Measure Algebras and Applications

Complete Magic Labeling of Vertices of the Complete Bipartite Graphs

Gholam Hassan Shirdel[1] , **Zahra Sadat Emamy**[2]

1. Corresponding Author, Department of Mathematics and Computer Sciences, Faculty of Science, University of Qom, Qom, Iran. Email: g.h.shirdel@qom.ac.ir
2. Master of Science from Department of Mathematics, Sharif University, Tehran, Iran. Email: zahra_emamy@alum.sharif.ac.ir

Article Info	ABSTRACT

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 17 March 2024
Received in revised form:
17 May 2024
Accepted: 17 June 2024
Published Online:
20 August 2024

Keywords:
Magic Graph,
Complete Magic Labeling of Vertices,
Complete Graph,
Complete Bipartite Graph

2020 Mathematics Subject Classification: 20F05, 05C05

In this paper, first, we explain the concept of magic graphs, and then we describe the complete magic labeling of the vertices of a graph. Also, some conditions that must be met so that this labeling can be done in complete bipartite graphs are stated.

Cite this article: Shirdel, G.H., & Emamy, Z.S. (2024). Complete Magic Labeling of Vertices of the Complete Bipartite Graphs. *Measure Algebras and Applications*, 2(1), 14–29. http://doi.org/10.22091/MAA.2024.10537.1017

Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/MAA.2024.10537.1017

Extended Abstract

One of the useful operators in graphs is labeling. A labeling for a graph is a mapping in which elements of the graph are mapped to numbers. These numbers are usually positive or non-negative integers. If the domain of the map is the set of vertices, edges, or both, then the labeling is called vertices labeling, edge labeling, or complete labeling, respectively. In 1963, the concept of a magic graph was defined by Sedlacek. A graph is called magic if there exists a mapping from the graph to the set of positive integer numbers, so that firstly, for each different two edges, the values of the mapping are also different, and secondly for any arbitrary vertex of the graph, the sum of the mapping values of the edges that coincide with vertex should be equal to a specific number. Magic labelings are one-to-one mappings and cover with a constant sum property. A labeling is called edge-magic if the sum of the labels of the elements connected to an edge is a fixed number. This constant value is independent of edge selection. If the same property holds for an arbitrary vertex in the graph, then the labeling is called vertex-magic. In this paper, first, we defined the concept of complete magic labeling of vertices and unbalanced complete bipartite graphs. Then, we showed that complete graphs can have complete magic labeling of vertices. For those complete graphs that did not have the necessary conditions, we described how to construct the complete magic labeling of the vertices using the magic square. Also, we have described and explained the complete magic labeling techniques of vertices in the case of complete bipartite graphs. Now, we state the purpose of this paper with more details.

Consider the graph G = (V, E) a simple, finite and undirected graph. A labeling or valuation for a graph is a mapping in which elements (nodes and or edges) are mapped to numbers. These numbers are usually positive or non-negative integers. If the mapping domain is the set of vertices, the set of edges, or the set of their union, then labeling is called vertex labeling, edge labeling, or complete labeling, respectively. The concept of magic graph was first introduced in 1963 by Sedlacek. A graph G is called magic if there exists a mapping f from E(G) to the set of positive integers such that:

1. For both arbitrary edges $\mathbf{e_i}$ and $\mathbf{e_j}$ if $\mathbf{e_i} \neq \mathbf{e_j}$, then $\neq \mathbf{f}\,(\mathbf{e_i}) \neq \mathbf{f}\,(\mathbf{e_j})$.
2. For a predetermined fixed number λ and for any arbitrary vertex $\mathbf{v} \in \mathbf{V(G)}$, we have:

$$\sum_{\mathbf{e} \in \mathbf{E(G)}} \rho\,(\mathbf{v},\mathbf{e})\, f(e) = \lambda.$$

So that

$$\rho\,(\mathbf{v},\mathbf{e}) = \begin{cases} \mathbf{1} & , \quad \textbf{If e is adjacent to node v} \\ \mathbf{0} & , \quad \textbf{otherwise} \end{cases}$$

Magic labels are one-to-one mappings and overlay with a constant sum property. A labeling is called edge-magic if the sum of the labels of the elements connected to an edge is a fixed number. This constant value is independent of edge selection. If the same property is true for an arbitrary vertex, then such a labeling is called a magic-vertex.

Vertices complete magic labeling of a complete bipartite graph

We show the set of vertices and edges of the graph $\mathbf{K_{m,n}}$ as follows:

V=$\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_m}, \mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \ldots, \mathbf{y_n}\}$, E=$\{\mathbf{x_i}\, \mathbf{y}_{\mathrm{j}} : \mathbf{1} \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{m} \ , \ \mathbf{1} \leq \mathbf{j} \leq \mathbf{n}\}$. Therefore, we can show the complete vertices labeling of the graph $\mathbf{K_{m,n}}$ with a matrix as follows:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_{00}} & \cdots & \mathbf{a_{0n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a_{m0}} & \cdots & \mathbf{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a_{i,j}} = \begin{cases} \mathbf{f}\left(\mathbf{x_i}\right) & \mathbf{j = 0} \\ \mathbf{f}\left(\mathbf{y_j}\right) & \mathbf{i = 0} \\ \mathbf{f}\left(\mathbf{x_i y_j}\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

***Definition* 0.1.** *Graph $K_{m,n}$ is said to be unbalanced if $|m-n| > 1$.*

In the following theorem, we show that a complete bipartite unbalanced graph cannot have complete magic labeling of vertices.

***Theorem* 0.2.** *If $K_{m,n}$ is unbalanced, then it cannot have complete magic labeling of vertices.*

Constructing complete magic vertex labeling for graph $\mathbf{K_{m,n}}$

In this section, we want to present how to make a complete vertices magic labeling of graph $K_{m,n}$. Since this magic labeling is done by using the magic square, we first define the magic square.

***Definition* 0.3.** *A magic square with order n is a table $n \times n$ whose houses are filled with positive numbers $1, 2, \ldots, n^2$, so that the sum of the numbers of each row, each column or its diagonal is a fixed number.*

***Theorem* 0.4.** *For every $m > 1$, $K_{m,n}$ has complete vertices magic labeling with magic constant*

$$\frac{1}{2}\left[(m+1)^3 - (m+1)\right].$$

According to what was stated, it is possible to create a complete magic vertex labeling for complete bipartite graphs. This is an important achievement in the field of graph labeling.

