The following properties are proved in [1].

***Proposition* 0.9.** *(i) Let $\Gamma = \{t_i\}_{i\geq 1}$ be a sequence of integers and $k \in \mathbb{N}$. If $T : X \to X$ is a map preserving the measure μ and ξ is a finite partition of X, then*

$$h_{\mu,\Gamma}(T, \xi) = h_{\mu,\sigma^k(\Gamma)}(T, \xi),$$

where $\sigma : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ is the shift map. In particular,

$$h_{\mu,\Gamma}(T) = h_{\mu,\sigma^k(\Gamma)}(T).$$

(ii) Let $\Gamma = \{k^n\}_{n\geq 1}$ and ξ be a partition of X. If T is a map preserving the measure μ, then

$$h_{\mu,\Gamma}(T, \xi) = h_{\mu,\Gamma}(T^{k^m}, \xi)$$

for any $m \in \mathbb{N}$. In particular,

$$h_{\mu,\Gamma}(T) = h_{\mu,\Gamma}(T^{k^m}).$$

The following proposition is the local version of Proposition 0.9.

***Proposition* 0.10.** *Let $T : X \to X$ be a compact dynamical system, preserving a Borel probability measure μ and ξ be a Borel partition of X.*

(i) Given any sequence of positive integers $\Gamma = \{t_i\}_{i\geq 1}$, we have $J_\Gamma(x, \xi) = J_{\sigma^k(\Gamma)}(x, \xi)$ for μ-almost every $x \in X$.

(ii) If $\Gamma = \{k^n\}_{n\geq 1}$, then, for any $m \in \mathbb{N}$ we have $J^T_\Gamma(x, \xi) = J^{T^{k^m}}_\Gamma(x, \xi)$ for μ-almost every $x \in X$, where J^T_Γ and $J^{T^{k^m}}_\Gamma$ are the Γ-local entropy maps corresponding to T and T^{k^m}, respectively.

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۳، دوره ۱، شماره ۲، ص ۴۰-۳۰

آنتروپی دنباله‌ای موضعی دستگاه‌های دینامیکی

امیر عصاری [۱]

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی جندی‌شاپور دزفول، ایران. رایانامه: amirassari@jsu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۲۱
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۲/۱۶
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۳/۲۹
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۵/۳۰

کلمات کلیدی:
آنتروپی،
آنتروپی موضعی،
آنتروپی دنباله‌ای،
توابع به‌طور متناهی ارگودیک

رده‌بندی ریاضی:
28D20, 37A35

چکیده

در این مقاله، رویکردی موضعی برای آنتروپی دنباله‌ای دستگاه‌های دینامیکی فشرده ارائه می‌کنیم. نشان می‌دهیم که متناظر با هر تابع پیوسته روی یک فضای متریک فشرده با تعداد متناهی اندازهٔ ارگودیک و هر دنبالهٔ صعودی از اعداد طبیعی، یک تابع آنتروپی دنبالهٔ موضعی وجود دارد، به این معنا که انتگرال آن نسبت به هر اندازهٔ پایا منجر به آنتروپی دنباله‌ای متناظر می‌شود.

استناد: عصاری، امیر. (۱۴۰۳). آنتروپی دنباله‌ای موضعی دستگاه‌های دینامیکی. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۲)، ۴۰-۳۰.
http://doi.org/10.22091/MAA.2024.10505.1016

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

مفهوم آنتروپی دنباله‌ای دستگاه‌های دینامیکی توسط کوشنیرنکو [۶] معرفی شد. به کمک این کمیت پایا می‌توان بین اتومورفیسم‌هایی با آنتروپی صفر تمایز قائل شد. فرض کنید $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک فضای احتمال بوده و $T : X \to X$ یک تابع حافظ اندازهٔ μ باشد. همچنین، فرض کنید $\Gamma = \{t_i\}_{i\geq ۱}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد مثبت باشد (اگر T وارون‌پذیر باشد، آنگاه این دنباله می‌تواند مشتمل بر اعداد صحیح نیز باشد). آنتروپی دنباله‌ای T نسبت به افراز اندازه‌پذیر ξ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h_{\mu,\Gamma}(T, \xi) = \limsup_{n\to\infty} \frac{۱}{n} H_\mu(\bigvee_{i=۰}^{n-۱} T^{-t_i}\xi),$$

