



On the $L_p(G)$ spaces as topological lattice vector groups

Mohammad Ali Ranjbar¹, Seyyed Hassan Myrnouri²

1. Teacher and free researcher. Email: maaliranjbar@gmail.com
2. Corresponding Author, Department of Mathematics, Lahijan Branch, Islamic Azad University, Lahijan, Iran. Email: myrnouri@liau.ac.ir

Article Info

ABSTRACT

Article type:

Research Article

Article history:

Received: 31 December 2023

Received in revised form:

01 March 2024

Accepted: 15 June 2024

Published Online:

20 August 2024

Keywords:

ℓ -group,

Unital ℓ -group,

Order unit,

Locally compact group,

Haar measure,

Riesz algebra,

Topological lattice-ordered ring

2020 Mathematics Subject

Classification: 06F20, 06F25

In this paper, we consider the $L_p(G)$ spaces with pointwise ordering as Riesz spaces and investigate some lattice group topologies on them. In many cases, these topologies which are called link topologies or positive filter topologies are not vector topologies in the sense that the scalar multiplication is not continuous with respect to them, but they have many useful properties.

Cite this article: Ranjbar, M.A., & Myrnouri, S.H. (2024). On the $L_p(G)$ spaces as topological lattice vector groups. *Measure Algebras and Applications*, 2(1), 1–13. <http://doi.org/10.22091/MAA.2024.10266.1013>



©The Author(s).

Publisher: University of Qom

DOI: 10.22091/MAA.2024.10266.1013

Extended Abstract

Introduction

Ordered algebraic structures have been investigated by many mathematicians. In the last decades, many researchers introduced and investigated lattice topologies on the ordered algebraic structures [12], [19], [14], [23], [27] and [29]. In 1998, Gusic introduced the concept of an admissible subset of a 2-divisible lattice-ordered group H , which induces a topology on it. This topology is a group topology and also is locally solid. The Gusic topology investigated by Ranjbar and Pourgholamhossein in [23] and [27] and Yang in [29]. In [23], the authors introduced the concept of links as a generalization of admissible subsets of a lattice-ordered group. The topology induced by a link is Hausdorff. If the lattice-ordered group H is Archimedean with order unit, then the set of all order units is a link and called the strong link. It is a case that the lattice-ordered group is also an Archimedean Riesz space. However the link topology in an Archimedean Riesz space is not necessarily a vector topology. The authors in [24] showed that the link topology in an Archimedean Riesz space is a vector topology if and only if the link is the strong link. Although the link topology in a Riesz space is not a vector topology in general, it makes the Riesz space into a locally convex topological vector group [17]. The notion of topological vector group was defined and studied by Raikov in [25] and [26].

Positive filter topology on a lattice-ordered group is another lattice group topology which was introduced and investigated in [19] and [14]. A positive filter is a subset of the positive cone of an ℓ -group which induces the positive filter topology. Every link in an ℓ -group is a positive filter. In some cases, the positive filter topology and link topology on an ℓ -group are the same, which have been investigated by authors in [24].

In this work, we review the last researches about the introduction of lattice topologies on a Riesz space and we investigate some properties of these topologies on $L_p(G)$ ($0 < p < \infty$) spaces, where G is a locally compact abelian group with the Haar measure. In fact, we consider $L_p(G)$ ($0 < p < \infty$) as Riesz spaces with pointwise ordering in the sense of almost everywhere. The Riesz spaces $L_p(G)$ or $L_p(X, \Sigma, \mu)$ are very important in functional analysis. It is well known that for $1 \leq p$, $L_p(G)$ spaces are Banach lattices with respect to the integral norm. A famous theorem about the spaces $L_p(G)$ or more generally $L_p(X, \Sigma, \mu)$ is that every abstract L_p -space has a representation of the form $L_p(X, \Sigma, \mu)$ (see [1] for more details). Furthermore, as we shall see later, $L_p(G)$ is a locally convex topological vector group with respect to every link topology on it. We also see that some of the link topologies are finer than the integral norm topology on $L_p(G)$.

We show that if G is not discrete, then for every $0 < p < \infty$ and every neighborhood U of zero in G , there is an unbounded $f \in L_p(G)$ such that $\text{supp}(f)$ is contained in U . We also show that an $L_p(G)$ ($0 < p < \infty$) does not contain an order unit unless G is finite. We introduce the notion of *completely positive* functions in an $L_p(G)$ and we show that the set of all completely positive functions is a link in $L_p(G)$ if G is σ -compact. A completely positive function is a real-valued measurable function on G which is far from zero almost everywhere.

It is well known that in $L_p(G)$ the pointwise multiplication is not closed in general. We introduce the concept of *p-ideal* subspace of an $L_p(G)$ which is closed under pointwise multiplication. More precisely, for $0 < p < \infty$, a function $f \in L_p(G)$ is *p-ideal*, if for every $g \in L_p(G)$, we have $f.g \in L_p(G)$. For instance, every characteristic function on a compact subset of G is a *p-ideal* of $L_p(G)$ for all $0 < p < \infty$. The set of all *p-ideal* functions is a linear subspace of $L_p(G)$ and we call it the *p-ideal* subspace of $L_p(G)$.