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۳، دوره ۲، شماره ۱، ص ۲۹-۱۴

برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی گراف کامل دوبخشی

غلام حسن شیردل [۱] ✉ **، زهرا سادات امامی** [۲]

۱. نویسندهٔ مسئول، عضو هیئت‌علمی دانشگاه قم. رایانامه: g.h.shirdel@qom.ac.ir
۲. فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی شریف. رایانامه: zahra_emamy@alum.sharif.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۲۷
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۲/۲۸
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۳/۲۸
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۵/۳۰

کلمات کلیدی:
گراف جادویی،
برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی،
گراف کامل،
گراف دوبخشی کامل

رده‌بندی ریاضی:
20F05, 05C05

چکیده

در این مقاله، ابتدا مفهوم گراف‌های جادویی را بیان کرده و سپس برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی یک گراف را توصیف می‌کنیم و شرایطی که باید برقرار باشند تا این برچسب‌گذاری را بتوان در گراف‌های کامل دوبخشی انجام داد مطرح کرده و اثبات آن‌ها را ذکر می‌کنیم.

استناد: شیردل، غلام حسن.، امامی، زهرا سادات. (۱۴۰۳). برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی گراف کامل دوبخشی. جبرهای اندازه و کاربردها، ۲(۱)، ۲۹-۱۴.

http://doi.org/10.22091/MAA.2024.10537.1017

ناشر: دانشگاه قم.

۱ معرفی

گراف G را یک گراف ساده، متناهی و بدون جهت در نظر بگیرید [۱۱]. فرض کنید $V(G)$ مجموعهٔ رأس‌ها و $E(G)$ مجموعهٔ یال‌ها باشند به‌طوری‌که $|V(G)| = n$ و $|E(G)| = m$. یک برچسب‌گذاری [۱] یا ارزش‌گذاری [۲] برای یک گراف، نگاشتی است که در آن عناصری (رأس‌ها، یال‌ها و یا اجتماع آن‌ها) به اعدادی نگاشته می‌شوند. این اعداد معمولاً اعداد صحیح مثبت یا نامنفی هستند. اگر دامنهٔیک نگاشت به ترتیب مجموعهٔ رئوس، مجموعهٔ یال‌ها و یا مجموعهٔ $V(G) \cup E(G)$ گراف باشد، آنگاه برچسب‌گذاری را به ترتیب برچسب‌گذاری رأسی [۳]، برچسب‌گذاری یالی [۴] و یا برچسب‌گذاری کامل [۵] گویند. مفهوم گراف جادویی برای اولین بار در سال ۱۹۶۳ توسط سِدلیسِک [۶] معرفی شد. گراف G را جادویی می‌نامند اگر نگاشت f از $E(G)$ به مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت وجود داشته باشد به‌طوری‌که [۹]

۱. برای هر دو یال دلخواه e_i, e_j که $e_i \neq e_j$ داشته باشیم $f(e_i) \neq f(e_j)$.

۲. برای هر رأس دلخواه $v \in V(G)$ داشته باشیم $\sum_{e \in E(G)} \rho(v, e) f(e) = \lambda$.

اگر یال e مجاور با رأس v باشد، آنگاه $\rho(v, e) = ۱$ و در غیر این صورت برابر صفر است. برچسب‌گذاری‌های جادویی، نگاشت‌های یک‌به‌یک و پوشایی [۷] با ویژگی مجموع ثابت [۸] هستند. یک برچسب‌گذاری را یال-جادویی [۹] می‌نامند اگر مجموع برچسب‌های عناصر متصل به یک یال عدد ثابتی باشد، این مقدار ثابت مستقل از انتخاب یال است. اگر همین ویژگی برای یک رأس دلخواه در گراف برقرار باشد چنین برچسب‌گذاری را رأس-جادویی [۱۰] می‌نامند. گراف‌های جادویی که در آن برای هر یال $e \in E(G)$، $f(e)$ یک عدد اول منحصربه‌فرد باشد گراف‌های جادویی-اول [۱۱] نامیده می‌شوند، در واقع دامنه و برد تابع f برای چنین گراف‌هایی به‌صورت $f : E(G) \to \text{Prime positive integers}$ تعریف می‌شود. اِستِوارت [۱۲] در [۱۰] ثابت کرد، گراف دوبخشی $k_{۳,۳}$ یک گراف جادویی- اول با ثابت جادویی $k = ۱۳۹$ است. گراف جادویی G را فوق جادویی [۱۳] گویند اگر برچسب‌گذاری جادویی f وجود داشته باشد به‌طوری‌که مجموعهٔ $\{f(e) : e\}$ شامل اعداد صحیح متوالی باشد به‌عبارت‌دیگر تابع f به‌صورت $f : E(G) \to \text{Consecutive integers}$ تعریف می‌شود. در [۱۰] نشان داده شده است که گراف k_n زمانی که $n > ۵$ و $n \not\equiv ۰ \pmod 4$، یک گراف فوق جادویی است همچنین در مرجع [۱۰] اثبات شده است که گراف $k_{n,n}$ برای $n \geq ۳$ فوق جادویی است. نگاشت یک‌به‌یک و پوشای $f : V \cup E \to \{۱, ۲, \cdots, m+n\}$ را برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی [۱۴] برای گراف G گوییم اگر عدد ثابت k وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر رأس دلخواه $u \in V(G)$ رابطه (۱.۱) برقرار باشد

$$f(u) + \sum_{v \in N(u)} f(uv) = k. \tag{۱.۱}$$

در رابطه (۱.۱) مجموعهٔ $N(u)$ شامل همهٔ رئوسی است که بین آن‌ها و رأس u یالی در گراف G وجود داشته باشد. این نوع برچسب‌گذاری جادویی در سال ۲۰۰۲ توسط مَک دوگِل [۱۵] و همکاران معرفی شد [۴]. در رابطه (۱.۱) اگر تابع f که برچسب یال‌ها را تعیین می‌کند به‌صورت $f : E(G) \to \{۱, ۲, \cdots, q\}$ تعریف شود چنین برچسب‌گذاری را کیو-یالی می‌نامند. برچسب‌گذاری کیو-یالی در سال ۲۰۱۲ برای اولین بار توسط ماریموثو [۱۶] معرفی شد[۵].

[1] Labeling
[2] Valuation
[3] Vertex-labeling
[4] Edge-labeling
[5] Total-labeling
[6] J.Sedlacek
[7] Bijection mapping
[8] Constant sum
[9] Edge magic
[10] Vertex magic
[11] Prime-magic
[12] B. M. Stewart
[13] Super magic
[14] Vertex magic total labeling
[15] J. A. MacDougall
[16] G. Marimuthu

۲ برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی گراف کامل دوبخشی

مجموعهٔ رئوس و یال‌های گراف دوبخشی $k_{m,n}$ را به‌صورت رابطه (۱.۲) نشان می‌دهیم:

$$V = \{x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n\},$$
$$E = \{x_i y_j : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \tag{۱.۲}$$

بنابراین برچسب‌گذاری کامل رأسی گراف $k_{m,n}$ را می‌توانیم با یک آرایهٔ $(n+1) \times (m+1)$ نشان دهیم:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} \\ \hline a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right]$$

که $a_{00} = 0$، $a_{i0} = f(x_i)$، $a_{0j} = f(y_j)$ و $a_{ij} = f(x_i y_j)$. آرایهٔ A را نمایش ماتریسی f گوییم. ویژگی جادویی بودن ایجاب می‌کند که مجموع هر سطر و هر ستون دلخواه به‌جز سطر و ستون صفرم باید برابر با مقدار جادویی k باشد و مقادیر موجود در عناصر ماتریس A جایگشت‌های متفاوت $\{0, 1, \cdots, mn+m+n\}$ هستند.