که در آن $H_\mu(\eta) = -\sum_{A\in\eta} \mu(A) \log \mu(A)$ آنتروپی شانون معمول نسبت به افراز η است. در نهایت، آنتروپی دنباله‌ای T (نسبت به Γ) به‌صورت

$$h_{\mu,\Gamma}(T) = \sup_\xi h_{\mu,\Gamma}(T, \xi),$$

تعریف می‌شود که در آن سوپریمم بر روی کلیهٔ افرازهای اندازه‌پذیر و متناهی X گرفته می‌شود. بدیهی است که اگر قرار دهیم $\Gamma = \{i\}_{i=۱}^{\infty}$ آنگاه به آنتروپی کولموگوروف T خواهیم رسید. در [۸]، نیوتن ثابت کرد که آنتروپی دنباله‌ای یک اتومورفیسم ارگودیک با آنتروپی مثبت متناهی مضرب آنتروپی متریک دستگاه است. رابطهٔ بین آنتروپی دنباله‌ای و مولدها نیز توسط روخلین [۱۸] مورد بررسی قرار گرفت. مورد خاص اتومورفیسم‌های متناوب نیز در [۸] بررسی شده است. می‌توان مقایسه‌ای بین برخی از خواص آنتروپی کلموگروف کلاسیک و آنتروپی دنباله‌ای در [۱] یافت. مباحث و نتایج جامع در مورد آنتروپی دنباله‌ای دستگاه‌های دینامیکی را می‌توان در [۴، ۵] یافت. همچنین مفاهیم دیگری از آنتروپی بر اساس دنباله‌های اعداد صحیح وجود دارند که آنتروپی کلموگروف [۲۱، ۲۲] را تعمیم می‌دهند. چندین رویکرد موضعی برای مفهوم آنتروپی در دستگاه‌های دینامیکی وجود دارند [۳، ۷، ۹، ۱۲–۱۶]. این به ما انگیزه می‌دهد تا نظریهٔ موضعی آنتروپی دستگاه‌های دینامیکی را به حالت آنتروپی دنباله‌ای گسترش دهیم. در مقالهٔ حاضر، تعریف آنتروپی دنباله‌ای را به‌صورت موضعی دنبال می‌کنیم. متناظر با هر دنبالهٔ Γ، یک آنتروپی موضعی J_Γ تعریف می‌کنیم که تمام آنتروپی‌های دنبالهٔ $h_{\mu,\Gamma}(T)$ با μ، به‌عنوان یک اندازهٔ ثابت، از J_Γ استخراج می‌شوند. در ادامهٔ مقاله، اگر $T : X \to X$ یک تابع پیوسته بر یک فضای متریک فشرده باشد، آنگاه مجموعهٔ اندازه‌های احتمال T-پایا و T-ارگودیک را به‌ترتیب با $M(X, T)$ و $E(X, T)$ نشان می‌دهیم. در بخش ۲، برخی از نتایج مهم در مورد آنتروپی دنباله‌ای را ارائه می‌کنیم. در بخش ۳، یک رویکرد موضعی به آنتروپی دنباله‌ای دستگاه‌های دینامیکی فشرده ارائه می‌کنیم. یک تابع را به هر دستگاه دینامیکی فشرده متناظر می‌کنیم که می‌توان از آن برای استخراج کلیهٔ آنتروپی‌های دنباله‌ای متناظر با هر اندازهٔ پایای احتمال استفاده نمود. در بخش ۴، چند نکتهٔ پایانی را بیان می‌کنیم.

۲ نتایجی در باب آنتروپی دنباله‌ای

در این بخش، مفاهیم مقدماتی و پیش‌نیازهای مورد استفاده در بخش بعدی این مقاله را از نظر می‌گذرانیم. در سرتاسر این مقاله، X یک فضای متریک فشرده و $T : X \to X$ یک تابع پیوسته است. تحت این شرایط، زوج (X, T) را یک دستگاه دینامیکی فشرده می‌نامیم. روشن است که X به‌طور طبیعی به σ-جبر بورل $\mathcal{B}_X$ مجهز است. در این بخش ابتدا برخی از خصوصیات آنتروپی دنباله‌ای را بررسی می‌کنیم و سپس برخی از نتایج را تعمیم می‌دهیم. فرض کنید $T : X \to X$ یک دستگاه دینامیکی فشرده باشد، به‌عنوان مثال، X یک فضای متریک فشرده و T پیوسته باشد. فرض کنید $\Gamma = \{t_i\}_{i\geq ۱}$ نیز یک دنبالهٔ صعودی از اعداد صحیح مثبت باشد. گزارهٔ زیر با اصلاح ساده‌ای از اثبات قضیه ۳.۸ [۲۰] به دست می‌آید. بنابراین از ارائهٔ جزئیات استدلال خودداری می‌کنیم.