We show that this is an order-ideal of $L_p(G)$. We also show that the p -ideal subspace of an $L_p(G)$ with pointwise multiplication is a Riesz algebra. In addition, we give a link topology on the p -ideal subspace of $L_p(G)$ which makes it a topological lattice-ordered ring.

Conclusion

In this paper, the following concepts are presented:

- 1- A completely positive measurable function.
- 2- A p -ideal function in an $L_p(G)$.
- 3- A p -ideal subspace of an $L_p(G)$ and we denote it by $IL_p(G)$.
- 4- The link IP in $IL_p(G)$.

Also, the next theorems, propositions and corollaries are presented:

- 1- The Riesz space of $L_p(G)$ contains a strong link, if G is a finite group.
- 2- If G is a σ -compact locally compact abelian group, then the set of all completely positive functions in $L_p(G)$ is a link in $L_p(G)$ ($0 < p < \infty$).
- 3- $IL_p(G)$ is a Riesz subspace and an order-ideal of $L_p(G)$. Furthermore, $IL_p(G)$ is closed under pointwise multiplication and is a Riesz algebra.
- 4- If G is σ -compact, then $IL_p(G)$ is a topological lattice-ordered ring with respect to some of the link topologies.



بررسی فضاهای $L_p(G)$ به عنوان گروه‌های برداری مشبکه توپولوژیکی

محمدعلی رنجبر^۱، سید حسن میرنوری^۲ ✉

۱. قم. آموزش و پرورش ناحیه چهارم. رایانامه: maaliranjbar@gmail.com

۲. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران. رایانامه: myrnouri@liau.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
<p>نوع مقاله: مقاله پژوهشی</p> <p>تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۰/۱۰ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۱۲/۱۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۳/۲۶ تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۵/۳۰</p> <p>کلمات کلیدی: گروه مشبکه، گروه مشبکه یکانی، یگه ترتیبی، گروه فشرده موضعی، اندازه هار، جبر ریس، حلقه مشبکه توپولوژیک</p> <p>رده بندی ریاضی: 06F20, 06F25</p>	<p>در این مقاله، فضاهای $L_p(G)$ را با رابطه ترتیب نقطه‌ای به عنوان فضاهای ریس در نظر می‌گیریم و دسته‌ای از توپولوژی‌های گروهی (با عمل جمع) مشبکه‌ای را روی آن‌ها بررسی خواهیم کرد. این توپولوژی‌ها که توپولوژی‌های فیلتری مثبت و یا توپولوژی‌های زنجیره‌ای نام دارند، در بسیاری از مواقع توپولوژی برداری نیستند، بدین معنا که عمل ضرب اسکالر در آن‌ها پیوسته توأم نیست، ولی بسیاری از ویژگی‌های مورد انتظار را دارند.</p>

استناد: رنجبر، محمدعلی، میرنوری، سید حسن. (۱۴۰۳). بررسی فضاهای $L_p(G)$ به عنوان گروه‌های برداری مشبکه توپولوژیکی. جبرهای اندازه و کاربردها، ۲(۱)، ۱-۱۳.

<http://doi.org/10.22091/MAA.2024.10266.1013>



ناشر: دانشگاه قم.

© نویسندگان.