تعریف ۱.۲. گراف $k_{m,n}$ را نامتعادل [1] گوییم اگر $1 <| m-n |$ باشد.

در قضیه ۲.۲ نشان می‌دهیم که یک گراف نامتعادل دوبخشی کامل $k_{m,n}$ نمی‌تواند دارای برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی باشد.

قضیه ۲.۲ ([۴]). اگر $k_{m,n}$ نامتعادل باشد، نمی‌تواند دارای برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی باشد.

اثبات. بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم $m \leq n$. فرض کنید $k_{m,n}$ دارای برچسب‌گذاری جادویی کامل با ثابت جادویی k باشد. برای این گراف $V = m+n$ و $E = mn$. بنابراین مجموعهٔ برچسب‌های $k_{m,n}$، $\{1, 2, \cdots, mn+m+n\}$ است. مجموع وزن‌های رئوس $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ حداقل به‌صورت زیر است:

$$mk \geq 1 + 2 + \cdots + (mn+m) = \frac{(mn+m)(mn+m+1)}{2} k \geq \frac{(n+1)}{(mn+m+1)} \tag{۲.۲}$$

به بیان دیگر، مجموع وزن‌های $\{y_1, \cdots, y_n\}$ حداکثر به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} nk &\leq (m+1) + (m+2) + \cdots + (mn+m+n) \\ &= \frac{(mn+m+n)(mn+m+n+1) - m(m+1)}{2} \\ &= \frac{(mn^2 + 2mn + n^2 + n)}{2} \\ k &\leq \frac{(m+1)}{(mn+2m+n+1)} \end{aligned} \tag{۳.۲}$$

با در نظر گرفتن (۲.۲) و (۳.۲) خواهیم داشت:

$$(n+1)(mn+m+1) \leq (mn+2m+n+1)(m+1)$$
$$m \geq n - 2 + \frac{2}{n+2} \to m \geq n-1$$

ازآنجاکه فرض مسئله $m \leq n$ بود پس یا $m = n$ و یا $m = n-1$. روند اثبات برای حالت $m \leq n$ کاملاً مشابه است. ☐

[1] Unbalanced

۱.۲ ساخت برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی برای گراف $k_{m,n}$

در این قسمت می‌خواهیم نحوهٔ ساخت برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی گراف $k_{m,n}$ را برای حالاتی که وجود آن توسط قضیه ۲.۲ رد نشده است؛ ارائه دهیم. ازآنجاکه با استفاده از مربع جادویی [1] این برچسب‌گذاری جادویی انجام می‌شود؛ در تعریف (۳.۲)، مفهوم مربع جادویی را توضیح داده‌ایم.

تعریف ۳.۲. مربع جادویی یا وفقی از مرتبهٔ n، جدولی $n \times n$ است که خانه‌های آن با اعداد مثبت $1, 2, \cdots, n^2$ به ترتیبی پر شده‌اند، که مجموع اعداد هر ردیف افقی، هر ستون عمودی و یا هر قطر آن عددی ثابت است

قضیه ۴.۲ (گراف $k_{m,m}$). برای هر $m > 1$، $k_{m,m}$ دارای برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی با ثابت جادویی $\frac{1}{2}[(m+1)^3-(m+1)]$ است.

اثبات. $S = (s_{ij})$ را یک مربع جادویی از مرتبهٔ $m+1$ روی مجموعهٔ اعداد $1, \cdots, (m+1)^2$ در نظر بگیرید. فرض کنید سطرها و ستون‌های S با اعداد $0, 1, \cdots, m$ شماره‌گذاری شده‌اند. هر سطر و ستون S با اعداد $0, 1, \cdots, m$ شماره‌گذاری شده است. جمع عناصر هر سطر یا ستون این مربع جادویی برابر $\frac{1}{2}(m+1)(m^2+2m+2)$ است. ماتریس $A = (a_{ij})$ را با درایه‌های $a_{ij} = s_{ij} - 1$ تشکیل می‌دهیم ازآنجاکه مربع S جادویی است مجموع عناصر سطرها یا ستون‌های A برابر مقدار

$$k = \frac{1}{2}(m+1)(m^2+2m+2) - (m+1) \tag{۴.۲}$$

است و درایه‌های ماتریس A از مجموعهٔ $\{0, \cdots, (m+1)^2 - 1\}$ انتخاب می‌شوند (برای مطالعهٔ نحوهٔ ساخت استاندارد مربع‌های جادویی از یک مرتبهٔ دلخواه به پیوست مراجعه کنید). بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم سطرها و ستون‌های A را جایگشت دهیم تا درایهٔ $a_{00} = 0$ شود (این کار ممکن است باعث شود مجموع عناصر قطرها برابر با ثابت جادویی نباشد اما به این ویژگی در ساخت نیاز نداریم). با انجام این کار ماتریس A تبدیل به نمایش ماتریسی برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی f با ثابت k که در معادله (۴.۲) نشان داده شده است، می‌شود. □

در ادامه برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی را برای گراف $k_{m,m+1}$ (m فرد) می‌سازیم. این برچسب‌گذاری برای گراف $k_{1,2}$ به‌سادگی ساخته می‌شود. حالا فرض می‌کنیم $m = 2n-1$ که $n > 1$. ساخت برچسب‌گذاری برای n داده‌شده با تعریف دو ماتریس $(2n-1 \times 2n)$ به نام‌های $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ انجام می‌شود. در ادامه با استفاده از ماتریس‌های A و B ماتریس $(2n \times 2n+1)$ به نام C را می‌سازیم و نشان می‌دهیم C نمایش ماتریسی برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی گراف است. برای سازگاری با تعریف نمایش ماتریسی برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی فرض می‌کنیم سطر اول و ستون اول ماتریس C با عدد صفر پر شده‌اند. درایه‌های ماتریس $A = (a_{ij})$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$a_{ij} = \begin{cases} m+1-j, & \text{if } \; i+j \; \text{ is odd}, \quad j+i \le m+1 \\ & \quad \text{or } \; i+j \text{ is even}, \quad j+i > m+1 \\ j-1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