گزاره ۱.۲. فرض کنید $T : X \to X$ تابعی پیوسته بر فضای متریک فشردهٔ X باشد. فرض کنید $\{\xi_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای از افرازهای متناهی اندازه‌پذیر باشد به‌گونه‌ای که $\mathrm{diam}(\xi_n) \to ۰$. در این صورت برای هر $\mu \in M(X, T)$، داریم

$$h_{\mu,\Gamma}(T) = \lim_{n\to\infty} h_{\mu,\Gamma}(T, \xi_n).$$

گزارهٔ زیر نیز برقرار است.

گزاره ۲.۲. برای هر افراز متناهی اندازه‌پذیر ξ نگاشت $\mu \longmapsto h_{\mu,\Gamma}(T, \xi)$ آفین است.

در سال ۱۹۷۰، نیوتن رابطهٔ بین آنتروپی دنباله‌ای و آنتروپی کولموگروف را ارائه کرد. ابتدا تعریف زیر را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۳.۲. ([۸]) متناظر با هر دنبالهٔ صعودی از اعداد صحیح مانند $\Gamma = \{t_i\}_{i=1}^{n}$ قرار دهید

$$S_\Gamma(n,k) = \mathrm{card} \bigcup_{i=1}^{n} \{t_i, t_i+1, ..., t_i+k\},$$

و همچنین

$$K(\Gamma) = \lim_{k\to\infty} \left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_\Gamma(n,k)}{n} \right).$$

قضیهٔ زیر رابطهٔ بین آنتروپی دنباله‌ای و آنتروپی کولموگوروف را برای توابع وارون‌پذیر بیان می‌کند.

قضیه ۴.۲. ([۸]) فرض کنید $T: X \to X$ تابعی وارون‌پذیر و حافظ اندازهٔ احتمال μ باشد. در این صورت:

۱. $h_{\mu,\Gamma}(T) = 0$ هرگاه $K(\Gamma) = 0$.

۲. $h_{\mu,\Gamma}(T) = K(\Gamma) h_\mu(T)$ هرگاه $0 < h_\mu(T) < \infty$.

۳. $h_{\mu,\Gamma}(T) = 0$ هرگاه $0 < K(\Gamma) < \infty$ و $h_\mu(T) = 0$.

۴. $h_{\mu,\Gamma}(T) = \infty$ هرگاه $0 < K(\Gamma) \leq \infty$ و $h_\mu(T) = \infty$.

۳ آنتروپی دنباله‌ای موضعی

در این بخش، رویکردی موضعی به آنتروپی دنباله‌ای دستگاه‌های دینامیکی فشرده ارائه می‌دهیم. در این راستا، از مراجع [۱۶، ۱۷] ایده گرفته‌ایم.

تعریف ۱.۳. برای $x \in X$ و $A \subseteq X$، متوسط زمان ملاقات x در A به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega(x,A) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{0 \leq j \leq n-1, T^j(x) \in A\}|,$$

که در آن $|\cdot|$ نشان‌دهندهٔ تعداد اعضای یک مجموعه است.

تعریف ۲.۳. فرض کنید ξ افرازی اندازه‌پذیر از X بوده و $x \in X$. قرار دهید:

$$\Omega(x,\xi) := \sum_{A\in\xi} \phi(\omega(x,A)),$$

که در آن $\phi(t) = -t\log t$ برای $t > 0$ و همچنین $\phi(0) = 0$. اگر η افرازی دیگر از X باشد، آنگاه نسخهٔ شرطی کمیت اخیر را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Omega(x,\xi|\eta) := \sum_{A\in\xi, B\in\eta} \omega(x,B) \phi\left(\frac{\omega(x,A\cap B)}{\omega(x,B)}\right).$$

تعریف ۳.۳. فرض کنید $\Gamma = \{t_i\}_{i\geq 1}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد طبیعی بوده و ξ افرازی اندازه‌پذیر از X باشد. Γ- آنتروپی موضعی تابع T نسبت به ξ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J_\Gamma(x,\xi) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Omega(x, \bigvee_{i=1}^{n} T^{-t_i}\xi).$$

برای $\Gamma = \{i\}_{i=1}^{\infty}$ به‌سادگی می‌نویسیم $J_\Gamma = J$.