۱ مقدمه و پیش‌نیازها

ساختارهای جبری مرتب از اوایل قرن بیستم مورد توجه ریاضی‌دانان بزرگ جهان بوده است. همچنین رابطه بین آن‌ها و MV -جبرها نیز به وسیله بسیاری از ریاضی‌دانان از جمله موندیچی مورد بررسی قرار گرفته است، تا جایی که موندیچی نشان داد که رسته گروه‌های مشبکه یکانی با رسته همه MV -جبرها، یکریخت رسته‌ای است [۲۰]. یادآور می‌شویم که مفهوم MV -جبر، در سال ۱۹۵۸ میلادی توسط چانگ و به عنوان تعمیمی از مفهوم جبر بولی معرفی شد [۴]. می‌دانیم که در یک MV -جبر، مجموعه همه عناصر خودتوان، همراه با اعمال مشبکه، تشکیل یک جبر بولی می‌دهد [۵]. در دهه‌های اخیر، ساخت و بررسی توپولوژی‌ها بر روی گروه‌های مشبکه و فضاهای ریس مورد توجه بسیاری از پژوهشگران در ایران و جهان قرار گرفته است [۱۲]، [۱۹]، [۱۴]، [۲۳]، [۲۷]، [۲۸] و [۲۹]. این توپولوژی‌ها باید با اعمال جبری و اعمال مشبکه‌ای سازگار باشند. بدین معنا که عمل دوتایی جمع و عمل‌های دوتایی سوپریمم و اینفیمم تحت این توپولوژی‌ها پیوسته باشند. در این مقاله، پس از بیان خواص مقدماتی گروه‌های مشبکه، فضاهای ریس و فضاهای L_p ، مختصری از پژوهش‌های نوین پیرامون ساخت توپولوژی‌های مشبکه‌ای در گروه‌های مشبکه و فضاهای ریس را بیان می‌کنیم. همچنین به تطبیق و بررسی این توپولوژی‌ها در یک فضای $L_p(G)$ می‌پردازیم که در آن G یک گروه فشرده موضعی آبدلی با اندازه هار است. در انتها نیز یک سؤال بی‌پاسخ را در این خصوص مطرح خواهیم کرد. یک گروه مشبکه عبارت است از یک گروه جزئاً مرتب (یک گروه به همراه یک رابطه ترتیب \leq بر روی آن که تحت انتقال پایا است؛ بدین معنا که اگر $x \leq y$ ، آنگاه برای هر عنصر z در گروه، $x + z \leq y + z$) که هر زیرمجموعه متناهی از آن، دارای سوپریمم و اینفیمم باشد. (سوپریمم مجموعه دو عضوی x, y را با $x \vee y$ و اینفیمم آن را با $x \wedge y$ نمایش می‌دهیم). برای اطلاع از خواص گروه‌های جزئاً مرتب و گروه‌های مشبکه به [۱۰] و [۱۱] مراجعه نمایید. در اینجا ما گروه مشبکه $(L, +, \leq)$ را همواره آبدلی در نظر می‌گیریم و آن را به اختصار با L نمایش می‌دهیم و عضو خنثی نیز همواره با 0 نمایش داده می‌شود. همچنین مجموعه همه عناصر $x \in L$ که در رابطه $x \leq 0$ صدق کنند، را با L^+ نمایش می‌دهیم که مجموعه عناصر مثبت نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱. عنصر مثبت u در گروه مشبکه L را یک‌تایی ترتیبی نامند، هرگاه برای هر $x \in L$ ، عدد طبیعی n یافت شود به طوری که $x \leq nu$. همچنین یک گروه مشبکه یکانی با ℓ -گروه یکانی، عبارت است از یک گروه مشبکه که دارای یک‌تایی ترتیبی باشد.

تعریف ۲.۱. اگر L, H گروه‌های مشبکه باشند، آنگاه همریختی گروهی $f: L \rightarrow H$ را یک همریختی مثبت گوئیم اگر $f(L^+) \subseteq H^+$ همچنین f را همریختی گروه‌های مشبکه نامیم، اگر علاوه بر خواص بالا، داشته باشیم:

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

9

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y).$$

گزاره ۳.۱. [۶] در هر گروه مشبکه آبدلی L ، برای هر $x, y \in L$ و هر عدد طبیعی n داریم:

$$n(x \vee y) = nx \vee ny, \quad n(x \wedge y) = nx \wedge ny.$$

لازم به توضیح است که هر گروه مشبکه آبدلی، نمایش‌پذیر است (رک [۶]، گزاره ۶.۴۷) یعنی ℓ -زیرگروه حاصل‌ضربی از گروه‌های کاملاً مرتب است. حال، گزاره بالا به طور مستقیم از گزاره ۱۰.۴۷ (در همین مرجع) نتیجه می‌شود. گروه مشبکه L را ارشمیدسی^۱ نامیم، اگر برای $x, y \in G$ ، هرگاه نامساوی $nx \leq y$ برای هر عدد طبیعی n برقرار باشد، آنگاه $x \leq 0$. زیرمجموعه A از گروه مشبکه G را جامد^۲ نامیم هرگاه برای هر $a \in A$ و هر $x \in G$ ، اگر $|x| \leq |a|$ ، آنگاه $x \in A$ که در آن $|x| = x \vee (-x)$ قدرمطلق x نام دارد. فضای برداری حقیقی E به همراه رابطه ترتیب جزئی \leq یک فضای ریس نام دارد، هرگاه اولاً (E, \leq) با عمل جمع، یک گروه مشبکه باشد و ثانیاً اگر $x, y \in E$ به طوری که $x \leq y$ ، آنگاه نامساوی $rx \leq ry$ برای هر عدد حقیقی مثبت r برقرار باشد. برای اطلاع از خواص مقدماتی مشبکه‌ها و فضاهای ریس به [۱] و [۲] مراجعه نمایید. یک جبر ریس عبارت است از یک جبر حقیقی مانند A همراه با یک رابطه ترتیب جزئی که \leq به عنوان یک فضای برداری حقیقی، همراه با این رابطه ترتیب، یک فضای ریس باشد و علاوه بر آن اگر $x, y \in A^+$ ، آنگاه $x \cdot y \leq 0$ [۲۲]. گروه مشبکه L به همراه توپولوژی τ را یک گروه مشبکه توپولوژیک نامیم، هرگاه (L, τ) یک گروه توپولوژیک باشد و علاوه بر آن نگاشت‌های $(x, y) \rightarrow x \vee y$ و $(x, y) \rightarrow x \wedge y$ از $L \times L$ به L پیوسته باشند. در این حالت توپولوژی τ را توپولوژی گروهی مشبکه‌ای نامند. همچنین (L, τ) را گروه مشبکه جامد موضعی نامیم اگر مبدأ دارای پایه موضعی با عناصر جامد باشد. به همین

¹Archimedean

²solid

ترتیب فضای ریس جامد موضعی تعریف می‌شود. لازم به توضیح است که $S \subseteq L$ را جامد نامند، اگر برای هر $x \in S$ و هر $y \in L$ ، اگر $|y| \leq |x|$ ، آنگاه $y \in S$.