مجموع سطری و ستونی ماتریس A را می‌خواهیم محاسبه کنیم. اگر i زوج باشد قرار می‌دهیم $i = 2t$ و مجموع درایه‌های سطر i به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2n} a_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,2k-1} + a_{i,2k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-t} (a_{i,2k-1} + a_{i,2k}) + \sum_{k=n-t+1}^{n} (a_{i,2k-1} + a_{i,2k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-t} ((2n-2k+1) + (2k-1)) + \sum_{k=n-t+1}^{n} ((2k-2) + (2n-2k)) \end{aligned}$$

[1] Magic square

$$= \sum_{k=1}^{n-t}(2n) + \sum_{k=n-t+1}^{n}(2n-2)$$
$$= 2n^2 - i$$

اگر i فرد باشد قرار می‌دهیم $i = 2t+1$:

$$\sum_{j=1}^{2n} a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,2k-1} + a_{i,2k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n-t} a_{i,2k-1} + \sum_{k=1}^{n-t-1} a_{i,2k} + \sum_{k=n-t+1}^{n} a_{i,2k-1} + \sum_{k=n-t}^{n} a_{i,2k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n-t}(2k-2) + \sum_{k=1}^{n-t-1}(2n-2k) + \sum_{k=n-t+1}^{n}(2n-2k+1) + \sum_{k=n-t}^{n}(2k-1)$$
$$= 2n^2 - i.$$

در هر حالت، سطر i ام دارای مجموع $2n^2 - i$ است. مجموع ستونی ساده‌تر محاسبه می‌شود:

ستون j ام شامل n درایه برابر با $j-1$ و $n-1$ درایه برابر $2n-j$ است. بنابراین برای هر j،

$$\sum_{i=1}^{2n-1} a_{ij} = n(j-1) + (n-1)(2n-j)$$
$$= 2n^2 - 3n + j.$$

ستون‌های اول و آخر ماتریس B دارای مقادیر $0, 1, \ldots, 2n-3, 2n-2$ هستند پس

$$b_{1j} = b_{mj} = m - i - 1.$$

ستون دوم با مقادیر فرد $2n-5, 2n-7, \ldots, 1$ شروع می‌شود و با مقادیر زوج $2n-2, 2n-4, \ldots, 0$ ادامه می‌یابد و به $2n-3$ ختم می‌شود. ستون‌های دیگر همین ترکیب از اعداد را به‌صورت معکوس دارند بنابراین

$$b_{i,j} = b_{i+1,j-1}$$

(ذکر این نکته الزامی است که اندیس‌ها در mod (2n,2+1) محاسبه می‌شوند). در هر سطر B، در هر یک از ستون‌های ۲ تا $2n-1$ همهٔ اعداد مجموعهٔ $0, 1, \ldots, m-2$ حضور دارند به‌جز

$$x_i = 2n - 1 - 2i \text{ is missing from row i}, \; i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$x_i = 4n - 2 - 2i \text{ is missing from row i}, \; i = n, n+1, \ldots, 2n-1.$$

بنابراین مجموع سطری به‌صورت زیر است:

$$\sum_{j=1}^{m} b_{ij} = 2(2n-i-1) + \sum_{k=0}^{2n-2} k - x_i$$
$$= 2n^2 + n - 1 - 2i - x_i$$

بنابراین

$$\sum_{j=1}^{m} b_{ij} = 2n^2 - n$$

زمانی که

$$i \leq n-1,$$

و

$$\sum_{j=1}^{m} b_{ij} = 2n^2 - 3n + 1$$

زمانی که

$$i \geq n.$$

بنابراین هر ستون جایگشتی از اعداد $2n-2, \dots, 1, 0$ است. جمع هر ستون به‌صورت زیر است:

$$\sum_{i=1}^{2n-1} b_{ij} = 2n^2 - 3n + 1.$$

حال ماتریس $C_{2n\times(2n-1)}$ را به‌صورت زیر می‌سازیم:

$$c_{00} = 0$$

$$c_{0j} = 4n^2 + 2n - j,$$

$$1 \leq j \leq 2n,$$

$$c_{i0} = \begin{cases} i, & 1 \leq i \leq n-1 \\ 4n^2 - 2n + i, & n \leq i \leq 2n-1, \\ a_{ij} + 2nb_{ij} + n, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

قضیه ۵.۲. ماتریس C نمایش ماتریسی برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی گراف $k_{2n-1,2n}$ با ثابت جادویی $4n^3 + 2n^2$ است.

اثبات. لازم است نشان دهیم مجموع درایه‌های هر سطر و ستون ماتریس C (به‌جز احتمالاً سطر و ستون صفر) برابر $4n^3 + 2n^2$ است و هر عدد صحیح در بازهٔ صفر تا $v + e = 4n^2 + 2n - 1$ دقیقاً یک بار در C تکرار می‌شود (می‌دانیم عدد صفر در درایهٔ $(0,0)$ ظاهر خواهد شد). مجموع سطری ماتریس C به‌صورت زیر است:

$$\sum_{j=0}^{2n} c_{ij} = c_{i0} + \sum_{j=1}^{2n} a_{ij} + 2n\sum_{j=1}^{2n} b_{ij} + 2n^2$$

$$= c_{i0} + 2n^2 - i + 2n\sum_{j=1}^{2n} b_{ij} + 2n^2$$

$$= 4n^3 + 2n^2$$

و مجموع ستونی ماتریس C به‌صورت زیر است:

$$\sum_{i=0}^{2n-1} c_{ij} = c_{0j} + \sum_{i=1}^{2n-1} a_{ij} + 2n\sum_{i=1}^{2n-1} b_{ij} + n(2n-1)$$

$$= 4n^2 + 2n - j + 2n^2 - 3n + j + 2n\left(\sum_{i=1}^{2n-1} b_{ij}\right) + n(2n-1)$$