لم ۴.۳. برای هر $x \in X$ و افرازهای اندازه‌پذیر ξ و η داریم:

$$\Omega(x,\xi\vee\eta) \geq \Omega(x,\xi) + \Omega(x,\eta|\xi).$$

اثبات: فرض کنید ξ و η دو افراز اندازه‌پذیر X باشند به‌گونه‌ای که $\xi < \eta$. بدون کاسته‌شدن از کلیت، می‌توان فرض کرد که برای A در ξ و η داریم $\omega(x, A) \neq ۰$ در این صورت

$$\begin{aligned}
\Omega(x, \xi \vee \eta) &= -\sum_{A\in\xi, B\in\eta} \omega(x, A\cap B) \log \omega(x, A\cap B) \\
&= -\sum_{A\in\xi, B\in\eta} \omega(x, A\cap B) \log \left(\frac{\omega(x, A\cap B)}{\omega(x, A)}.\omega(x, A)\right) \\
&= -\sum_{A\in\xi, B\in\eta} \omega(x, A\cap B) \log \left(\frac{\omega(x, A\cap B)}{\omega(x, A)}\right) \qquad (۱.۳)\\
&- \sum_{A\in\xi, B\in\eta} \omega(x, A\cap B). \log \omega(x, A) \\
&= \Omega(x, \eta|\xi) - \sum_{A\in\xi, B\in\eta} \omega(x, A\cap B). \log \omega(x, A). \qquad (۲.۳)
\end{aligned}$$

به‌سادگی می‌توان دید که برای هر $A \in \xi$،

$$\sum_{B\in\eta} \omega(x, A\cap B) \geq \omega(x, A). \qquad (۳.۳)$$

از ضرب طرفین رابطه (۳.۳) در $-\log \omega(x, A)$ و سپس جمع‌بندی بر اعضای $A \in \xi$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
-\sum_{A\in\xi, B\in\eta} \omega(x, A\cap B) \log \omega(x, A) &\geq -\sum_{A\in\xi} \omega(x, A) \log \omega(x, A) \\
&= \Omega(x, \xi).
\end{aligned}$$

از ترکیب رابطهٔ اخیر با رابطه (۳.۳) حکم اثبات می‌شود. $\square$

لم ۵.۳. برای هر $x \in X$ و افرازهای اندازه‌پذیر ξ و η، اگر $\xi < \eta$، آنگاه $\Omega(x, \xi) \leq \Omega(x, \eta)$.

اثبات. با به‌کارگیری لم ۴.۳ داریم

$$\Omega(x, \eta) = \Omega(x, \xi \vee \eta) \geq \Omega(x, \xi \vee \eta) \geq \Omega(x, \xi) + \Omega(x, \eta|\xi) \geq \Omega(x, \xi). \quad \square$$

اکنون، در قضیهٔ بعد نشان می‌دهیم که J_Γ در واقع یک نگاشت آنتروپی دنباله‌ای موضعی است.

قضیه ۶.۳. فرض کنید $T : X \to X$ تابعی پیوسته بر فضای متریک فشردهٔ X بوده به‌گونه‌ای که $|E(X, T)| < +\infty$ و $\Gamma = \{t_i\}_{i\geq ۱}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد طبیعی باشد. در این صورت، برای هر اندازهٔ بورل T-پایای μ داریم

$$\sup_{\xi} \int_X J_\Gamma(x, \xi) d\mu(x) = h_{\mu,\Gamma}(T),$$

که در آن سوپریمم بر کلیهٔ افرازهای اندازه‌پذیر X گرفته می‌شود.