فرض کنیم G یک گروه فشرده موضعی آبدی باشد و μ اندازه هار روی آن باشد. در این صورت برای هر $0 < p < \infty$ ، $L_p(G)$ را مجموعه همه توابع اندازه‌پذیر حقیقی مقدار روی G در نظر می‌گیریم که $\int_G |f|^p d\mu < \infty$. همان‌گونه که می‌دانیم $L_p(G)$ یک فضای برداری حقیقی است و با اعمال جمع نقطه‌ای و ضرب اسکالر، یک فضای برداری است. یادآور می‌شویم مفهوم تساوی در $L_p(G)$ با یک رابطه هم‌ارزی تعریف می‌شود. مثلاً دو تابع $f, g \in L_p(G)$ را مساوی گوئیم اگر تقریباً همه‌جا مساوی باشند. یعنی

$$\mu \{x \in G : f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

برای اطلاع از خواص مقدماتی گروه‌های فشرده موضعی و توابع انتگرال‌پذیر به [۸] و [۹] مراجعه نمایید. حال برای هر $0 < p < \infty$ ، رابطه ترتیب نقطه‌ای را به مفهوم تقریباً همه‌جا بر روی $L_p(G)$ در نظر می‌گیریم. یعنی $f \leq g$ اگر و تنها اگر نامساوی $f(x) \leq g(x)$ تقریباً همه‌جا برقرار باشد. برای هر $f, g \in L_p(G)$ می‌دانیم که $f \wedge g$ اندازه‌پذیر است و ثانیاً

$$\int_G |f \wedge g|^p d\mu \leq \int_G (|f| + |g|)^p d\mu < \infty.$$

بنابراین $L_p(G)$ با این رابطه ترتیب، یک فضای ریس است. همچنین یک بررسی ساده نشان می‌دهد که $L_p(G)$ یک فضای ریس ارشمیدسی است. البته معمولاً به‌جای گروه فشرده موضعی G ، فضای اندازه (X, Σ, μ) را در نظر می‌گیرند و به همین ترتیب ثابت می‌شود که $L_p(X, \Sigma, \mu)$ یک فضای ریس ارشمیدسی است [۱].

فرض کنیم E یک فضای ریس و مجهز به نرم ریس N باشد (یعنی N یک نرم باشد به طوری که برای هر $x, y \in E$ ، نامساوی $|x| \leq |y|$ ، نامساوی $N(x) \leq N(y)$ را نتیجه دهد). فضای E را یک مشبکه باناخ نامند، اگر E به همراه نرم ریس N یک فضای باناخ باشد. همچنین به‌ازای عدد حقیقی $1 \leq p$ ، نرم N را p -جمع‌پذیر نامند اگر تساوی

$$(N(x) + N(y))^p = (N(x))^p + (N(y))^p$$

برای هر $x, y \in E^+$ که $x \wedge y = 0$ برقرار باشد. مشبکه باناخ (E, N) را یک فضای L_p مجرد نامند، اگر نرم ریس N ، p -جمع‌پذیر باشد. ثابت شده است که برای هر فضای اندازه (X, Σ, μ) و هر $1 \leq p$ ، فضای ریس $L_p(X, \Sigma, \mu)$ با نرم انتگرالی

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

یک مشبکه باناخ و همچنین یک L_p -فضای مجرد است. یادآور می‌شویم که یک L_p -فضای مجرد عبارت است از یک مشبکه باناخ که نرم آن اولاً یک نرم ریس و ثانیاً p -جمع‌پذیر باشد. قضیه زیر که تلفیقی از قضایای کاکوتانی^۱ [۱۶]، باننبلاست^۲ [۳] و ناکانو^۳ [۲۱] است، نشان می‌دهد که حتی هر L_p -فضای مجرد، یکرخت مشبکه‌ای با یک فضا به شکل بالا است.

قضیه ۴.۱. ([۱]، قضیه ۳۳.۳. کاکوتانی-باننبلاست-ناکانو) برای هر $1 \leq p$ ، هر L_p -فضای مجرد، یکرخت مشبکه‌ای با یک مشبکه باناخ (X, Σ, μ) است.