$$= 4n^2 + 2n - j + 2n^2 - 3n + j + 2n(2n^2 - 3n + 1) + n(2n-1)$$

$$= 4n^3 + 2n^2$$

بنابراین مجموع همهٔ سطرها و ستون‌ها (به‌جز اولی) برابر $4n^3+2n^2$ است.
در نهایت، نشان می‌دهیم درایه‌های ماتریس C اعضای مجموعهٔ $0,1,2,\ldots,4n^2-2n-1$ هستند که هر عضو دقیقاً یک بار در C ظاهر می‌شود. مجموعه‌های $0,1,2,\ldots,n-1$ و $4n^2-n,4n^2-n+1,\ldots,4n^2+2n-1$ به ترتیب در اولین سطر و ستون C ظاهر می‌شوند. درایه‌های ماتریس A در بازهٔ بستهٔ $[0,2n-1]$ و درایه‌های ماتریس B در بازهٔ $[0,2n-2]$ قرار دارند. بنابراین درایه‌های ماتریس C (به‌جز سطر و ستون اول) در بازهٔ $[n,3n-1+2n(2n-2)]=[n,4n^2-n-1]$ قرار دارند. در این بازه $4n^2-2n$ عدد وجود دارد و فقط کافی است نشان دهیم درایه‌ها منحصربه‌فرد هستند. برای اثبات این موضوع باید نشان دهیم زوج‌های (a_{ij},b_{ij}) یکتا هستند. اولین و آخرین ستون ماتریس A فقط شامل اعداد ۰ و $2n-1$ هستند و اولین و آخرین ستون ماتریس B شامل اعداد $0,1,\ldots,2n-2$ هستند و اثبات اینکه در این قسمت هیچ زوج تکراری وجود ندارد، ساده است. برای قسمت باقی‌ماندهٔ ماتریس A و ماتریس B توجه کنید که مقدار b_{ij}ها مستقل از انتخاب i و j مقدار ثابت است و درایه‌های ماتریس A همهٔ مقادیر $\{1,2,\ldots,2n-2\}$ را اتخاذ می‌کنند. بنابراین همهٔ زوج‌ها متمایز هستند. درنتیجه هر عدد صحیح در بازهٔ $[1,4n^2-2n-1]$ در ماتریس C دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود. □

حال می‌خواهیم برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی را برای گراف $k_{m,m+1}$ به ازای m زوج بررسی کنیم. در این حالت فرض می‌کنیم $m=2n$. بنابراین $V=4n+1$ و $E=4n^2+2n$ و یک برچسب‌گذاری کامل به $4n^2+6n+1$ برچسب نیاز دارد.

قضیه ۶.۲. یک برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی برای گراف $k_{2n,2n+1}$ با ثابت جادویی $(n+1)(2n+1)^2$ وجود دارد.

اثبات. ماتریس $C=(c_{ij})$ را که نمایش ماتریسی برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی گراف $k_{2n,2n+1}$ است به‌صورت زیر می‌سازیم:

۱. سطر صفرم ماتریس C به‌صورت $\{0,(2n+1)^2,(2n+1)^2+1,\ldots,(2n+1)^2+2n\}$ است به‌عبارت‌دیگر $C_{00}=0$ و $C_{0j}=(2n+1)^2+j-1$.

۲. به‌ازای $1\le i\le 2n$، داریم $c_{i0}=(2n+2)i$.

۳. اگر $1\le i<n$ و $1\le j\le n+1$ یا $n+2\le i\le 2n$ و $n+2\le j\le 2n+1$، آنگاه:
$$c_{ij}=2n(2n+2)-[j+(i-1)(2n+2)].$$

۴. اگر $1\le i<n$ و $n+2\le j\le 2n+1$ یا اگر $n+1<i\le 2n$ و $1\le j\le n+1$، آنگاه:
$$c_{ij}=j+(i-1)(2n+2).$$

۵. اگر $1\le j\le n+1$، آنگاه:
$$c_n,j=n(2n+2)+2n-2j+3,$$
$$c_{n+1,j}=(n-1)(2n-2)+n+j$$
و اگر $n+2\le j\le 2n+1$، آنگاه:
$$c_{n,j}=(n-1)(2n+2)+4n-2j+4,$$
$$c_{n+1,j}=n(2n+2)+j-n-1.$$

در واقع قسمت پنجم می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود:
به‌جز درایهٔ $(0,0)$ باقی درایه‌های سطرهای 0، n و $n+1$ ماتریس C از روی سطرهای ماتریس X که به شکل زیر است

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n+1 \\ 2n+1 & 2n-1 & 2n-3 & \cdots & 1 & 2n & 2n-2 & \cdots & 2 \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n+1 & 1 & 2 & \cdots & n \end{array}\right]$$

با اضافه کردن

$$\begin{bmatrix} (2n+1)^2-1 \\ n(2n+2) \\ (n-1)(2n+2) \end{bmatrix}$$

به هرکدام از $n+1$ ستون اول ماتریس X و اضافه کردن

$$\begin{bmatrix} (2n+1)^2-1 \\ (n-1)(2n+2) \\ n(2n+2) \end{bmatrix}$$

به بقیهٔ ستون‌ها به دست می‌آید. □

به‌وضوح مشخص است که هر سطر X جایگشتی از $1, 2, \ldots, 2n+1$ است. بنابراین سطرهای n و $n+1$ دقیقاً یک بار شامل عناصر مجموعهٔ $(n-1)(2n+2)+1, (n-1)(2n+2)+2, \ldots, (n+1)(2n+2)$ است. زمانی که $1 \leq i < n$، سطرهای i و $2n+1-i$ شامل همهٔ اعداد زیر هستند:

$$\begin{aligned} t+(i-1)(2n+2): &\qquad 1 \leq t \leq 2n+2 \\ t+(2n-i)(2n+2): &\qquad 1 \leq t \leq 2n+2 \end{aligned}$$

در این راستا خواهیم داشت:

$$c_{i0} = 2n+2+(i-1)(2n+2) = i(2n+2) \tag{5.2}$$

$$c_{2n+1-i,0} = 2n+2+(2n-i)(2n+2) \tag{6.2}$$

و بقیهٔ درایه‌ها از قسمت‌های (۳) و (۴) به دست می‌آیند. سطر صفرم ماتریس C طبق تعریف بالا به‌صورت
$[0 \quad (2n+1)^2 \quad (2n+1)^2+1 \quad \ldots \quad (2n+1)^2+2n]$ است. بنابراین دقیقاً شامل هر یک از اعضای مجموعهٔ $\{0, 1, \ldots, 4n^2+6n+1\}$ است.
از (۳) و (۴) داریم:

$$\begin{aligned} c_{ij}+c_{2n+1-i,j} &= j+(i-1)(2n+2)+2n(2n+2)-(j+(i-1)(2n+2)) \\ &= 2n(2n+2) \qquad 1 \leq i < n. \end{aligned}$$

جمع هر ستون ماتریس X برابر $3n+3$ است، پس

$$c_{n,j}+c_{n+1,j}+c_{0j} = (n+1)(8n+1), \quad 1 \leq j \leq 2n+1.$$

بنابراین مجموع ستون j ام ماتریس C به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \sum c_{ij}{}_{i=0}^{2n} &= (n-1)2n(2n+2)+c_{nj}+c_{n+1,j}+c_{0,j} \\ &= (n-1)2n(2n+2)+(n+1)(8n+1) \\ &= (n+1)(2n+1)^2. \end{aligned}$$

مجموع سطر i ام ماتریس C، اگر $i \leq n$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2n+1} c_{ij} &= \sum_{j=1}^{2n+1} j + c_{i0} + n(i-1)(2n+2)+(n+1)(2n-i)(2n+2) \\ &= \binom{2n+2}{2} + (2n+2)i+(2n+2)+n(i-1)+(n+1)(2n-i) \\ &\quad (n+1)(2n+1)+2(n+1)n(2n+1) \\ &= (n+1)(2n+1)^2. \end{aligned}$$

حکم به طریق مشابه برای $i \geq n+1$ به دست می‌آید.