اثبات. فرض کنید ξ افرازی اندازه‌پذیر از X باشد. ابتدا فرض کنید $\mu \in E(X, T)$. در این صورت، برای هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر $A \subseteq X$، و با به‌کارگیری قضیهٔ ارگودیک بیرخوف، نتیجه می‌گیریم که برای تقریباً هر $x \in X$ داریم $\omega(x, A) = \mu(A)$. بنابراین، برای تقریباً هر $x \in X$ خواهیم داشت $\Omega(x, \xi) = H_\mu(\xi)$. به‌طور مشابه، برای هر $n \in \mathbb{N}$، مجموعهٔ $D_n \subseteq X$ موجود است به‌گونه‌ای که $\mu(D_n) = ۱$ و برای هر $x \in D_n$،

$$\Omega(x, \bigvee_{i=۱}^{n} T^{-t_i}\xi) = H_\mu(\bigvee_{i=۱}^{n} T^{-t_i}\xi).$$

قرار دهید $D = \bigcap_{n=۱}^{\infty} D_n$، در این صورت $\mu(D) = ۱$ و برای هر $x \in D$ داریم $J_\Gamma(x, \xi) = h_{\mu,\Gamma}(T, \xi)$. انتگرال‌گیری از طرفین رابطهٔ اخیر منجر به نتیجهٔ مورد نظر برای اندازه‌های ارگودیک می‌شود. اکنون فرض کنید $\mu \in M(X, T)$. چون مجموعهٔ

اندازه‌های ارگودیک متناهی است، پس اندازه‌های $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k \in E(X,T)$ و اعداد $0 \leq \lambda_i \leq 1$ $(1 \leq i \leq k)$ موجودند به‌گونه‌ای $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ و $\mu = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu_i$. اکنون به کمک گزاره ۲.۲ و برقراری حکم برای اندازه‌های ارگودیک، داریم

$$\int_X J_\Gamma(x,\xi)d\mu(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int_X J_\Gamma(x,\xi)d\mu_i(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i h_{\mu_i}(T,\xi) = h_\mu(T,\xi). \tag{۴.۳}$$

در نهایت، حکم با سوپریمم‌گیری از رابطهٔ اخیر بر کلیهٔ افرازهای اندازه‌پذیر به دست می‌آید. $\square$

ویژگی‌های زیر در مرجع [۱] ثابت شده‌اند.

گزاره ۷.۳. ۱. فرض کنید $\Gamma = \{t_i\}_{i \geq 1}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد صحیح بوده و $k \in \mathbb{N}$. اگر $T : X \to X$ تابعی حافظ اندازهٔ μ بوده و ξ افرازی اندازه‌پذیر از X باشد، آنگاه

$$h_{\mu,\Gamma}(T,\xi) = h_{\mu,\sigma^k(\Gamma)}(T,\xi),$$

که در آن $\sigma : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ نگاشت انتقال است. به‌طور خاص،

$$h_{\mu,\Gamma}(T) = h_{\mu,\sigma^k(\Gamma)}(T).$$

۲. فرض کنید $\Gamma = \{k^n\}_{n \geq 1}$ و ξ افرازی اندازه‌پذیر از X باشد. اگر T تابعی حافظ اندازهٔ μ باشد، آنگاه برای هر $m \in \mathbb{N}$،

$$h_{\mu,\Gamma}(T,\xi) = h_{\mu,\Gamma}(T^{k^m},\xi),$$

و به‌طور خاص

$$h_{\mu,\Gamma}(T) = h_{\mu,\Gamma}(T^{k^m}).$$

گزارهٔ بعدی نسخهٔ موضعی از گزاره ۷.۳ است.

گزاره ۸.۳. فرض کنید $T : X \to X$ یک دستگاه دینامیکی فشرده باشد که حافظ اندازهٔ μ است و به‌علاوه، ξ افرازی اندازه‌پذیر از X باشد.

۱. اگر $\Gamma = \{t_i\}_{i \geq 1}$ دنباله‌ای از اعداد طبیعی باشد، آنگاه برای تقریباً هر $x \in X$ داریم $J_\Gamma(x,\xi) = J_{\sigma^k(\Gamma)}(x,\xi)$.

۲. اگر $\Gamma = \{k^n\}_{n \geq 1}$ آنگاه برای هر $m \in \mathbb{N}$ رابطهٔ $J_\Gamma^T(x,\xi) = J_\Gamma^{T^{k^m}}(x,\xi)$ برای تقریباً هر $x \in X$ برقرار است، که در آن J_Γ^T و $J_\Gamma^{T^{k^m}}$ به‌ترتیب نگاشت‌های Γ- آنتروپی موضعی متناظر با T و T^{k^m} هستند.