ملاحظه ۵.۱. همان‌گونه که می‌بینیم مطالب ذکر شده در بالا فقط برای حالت‌هایی است که $1 \leq p$ و همان‌گونه که می‌دانیم، اگر $p < 1$ حتی ممکن است $\| \cdot \|_p$ یک نرم نباشد و در واقع نامساوی مثلثی ممکن است برقرار نباشد.

تعریف ۶.۱. فرض کنیم E یک فضای ریس باشد و $C \subseteq E^+$. C را یک زنجیره در E نامیم اگر شرایط زیر برقرار باشند.

(۱) اگر $x, y \in C$ ، آنگاه $x \wedge y \in C$

(۲) اگر $x \in C$ و $x \leq y$ ، آنگاه $y \in C$

(۳) $0 \notin C$

(۴) $\inf(C) = 0$

(۵) اگر $x \in C$ آنگاه $rx \in C$ برای هر $0 < r \leq 1$

همچنین $F \subseteq E$ را یک فیلتر مثبت نامند اگر خواص ۱ و ۲ و ۵ فوق را داشته باشد.

¹Kakutani

²Bohnenblust

³Nakano

تعریف ۷.۱. فرض کنیم Ω یک زنجیره در E باشد. برای هر $r \in \Omega$ و $g \in E$ مجموعه زیر را در نظر می‌گیریم.

$$U_{g,r} = \{x \in G, r - |x - g| \in \Omega\}$$

گردایه همه مجموعه‌های به شکل $(r \in \Omega, g \in E) U_{g,r}$ تشکیل یک توپولوژی روی E می‌دهد که آن را توپولوژی زنجیره‌ای القاشده با Ω یا Ω -توپولوژی گوئیم.

ملاحظه ۸.۱. زنجیره‌ها در اصل روی گروه‌های مشبکه تعریف می‌شوند و خاصیت ۵ که در بالا ذکر شد، در گروه‌های مشبکه تعمیم داده می‌شود و بیان آن خارج از اهداف این مقاله است. برای اطلاع از خواص توپولوژی‌های زنجیره‌ای به [۲۳]، [۲۴] و [۲۷] مراجعه نمایید.

قضیه زیر از قضیه ۴ در [۲۳] و نتیجه ۱۰.۲ در [۱۷] نتیجه می‌شود. ابتدا تعریف زیر را یادآور می‌شویم که برای اولین بار رایکوف در [۲۵] آن را معرفی کرد.

تعریف ۹.۱. یک فضای برداری X به همراه توپولوژی τ روی آن را یک گروه برداری توپولوژیک نامند اگر اولاً (X, τ) به همراه عمل جمع یک گروه توپولوژیک هاسدورف باشد و ثانیاً τ دارای یک پایه موضعی متعادل^۱ در صفر باشد.

در برخی منابع در تعریف گروه برداری توپولوژیک، به جای متعادل موضعی بودن، شرط کلی‌تری را ارائه داده‌اند که عبارت است از اینکه برای هر اسکالر (حقیقی یا مختلط) α ، نگاشت $x \mapsto \alpha x$ از X به X پیوسته باشد [۷] و [۱۸].

قضیه ۱۰.۱. اگر Ω یک زنجیره در E باشد، آنگاه E به همراه Ω -توپولوژی، یک گروه برداری توپولوژیک هاسدورف، جامد موضعی و محدب موضعی است.

فرض کنیم F یک فیلتر مثبت در فضای ریس E باشد، آنگاه برای هر $a \in F$ و برای هر $r \in F$ و هر عدد طبیعی n ، مجموعه زیر را در نظر می‌گیریم

$$N_{\frac{r}{n}}(a) = \{x \in E : n|x - a| \leq r\}.$$

گردایه چنین مجموعه‌هایی، یک پایه برای یک توپولوژی روی E است. توپولوژی تولیدشده توسط این مجموعه‌ها را توپولوژی فیلتری مثبت نامند. البته مجموعه‌های به شکل $N_{\frac{r}{n}}(a)$ در این توپولوژی باز نیستند، بلکه هرکدام از آن‌ها حاوی یک همسایگی باز و مشمول در یک همسایگی بازند. در واقع پایه توپولوژی در توپولوژی فیلتری مثبت، متشکل از مجموعه‌هایی به فرم زیر است

$$T_{\frac{r}{n}}(a) = \left\{ x \in E : \exists k \in \mathbb{N}, N_{\frac{r}{k}}(x) \subseteq N_{\frac{r}{n}}(a) \right\}$$

که در آن $n \in \mathbb{N}$ و $r \in F$ ، $a \in E$ و می‌توان آن را یک گوی باز به مرکز a و شعاع $\frac{1}{n}r$ تصور کرد. البته این گفته بدین معنا نیست که توپولوژی فیلتری مثبت، توپولوژی متری است و ممکن است که این توپولوژی، مترپذیر نباشد. این توپولوژی را با τ_F نمایش می‌دهیم. برای اطلاع از ویژگی‌های توپولوژی فیلتری مثبت به [۱۴] و [۱۹] مراجعه نمایید. در زیر برخی از ویژگی‌های اساسی این توپولوژی و رابطه آن با توپولوژی زنجیره‌ای بیان خواهند شد.