۲.۲ طیف برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی گراف $k_{m,n}$

در این قسمت می‌خواهیم برای گراف‌های $k_{m,n}$ ای که طبق قضیه ۲.۲ می‌دانیم برای آن‌ها برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی وجود دارد مجموعهٔ مقادیر k را حساب کنیم[۵]. این مجموعه را طیف [1] مسئلهٔ برچسب‌گذاری می‌گویند. فرض کنید گراف G دارای یک نگاشت برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی f است. مجموع برچسب‌های یال‌ها را با S_E نشان می‌دهیم و طبق تعریف داریم:

$$S_E = \sum_{x \in E(G)} f(x)$$

با شمارش مجموع برچسب‌ها در همهٔ رئوس خواهیم داشت:

$$S_E + \binom{v+e+۱}{۲} = vk \tag{۷.۲}$$

به‌وضوح

$$\sum_{i=۱}^{e} i \leq S_E \leq \sum_{i=v+۱}^{v+e} i \tag{۸.۲}$$

یا

$$\binom{e+۱}{۲} \leq S_E \leq \binom{e+۱}{۲} + ve. \tag{۹.۲}$$

فرمول‌های (۸.۲) و (۹.۲) می‌تواند کران‌هایی روی طیف برچسب‌گذاری کامل رأسی ایجاد کند. برای گراف $k_{m,m}$ با استفاده از فرمول‌های (۸.۲) و (۹.۲) خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}[(m+۱)^۳ - m^۲] \leq k \leq \frac{۱}{۲}[(m+۱)^۳ + m^۲] \tag{۱۰.۲}$$

ازآنجاکه $k_{m,m}$ یک گراف منظم است قضیهٔ دوگان ([۴]) را می‌توان به کار برد. بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم یک برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی با ثابت جادویی $\frac{۱}{۲}[(m+۱)^۳ + x]$ برای $k_{m,m}$ وجود دارد اگر و تنها اگر $k = \frac{۱}{۲}[(m+۱)^۳ - x]$.

برای گراف $k_{۲,۲}$ از فرمول (۱۰.۲) نتیجه می‌گیریم $۱۲ \leq k \leq ۱۵$ و یک جستجوی کامل نشان می‌دهد برای هر عدد صحیح در بازهٔ $[۱۲, ۱۵]$ حداقل یک برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی وجود دارد. در حقیقت، دقیقاً پنج برچسب‌گذاری جادویی کامل در گراف $k_{۲,۲}$ وجود دارد. نمایش‌های ماتریسی آن‌ها به قرار زیر است:

$$k = ۱۲ : \left[\begin{array}{c|cc} ۰ & ۵ & ۷ \\ \hline ۸ & ۱ & ۳ \\ ۴ & ۶ & ۲ \end{array}\right] \qquad k = ۱۳ : \left[\begin{array}{c|cc} ۰ & ۷ & ۳ \\ \hline ۸ & ۱ & ۴ \\ ۲ & ۵ & ۶ \end{array}\right] \tag{۱۱.۲}$$

$$k = ۱۳ : \left[\begin{array}{c|cc} ۰ & ۴ & ۶ \\ \hline ۷ & ۱ & ۵ \\ ۳ & ۸ & ۲ \end{array}\right] \qquad k = ۱۴ : \left[\begin{array}{c|cc} ۰ & ۵ & ۳ \\ \hline ۶ & ۱ & ۷ \\ ۲ & ۸ & ۴ \end{array}\right] \qquad k = ۱۵ : \left[\begin{array}{c|cc} ۰ & ۴ & ۲ \\ \hline ۵ & ۳ & ۷ \\ ۱ & ۸ & ۶ \end{array}\right] \tag{۱۲.۲}$$

برای گراف $k_{۳,۳}$ از فرمول (۱۰.۲) خواهیم داشت $۲۸ \leq k \leq ۳۶$ و k می‌تواند تمامی مقادیر این بازه را اتخاذ کند. ۳۵ برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی با $k = ۲۸$ وجود دارد. به‌ازای $k = ۳۶$ هفتاد و به‌ازای $k = ۳۵$ چهارصدوهفتادوهفت برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی وجود خواهند داشت. این‌که آیا برای هر مقدار مجاز k در فرمول (۱۰.۲) حداقل یک برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی وجود خواهد داشت یک مسئلهٔ باز است.

---
[1] Spectrum

در حالت $k_{m,m+۱}$ می‌توانیم کران فرمول (۹.۲) را با استفاده از رویه‌ای مشابه اثبات قضیه ۲.۲ بهبود بخشیم، برای این کار $S_۱$ جمع برچسب‌های رئوس مجموعهٔ m تایی و $S_۲$ را جمع برچسب‌های رئوس مجموعهٔ $m+۱$ تایی قرار می‌دهیم. مجدداً S_E را به‌عنوان مجموع برچسب یال‌ها نمایش می‌دهیم. هر یال مجاور با دقیقاً یکی از رئوس هر دو مجموعه است، بر این اساس خواهیم داشت:

$$km = S_۱ + S_E \quad \geq ۱ + ۲ + \ldots + (m + m(m+۱)) \tag{۱۳.۲}$$

بنابراین

$$k \geq \frac{۱}{۲}(m+۱)^۲(m+۲). \tag{۱۴.۲}$$

از طرفی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} k(m+۱) &= S_۲ + S_E \\ &\leq (m+۱) + (m+۲) + \ldots + ((۲m+۱) + m(m+۱)), \\ k &\leq \frac{۱}{۲}(m+۱)(m^۲+۴m+۲) \end{aligned} \tag{۱۵.۲}$$

برای گراف $k_{۱,۲}$، خواهیم داشت $۶ \leq k \leq ۷$ و برای هر دو مقدار، برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی وجود دارد. به‌عبارت‌دیگر

$$\left[\begin{array}{cc|c} ۳ & ۵ & ۰ \\ \hline ۴ & ۲ & ۱ \end{array}\right] : k = ۷ \qquad \left[\begin{array}{cc|c} ۵ & ۴ & ۰ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \end{array}\right] : k = ۶ \tag{۱۶.۲}$$