اثبات. ۱. توجه کنید که برای $n \in \mathbb{N}$ داریم $\bigvee_{i=k+1}^{n} T^{-t_i}\xi < \bigvee_{i=1}^{n} T^{-t_i}\xi$. بنابراین، طبق لم ۵.۳ داریم

$$\Omega(x, \bigvee_{i=k+1}^{n} T^{-t_i}\xi) \leq \Omega(x, \bigvee_{i=1}^{n} T^{-t_i}\xi).$$

با تقسیم رابطهٔ اخیر بر n و میل دادن n به بی‌نهایت، خواهیم داشت

$$J_{\sigma^k(\Gamma)}(x,\xi) \leq J_\Gamma(x,\xi),$$

و یا به‌طور معادل

$$J_\Gamma(x,\xi) - J_{\sigma^k(\Gamma)}(x,\xi) \geq 0. \tag{۵.۳}$$

از طرف دیگر، با به‌کارگیری رابطه (۴.۳) و گزاره ۷.۳ خواهیم داشت

$$\int_X (J_\Gamma(x,\xi) - J_{\sigma^k(\Gamma)}(x,\xi))d\mu(x) = h_{\mu,\Gamma}(T,\xi) - h_{\mu,\sigma^k(\Gamma)}(T,\xi) = 0. \tag{۶.۳}$$

نتیجه از روابط (۵.۳) و (۶.۳) حاصل می‌شود.

۲. ابتدا توجه کنید که $k^m\Gamma = \{k^{n+m}\}_{n\geq ۱} = \sigma^m(\Gamma)$. همچنین، به‌سادگی مشاهده می‌شود که اگر ξ افرازی از X باشد، آنگاه

$$J^T_{\sigma^m(\Gamma)}(x,\xi) = J^T_{k^m\Gamma}(x,\xi) = J^{T^{k^m}}_\Gamma(x,\xi).$$

بنابراین، با توجه به قسمت ۱، داریم $J^{T^{k^m}}_\Gamma(x,\xi) \leq J^T_\Gamma(x,\xi)$ و یا به‌طور معادل

$$J^T_\Gamma(x,\xi) - J^{T^{k^m}}_\Gamma(x,\xi) \geq ۰. \qquad (۷.۳)$$

از طرف دیگر، با به‌کارگیری (۴.۳) و قسمت ۲ از گزاره ۷.۳ خواهیم داشت

$$\int_X (J^T_\Gamma(x,\xi) - J^{T^{k^m}}_\Gamma(x,\xi))d\mu(x) = h_{\mu,\Gamma}(T,\xi) - h_{\mu,\Gamma}(T^{k^m},\xi) = ۰. \qquad (۸.۳)$$

در نهایت، حکم از روابط (۷.۳) و (۸.۳) به دست می‌آید. □

۴ نتیجه‌گیری

در این مقاله، رویکردی موضعی به مفهوم آنتروپی دنباله‌ای دستگاه‌های دینامیکی فشرده با تعداد متناهی اندازهٔ ارگودیک ارائه شده است. متناظر با هر دنبالهٔ صعودی $\Gamma = \{t_i\}_{i\geq ۱}$ از اعداد صحیح مثبت، یک تابع J_Γ تعریف کردیم که در واقع یک تابع آنتروپی دنبالهٔ موضعی است، به این معنا که انتگرال J_Γ نسبت به هر اندازهٔ پایای μ به $h_{\mu,\Gamma}(T)$ منجر می‌شود. توجه داشته باشید که مطالعهٔ موضعی آنتروپی دستگاه‌های دینامیکی ممکن است در اندازه‌گیری اطلاعات تولیدشده توسط یک دستگاه در ناحیهٔ خاصی از فضا به‌جای کل فضا اعمال شود. برای مثال، این رویکرد برای تعریف محتوای اطلاعاتی یک ساختار مولکولی، با استفاده از آنتروپی موضعی به کار گرفته می‌شود.

References

[1] Balibrea, F., Jiménéz Lopéz, V., & Cánovas, J.S. (1999). Some results on entropy and sequence entropy. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 9, 1731–1742. DOI: https://doi.org/10.1142/s0218127499001218.

[2] Barreira, L., Pesin, Ya., & Schemling, J. (1997). On a general concept of multifractality: Multifractal spectra for dimensions, entropies, and Lyapunov exponents. Multifractal rigidity. *Chaos*, 7, 27–38. DOI: https://doi.org/10.1063/1.166232.