قضیه ۱۱.۱. ([۱۹]، قضیه ۵.۲) اگر F یک توپولوژی فیلتری مثبت در گروه مشبکه G باشد، آنگاه (G, τ_F) یک گروه مشبکه توپولوژیک است.

قضیه ۱۲.۱. ([۲۴]، قضیه ۵.۲). اگر F یک زنجیره در گروه مشبکه L باشد، آنگاه توپولوژی زنجیره‌ای القاشده با F و توپولوژی τ_F یکسان‌اند.

البته همان‌گونه که پیش‌ازین نیز بیان شد، در این تحقیق، نظر ما معطوف به فضای ریس $L_p(G)$ است و قضایای بالا بر روی چنین فضایی اعمال می‌کنیم.

^۱balanced

۲ گروه‌های برداری مشبکه توپولوژیک

مثال ۱.۲. فرض کنیم G یک گروه فشرده موضعی و $K \subseteq G$ فشرده باشد به طوری که $\mu(K) > 0$ که در آن μ اندازه هار روی G است. برای هر $0 < p \leq \infty$ قرار می‌دهیم

$$L_p^+(G) = \{f \in L_p(G) : 0 \leq f\}$$

9

$$P_K := \{f \in L_p^+(G) : f(x) > 0, \forall x \in K\}.$$

اولاً با توجه به اینکه $\chi_K \in P_K$ ، لذا $P_K \neq \emptyset$. ثانیاً روشن است که اگر $f \leq g$ و $f \in P_K$ ، آنگاه $g \in P_K$. ثالثاً $f \wedge g \in P_K$ برای هر $f, g \in P_K$. همچنین برای هر $f \in P_K$ و برای هر عدد طبیعی n روشن است که $\frac{1}{n}f \in P_K$. از اینجا نتیجه می‌گیریم که $\inf\{f : f \in P_K\} = 0$. بنابراین P_K یک زنجیره در $L_p(G)$ است. فرض کنیم $0 < p \leq 1$ و $\mu(K) = 1$ می‌بینیم که برای هر عدد طبیعی n ، $\frac{1}{n}\chi_K \in P_K$. همچنین برای هر عدد طبیعی n و هر $f \in N_{\frac{\chi_K}{n}}(0)$ داریم $|f| \leq n$ و در نتیجه

$$n \|f\|_p \leq \|\chi_K\|_p = 1.$$

بنابراین $N_{\frac{\chi_K}{n}}(0) \subseteq \{f \in L_p : \|f\|_p \leq \frac{1}{n}\}$. با توجه به اینکه $T_{\frac{\chi_K}{n}}(0) \subseteq N_{\frac{\chi_K}{n}}(0)$ بنابراین توپولوژی فیلتری مثبت روی $L_p(G)$ که با P_K القاء شده است، ظریف‌تر از توپولوژی حاصل از نرم $\|\cdot\|_p$ است.

از مثال بالا می‌بینیم که برای هر زیرمجموعه فشرده با اندازه بزرگ‌تر از صفر در G ، یک توپولوژی گروهی هاسدورف روی $L_p(G)$ ساخته می‌شود. حال این دو سؤال مطرح می‌شود. (۱) آیا ممکن است توپولوژی زنجیره‌ای روی فضای $L_p(G)$ ، یک توپولوژی برداری باشد؟ (۲) آیا هر زنجیره در $L_p(G)$ ، به صورت P_K است که در آن K یک زیرمجموعه با اندازه ناصفر در G است؟ برای پاسخ به سؤال اول ابتدا گزاره زیر را یادآور می‌شویم.

گزاره ۲.۲. ([۲۴] گزاره ۷.۴) اگر G یک گروه فشرده موضعی ناگسسته یا یک گروه نامتناهی با توپولوژی گسسته باشد، آنگاه $L_p(G)$ ($1 \leq p < \infty$) با رابطه ترتیب نقطه‌ای، یگه ترتیبی ندارد.

لم ۳.۲. اگر گروه فشرده موضعی G گسسته نباشد، آنگاه برای هر همسایگی صفر مانند U در G ، تابع $f \in L_p(G)$ وجود دارد که اولاً بی‌کران است و ثانیاً $supp(f) \subseteq U$.