اگرچه برای گراف $k_{۲,۳}$ مقادیر مجاز k بازهٔ $[۱۸,۲۱]$ است اما فقط برای $k = ۱۸, ۱۹, ۲۰$ می‌توان برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی پیدا کرد. نمایش ماتریسی این برچسب‌گذاری‌ها به قرار زیر است:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۸ & ۹ & ۱۱ & ۰ \\ \hline ۱ & ۶ & ۵ & ۷ \\ ۱۰ & ۴ & ۳ & ۲ \end{array}\right] : k = ۱۹ \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} ۹ & ۱۰ & ۱۱ & ۰ \\ \hline ۱ & ۶ & ۴ & ۷ \\ ۸ & ۲ & ۳ & ۵ \end{array}\right] : k = ۱۸ \tag{۱۷.۲}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۶ & ۹ & ۱۱ & ۰ \\ \hline ۴ & ۸ & ۷ & ۱ \\ ۱۰ & ۳ & ۲ & ۵ \end{array}\right] : k = ۲۰ \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} ۸ & ۹ & ۱۱ & ۰ \\ \hline ۱ & ۷ & ۶ & ۵ \\ ۱۰ & ۳ & ۲ & ۴ \end{array}\right] : k = ۱۹ \tag{۱۸.۲}$$

برای گراف $k_{۲,۳}$ برای همهٔ مقادیر k که $۴۰ \leq k \leq ۴۶$ برچسب‌گذاری جادویی کامل وجود دارد. در این رابطه یک مسئلهٔ باز به قرار زیر است:

برای کدام مقادیر k که در روابط (۱۴.۲) و (۱۵.۲) صدق می‌کنند برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی وجود دارد؟

۳ برچسب‌گذاری جادویی-اول گراف $k_{n,n}$

گراف‌های جادویی که در آن برای هر یال $e \in E(G)$، $f(e)$ یک عدد اول منحصربه‌فرد باشد گراف‌های جادویی-اول [1] نامیده می‌شوند در واقع دامنه و برد تابع f برای چنین گراف‌هایی به‌صورت $f : E(G) \to \text{Prime positive integers}$ تعریف می‌شود. اِستِوارت در [۱۰] ثابت کرد $k_{۳,۳}$ یک گراف جادویی- اول با ثابت جادویی $k = ۱۳۹$ است. کوچک‌ترین مقدار ثابت جادویی k برای گراف جادویی-اول $k_{n,n}$، $n \geq ۳$ چقدر است؟ سِدلیسک نشان داد کوچک‌ترین مقدار k برای گراف جادویی- اول $k_{۳,۳}$ برابر ۵۳ است [۹]. در این بخش می‌خواهیم برچسب‌گذاری جادویی-اول گراف کامل دوبخشی $k_{۴,۴}$ را توصیف کنیم [۱]. ازآنجاکه توزیع اعداد اول، توزیعی نامنظم است؛ ارائهٔ یک قضیهٔ کلی برای پیدا کردن کوچک‌ترین مقدار k برای گراف‌های جادویی-اول $k_{n,n}$، $(n \geq ۵)$ تاکنون حل نشده است و در واقع یک مسئلهٔ باز است.

[1] Prime-magic

قضیه ۱.۳. کوچک‌ترین مقدار k برای گراف جادویی-اول $k_{۴,۴}$ برابر ۱۱۴ است.

اثبات. $A = (f(e_{ij}))$ نمایش ماتریسی برچسب‌گذاری گراف $k_{۴,۴}$ است، درایه‌های A از اعداد اول تشکیل شده‌اند و f برچسب‌گذاری جادویی گراف $k_{۴,۴}$ است. قرار دهید $S = \sum_{i=۱}^{۴} f(e_{ij})$ که e_{ij} یال متصل‌کنندهٔ رأس i و رأس j در گراف $k_{۴,۴}$ است. به‌وضوح $S \geq ۴۳۸$، زیرا $k \equiv ۰ \pmod 2$ و $S = ۴k$. اولین مقدار S ای که در شرط بالا صدق می‌کند $S = ۴۴۰$ است. بنابراین $k = ۱۱۰ \equiv -۱ \pmod 3$، لذا هر چهارتایی از اعداد اول (که $f(e_{ij}) \neq ۲$) باید دارای دو مقدار همنهشت با -۱ در پیمانهٔ ۳ باشد و عدد دیگر با -۱ در پیمانهٔ ۳ همنهشت است. از طرفی هر چهارتایی از اعداد اول که $f(e_{ij}) \neq ۲,۳$، یا همهٔ مقادیر آن‌ها در پیمانهٔ ۳ همنهشت با -۱ باشد و یا اینکه یکی از این مقادیر در پیمانهٔ ۳ همنهشت با -۱ بوده و سه مقدار دیگر در پیمانهٔ ۳ همنهشت با ۱ باشند. بنابراین ماتریسی با درایه‌های $۰, ۱, -۱$ وجود خواهد داشت که مجموع هر سطر و هر ستون ماتریس در پیمانهٔ ۳ همنهشت با -۱ است. بااین‌وجود، مجموع ۳ عدد اول و همچنین مجموع ۱۰ عدد اول در پیمانهٔ ۳ همنهشت با $+۱$ است و مجموع ۵ عدد اول در پیمانهٔ ۳ همنهشت با -۱ است که باعث به وجود آمدن ماتریس زیر می‌شوند و $S > ۴۴$ خواهد شد که این یک تناقض است.

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

اکنون حالت $k = ۱۱۲ \equiv ۱ \pmod 3$ را بحث می‌کنیم، در این حالت هر چهارتایی از اعداد $f(e_{ij}) \neq ۲$ و $f(e_{۱۱}) = ۳$ باید شامل دو مقدار $+۱$ و یک مقدار همنهشت با -۱ در پیمانهٔ ۳ باشند و هر چهارتایی از اعداد $f(e_{ij}) \neq ۲,۳$ یا همگی در پیمانهٔ ۳ همنهشت با ۱ هستند و یا سه عدد از آن‌ها همنهشت با -۱ و دیگری همنهشت با ۱ در پیمانهٔ ۳ هستند.

$$\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

جمع هر سه عدد اول و مجموع هر پنج عدد اول همنهشت با ۱ در پیمانهٔ ۳ است و جمع هر ۱۰ عدد اول معادل با -۱ در پیمانهٔ ۳ بزرگ‌تر از ۴۴۸ است. این بدان معنی است که برای $k = ۱۱۲$ هیچ گراف جادویی اول $k_{۴,۴}$ وجود ندارد.

مشابه بالا می‌توان برای $k = ۱۱۴$ نشان داد که دقیقاً دو ماتریس با درایه‌های $۰, +۱, -۱$ وجود دارند.