[3] Brin, M., & Katok, A. (1983). On local entropy in geometric dynamics. 30–38, *New York, Springer-Verlag*, (Lecture Notes in Mathematics 1007). DOI: https://doi.org/10.1007/bfb0061408.

[4] Cánovas, J.S. (2007). Topological sequence entropy and topological dynamics of interval maps. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal*, 14, 47–54.

[5] Cánovas, J.S., & Jimémez López, V. (2002). Computing explicitly topological sequence entropy: the unimodal case. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 52, 1093–1133. DOI: https://doi.org/10.5802/aif.1913.

[6] Kushnirenko, A.G. (1967). On Metric invariants of entropy type. *Russ. Math. Surv*, 22, 53–61. DOI: https://doi.org/10.1070/rm1967v022n05abeh001225.

[7] McMillan, B. (1953). The basic theorems of information theory. *Ann. Math. Statist*, 24, 196–219. DOI: https://doi.org/10.1214/aoms/1177729028.

[8] Newton, D. (1970). On Sequence entropy II. *Math. Syst. Th*, 4, 126–128. DOI: https://doi.org/10.1007/bf01691096.

[9] Pesin, Ya. (1977). Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. *Russian Math. Surveys*, 32, 54–114. DOI: https://doi.org/10.1070/rm1977v032n04abeh001639.

[10] Pesin, Ya., & Weiss, H. (1997). A multifractal analysis of equilibrium measures for conformal expanding maps and Moran-like geometric constructions. J. Stat. Phys, 86, 233–275. DOI: https://doi.org/10.1007/bf02180206.

[11] Pesin, Ya., & Weiss, H. (1997). The multifractal analysis of Gibbs measures: Motivation, mathematical foundation, and examples. *Chaos*, 7, 89–106. DOI: https://doi.org/10.1063/1.166242.

[12] Rahimi, M. (2015). A local approach to g-entropy. *Kybernetika*, 51, 231–245. DOI: https://doi.org/10.14736/kyb-2015-2-0231.

[13] Rahimi, M., & Assari, A. (2020). Mutual Entropy Map for Continuous Systems on Compact Metric Spaces. *Mathematical Analysis and Convex Optimization*, 1, 49–55. DOI: https://doi.org/10.29252/maco.1.1.6.

[14] Rahimi, M., & Assari, A. (2021). On local metric pressure of dynamical systems. *Periodica Mathematica Hungarica*, 82, 223–230. DOI: https://doi.org/10.1007/s10998-020-00355-w.

[15] Rahimi, M., Assari, A., & Ramezani, F. (2016). A local approach to Yager entropy of dynamical systems. *International Journal of Fuzzy Systems*, 18, 98–102. DOI: https://doi.org/10.1007/s40815-015-0062-z.

[16] Rahimi, M., & Mohammadi Anjedani, M. (2018). A local view on the Hudetz correction of the Yager entropy of dynamical systems. *International Journal of General Systems*, 48, 321–333. DOI: https://doi.org/10.1080/03081079.2018.1552688.

[17] Rahimi, M., & Shakouri, A. (2019). On Hudetz entropy localization. *Fuzzy Sets and Systems*, 367, 96–106. DOI: https://doi.org/10.1016/j.fss.2018.11.005.

[18] Rokhlin, V.A. (1959). Entropy of metric automorphism. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 124, 980–983.

[19] Takens, F., & Verbitski, E. (1999). Multifractal Analysis of Local Entropies for Expansive Homeomorphisms with Specification. *Commun. Math. Phys*, 203, 593–612. DOI: https://doi.org/10.1007/s002200050627.

[20] Walters, P. (1982). An introduction to ergodic theory. *Springer-Verlag*. DOI: https://doi.org/10.1007/springerreference_60354.

[21] Zhao, Y., & Pesin, Y. (2015). Scaled entropy for dynamical systems. *J. Stat. Phys*, 158, 447–475. DOI: https://doi.org/10.1007/s10955-014-1133-5.

[22] Zhao, Y., & Pesin, Y. (2016). Errutum to: Scaled entropy for dynamical systems. *J. Stat. Phys*, 162, 1654–1660. DOI: https://doi.org/10.1007/s10955-016-1451-x.