اثبات. فرض کنیم $U \subseteq G$ یک همسایگی صفر باشد. با استفاده از روشی که در برهان گزاره ۲.۲ به کار رفته است، یک دنباله تودرتو از همسایگی‌های باز و متقارن صفر مانند $(U_n)_n$ وجود دارد که $\mu(U_{n+1}) \leq \frac{1}{2}\mu(U_n)$ و $\overline{U_1} \subseteq U$ برای نشان دادن این نکته، فرض کنیم $U_1 \subseteq U$ یک همسایگی باز و متقارن صفر باشد که بستر آن نیز زیرمجموعه U باشد. چون G گسسته نیست، عنصر $a \in U_1$ ، $a \neq 0$ وجود دارد و چون G هاسدورف است، لذا همسایگی باز و متقارن U_2 از صفر وجود دارد که $U_2 \cap a + U_2 = \emptyset$ می‌توان U_2 را طوری در نظر گرفت که $U_2 \subseteq U_1$ ، $a + U_2 \subseteq U_1$ ، بنابراین

$$2\mu(U_2) = \mu(U_2) + \mu(a + U_2) \leq \mu(U_1).$$

به همین ترتیب همسایگی‌های باز U_3, U_4, \dots ساخته می‌شوند. می‌توان U_1 را طوری در نظر گرفت که $\mu(U_1) < \infty$. حال تابع حقیقی مقدار f را روی G به صورت زیر می‌سازیم. برای هر $x \in G \setminus U_1$ قرار می‌دهیم $f(x) = 0$. برای هر عدد طبیعی n و هر $x \in U_n \setminus U_{n+1}$ ، قرار می‌دهیم $f(x) = n$. می‌بینیم تابع f بی‌کران است. همچنین داریم

$$0 < \int_G f^p d\mu \leq (1 + \frac{2^p}{2} + \frac{3^p}{4} + \dots + \frac{n^p}{2^{n-1}} + \dots)\mu(U_1).$$

با توجه به اینکه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^{n-1}}$ برای هر $p > 0$ همگراست، لذا انتگرال بالا متناهی است. □

نتیجه ۴.۲. فضای ریس $L_p(G)$ حاوی یک زنجیره قوی است اگر و تنها اگر G یک گروه متناهی باشد.

اثبات. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. لذا هر تابع در $L_p(G)$ کران‌دار است و در نتیجه تابع ثابت ۱ یگه ترتیبی است. چون فضای ریس $L_p(G)$ ارشمیدسی است، لذا مجموعه همه یگه‌های ترتیبی در آن، یک زنجیره قوی است. برعکس، فرض کنیم P یک زنجیره قوی در $L_p(G)$ باشد. لذا $L_p(G)$ حاوی یگه ترتیبی خواهد بود و طبق گزاره ۲.۲ G گسسته و متناهی است. \square

مثال زیر نشان می‌دهد که زنجیره‌ها در $L_p(G)$ لزوماً به فرم P_K که در مثال ۱.۲ بیان شد نیستند.

مثال ۵.۲. فرض کنیم G یک گروه فشرده موضعی ناگسسته و \mathcal{K} مجموعه همه همسایگی‌های فشرده صفر در G باشد (بنابراین با توجه به مفروضات، $0 < \mu(K) < \infty$ برای هر $K \in \mathcal{K}$). قرار می‌دهیم

$$C = \{f \in L_p^+(G) : \exists K \in \mathcal{K}, K \subseteq \text{pos}(f)\}$$

که در آن $\text{pos}(f) = \{x \in G : f(x) > 0\}$ نشان می‌دهیم C یک زنجیره در $L_p(G)$ است. اگر $f, g \in L_p(G)$ ، آنگاه همسایگی‌های فشرده K_1, K_2 از مبدأ وجود دارند که در شرایط بالا صدق می‌کنند. بنابراین $K_1 \cap K_2 \subseteq \text{pos}(f \wedge g)$ که نتیجه می‌دهد $f \wedge g \in C$. خواص ۲ و ۳ و ۴ و ۵ زنجیره‌ها نیز به‌وضوح برقرارند.

تعریف ۶.۲. برای هر گروه فشرده موضعی G ، تابع اندازه‌پذیر $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ را کاملاً مثبت نامیم اگر برای هر زیرمجموعه فشرده K از G ، عدد $\epsilon > 0$ وجود داشته باشد که

$$\mu(f^{-1}(-\epsilon, \epsilon) \cap K) = 0.$$

به‌عبارت‌دیگر، تابع f کاملاً مثبت است اگر مقادیر این تابع بر هر زیرمجموعه فشرده از G ، تقریباً همه‌جا دور از صفر باشند.

قضیه ۷.۲. اگر G یک گروه فشرده موضعی و سیگما-فشرده باشد، آنگاه مجموعه توابع کاملاً مثبت در $L_p(G)$ یک زنجیره در $L_p(G)$ است ($0 < p < \infty$).