الف) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

برای ماتریس (الف) به تناقض خواهیم رسید ولی برای ماتریس (ب) به یک ماتریس متشکل از اعداد اول متمایز خواهیم رسید و این نشان می‌دهد عدد ۱۱۴ کمترین مقدار ممکن برای k است

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱۱ & ۴۷ & ۵۳ \\ ۲۳ & ۳۷ & ۴۱ & ۱۳ \\ ۲۹ & ۶۱ & ۷ & ۱۷ \\ ۵۹ & ۵ & ۱۹ & ۳۱ \end{bmatrix}.$$

□

۴ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله، ابتدا مفهوم برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی را برای یک گراف دلخواه تعریف کردیم. سپس نشان دادیم که یک گراف کامل دوبخشی نامتعادل نمی‌تواند دارای برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی باشد و برای آن دسته از گراف‌های کامل دوبخشی که در شرط قضیه ۲.۲ قرار ندارند با استفاده از مربع جادویی، نحوهٔ ساخت برچسب‌گذاری جادویی کامل رأسی را نشان دادیم و مجموعهٔ طیف (مجموعهٔ مقادیر k) آن‌ها را محاسبه کردیم. در نهایت، برچسب‌گذاری جادویی-اول گراف $k_{n,n}$ را مورد بررسی قرار داده و نشان دادیم که به ازای $n = ۴$

یک برچسب‌گذاری جادویی-اول برای گراف $k_{n,n}$ وجود دارد. برای $n \geq ۵$ مسئلهٔ وجود برچسب‌گذاری جادویی کامل گراف $k_{n,n}$ یک مسئلهٔ باز است و مطالعه و بررسی این مسئله توصیه می‌شود.

ضمیمه (نحوهٔ ساخت مربع جادویی)

یک مربع جادویی از مرتبهٔ n، مربعی با n سطر و n ستون است به‌طوری‌که مجموع اعداد سطرها، ستون‌ها و قطرهای آن مقداری ثابت به نام ثابت جادویی است که با $\mu(A)$ یا به‌طور مختصر با μ نشان داده می‌شود. برای ساخت یک مربع جادویی A از مرتبه n باید یک دستگاه معادلات به‌صورت زیر حل نمود

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & \cdots & a_{۱n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n۱} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=۱}^{n} a_{ij} = \mu \qquad j = ۱, ۲, ۳, \ldots, n$$

$$\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} = \mu \qquad i = ۱, ۲, ۳, \ldots, n$$

$$\sum_{i=j} a_{ij} = \mu$$

$$\sum_{\mathbf{i=۱,\, j=n}}^{\mathbf{i=n,\, j=۱}} a_{ij} = \mu$$

$$(a_{۱,\mathbf{n}} + a_{۲,\mathbf{n-۱}} + a_{۳,\mathbf{n-۲}} + \ldots + a_{\mathbf{n-۱},۲} + a_{\mathbf{n},۱} = \mu)$$

مثال :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{۱۱} & \mathbf{a}_{۱۲} & \mathbf{a}_{۱۳} \\ \mathbf{a}_{۲۱} & \mathbf{a}_{۲۲} & \mathbf{a}_{۲۳} \\ \mathbf{a}_{۳۱} & \mathbf{a}_{۳۲} & \mathbf{a}_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{۱۱} + \mathbf{a}_{۱۲} + \mathbf{a}_{۱۳} = ۱۵$$

$$\mathbf{a}_{۲۱} + \mathbf{a}_{۲۲} + \mathbf{a}_{۲۳} = ۱۵$$

$$\mathbf{a}_{۳۱} + \mathbf{a}_{۳۲} + \mathbf{a}_{۳۳} = ۱۵$$

$$\mathbf{a}_{۱۱} + \mathbf{a}_{۲۱} + \mathbf{a}_{۳۱} = ۱۵$$

$$\mathbf{a}_{۱۲} + \mathbf{a}_{۲۲} + \mathbf{a}_{۳۲} = ۱۵$$

$$\mathbf{a}_{۱۳} + \mathbf{a}_{۲۳} + \mathbf{a}_{۳۳} = ۱۵$$

$$\mathbf{a}_{۱۱} + \mathbf{a}_{۲۲} + \mathbf{a}_{۳۳} = ۱۵$$

$$\mathbf{a}_{۱۳} + \mathbf{a}_{۲۲} + \mathbf{a}_{۳۱} = ۱۵$$

یک جواب این دستگاه معادلات عبارت است از

$$A = \begin{bmatrix} ۸ & ۱ & ۶ \\ ۳ & ۵ & ۷ \\ ۴ & ۹ & ۲ \end{bmatrix}.$$

References

[1] Baca, M., & Hollander, I. (1990). Prime-magic labeling of $k_{n,n}$. *Journal of Franklin Inst*, 327, 923–926. DOI: https://doi.org/10.1016/0016-0032(90)90069-U.

[2] Freyberg, B. (2023). Face-magic labelings of some gridded graphs. *Communications in Combinatorics and Optimization*, 8, 595–601. DOI: https://doi.org/10.22049/CCO.2023.28208.1478.

[3] Inpoonjai, Ph., & Jiarasuksakun, T. (2018). Balanced Degree-Magic Labelings of Complete Bipartite Graphs under Binary Operations. *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, 13, 1–13. DOI: https://doi.org/10.7508/ijmsi.2018.13.001.

[4] MacDougall, J.A., Gray, I.D., Simpson, R.J., & Wallis, W.D. (2003). Vertex-Magic Total Labelings of Complete Bipartite Graphs. *Ars Combinatoria*, 69, 1–12.

[5] Marimuthu, G., & Balakrishnan, M. (2012). E-super vertex magic labelings of graphs. *Discrete Appl. Math*, 160, 1766–1774. DOI: https://doi.org/10.1016/j.dam.2012.03.016.

[6] Marimuthu, G., & Stalin K. (2016). Mixed cycle-E-super magic decomposition of complete bipartite graphs. *Journal of Algorithms and Computation*, 47, 37–52.

[7] Mejia, M. (2022). Vertex-Magic Total Labeling on G-sun Graphs. *In BSU Honors Program Theses and Projects. Item 554*.

[8] Rikio, I. & et al. (2024). Recent studies on the super edge-magic deficiency of graphs. *Theory and Applications of Graphs*, Vol. 11, Iss. 1, Article 1. DOI: https://doi.org/10.20429/tag.2024.110101.

[9] Sedláček, J. (1976). On magic graphs. *Mathematica Slovaca*, 26, 329–335.

[10] Stewart, B.M. (1966). Magic graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, 18, 1031–1059. DOI: https://doi.org/10.4153/CJM-1966-104-7.

[11] West, D.B. (2001). Introduction to Graph Theory. *Prentice-Hall*.

[12] Zeen El Deen, M.R., & et al. (2024). Super Edge Magic Harmonious Labeling for Certain Graphs. *Frontiers in Scientific Research and Technology*, 8, 47–56. DOI: https://doi.org/10.21608/FSRT.2023.248393.1114.