اثبات. مجموعه همه توابع کاملاً مثبت در $L_p(G)$ را با P نمایش می‌دهیم. ابتدا نشان می‌دهیم P تهی نیست. اگر $\mu(G) < \infty$ آنگاه روشن است که تابع ثابت ۱ در P است. فرض کنیم $\mu(G) = \infty$ ابتدا حالت $0 < p < \infty$ را در نظر می‌گیریم. چون G سیگما-فشرده است، لذا یک دنباله از زیرمجموعه‌های باز پیش‌فشرده و ناتهی مانند $(U_n)_n$ وجود دارد (یعنی بستار هر کدام فشرده است) که تحت شمول صعودی است و $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = G$ (گزاره ۳۹.۴ [۹]). برای هر n قرار می‌دهیم $K_n = \overline{U_n}$. بدون کاستن از کلیت برای هر $n > 1$ می‌توان فرض کرد $\mu(K_n \setminus K_{n-1}) > 0$. حال قرار می‌دهیم $f_n = \frac{\chi_{K_n}}{\mu(K_n)}$ و برای هر عدد طبیعی $n > 1$ قرار می‌دهیم

$$f_n = (\chi_{K_n \setminus K_{n-1}} (n^2 \mu(K_n)))^{-1}.$$

داریم:

$$\int_G f_1(x) d\mu(x) = \int_{K_1} f_1(x) d\mu(x) = 1$$

و همچنین برای هر $n > 1$ خواهیم داشت:

$$\int_G f_n(x) d\mu(x) = \int_{K_n \setminus K_{n-1}} f_n(x) d\mu(x) = \frac{\mu(K_n \setminus K_{n-1})}{n^2 \mu(K_n)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

حال تابع حقیقی مقدار f روی G را چنین تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \bigvee_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

با توجه به اینکه برای هر $x \in G$ دنباله $(f_n(x))_n$ کران‌دار است، لذا سوپریمم بالا برای هر $x \in G$ موجود است. بنابراین، تابع f یک تابع پله‌ای خواهد بود و مقادیر آن روی هر کدام از مجموعه‌های $K_1, K_2 \setminus K_1, K_3 \setminus K_2, K_4 \setminus K_3, \dots$ ثابت و مثبت هستند و در هیچ نقطه‌ای صفر نیستند. لذا اگر قرار دهیم $K_0 = \emptyset$ خواهیم داشت:

$$\int_G |f(x)|^p d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{K_n \setminus K_{n-1}} f_n^p(x) d\mu(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} < \infty$$

که نامساوی آخر به این دلیل است که از ابتدا فرض کردیم $p > \frac{1}{k}$ اگر $p \leq \frac{1}{k}$ ، آنگاه توابع f_n را به صورت

$$f_n = (\chi_{K_n \setminus K_{n-1}}) \left(n^k \mu(K_n) \right)^{-1}$$

تعریف می‌کنیم که در آن k عددی طبیعی است که $k p > 1$. همچنین تابع f را مانند قبل تعریف می‌کنیم و با قرار دادن در انتگرال بالا خواهیم داشت

$$\int_G |f(x)|^p d\mu(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{kp}} < \infty.$$

از این رو $f \in P$. ادعا می‌کنیم که f کاملاً مثبت است. فرض کنیم $K \subseteq G$ فشرده و دلخواه باشد. چون $K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ ، لذا عدد طبیعی m وجود دارد که $K \subseteq \bigcup_{n=1}^m U_n$ و لذا $K \subseteq \bigcup_{n=1}^m K_n$. با توجه به نحوه ساخت تابع f_m ، می‌بینیم که مقادیر تابع f روی K بزرگ‌تر یا مساوی $(m^k \mu(K_m))^{-1}$ خواهند بود. حال کافی است عدد مثبت ϵ را طوری انتخاب کنیم که $\epsilon < (m^k \mu(K_m))^{-1}$. بنابراین

$$\mu(f^{-1}(-\epsilon, \epsilon) \cap K) = 0.$$

حال نشان می‌دهیم که P یک زنجیره است. روشن است که اگر $f, g \in P$ ، آنگاه $f \wedge g \in P$ و اگر $f \in P$ و $f \leq g$ ، آنگاه $g \in P$. برای نشان دادن اینکه $\inf(P) = 0$ فرض کنیم v یک کران پایین برای P باشد. لذا $v^+ = 0 \vee v$ کران پایین دیگری برای P است. بنابراین برای هر تابع $f \in P$ خواهیم داشت $v^+ \leq f$ با توجه به اینکه برای هر $f \in P$ و هر عدد طبیعی n ، $\frac{1}{n}f \in P$ ، لذا نامساوی $v^+ \leq \frac{1}{n}f$ برای هر عدد طبیعی n برقرار است و این بدین معناست که $v^+ = 0$. در نتیجه $v \leq 0$. سایر ویژگی‌های زنجیره‌ها نیز به وضوح برقرارند. \square

با توجه به اینکه عمل ضرب نقطه‌ای در $L_p(G)$ بسته نیست، لذا معمولاً ضرب‌های دیگری روی فضای $L_p(G)$ در نظر گرفته می‌شوند که آن را تبدیل به یک جبر کنند. به عنوان مثال ضرب پیچشی روی $L_1(G)$ که آن را به همراه نرم انتگرالی، به یک جبر باناخ مبدل می‌کند، کاربرد زیادی در جبر اندازه‌ها دارد. اما این ضرب فقط به ازای $p = 1$ روی $L_p(G)$ تعریف می‌شود. در اینجا سعی داریم به ضرب نقطه‌ای در $L_p(G)$ بازگردیم، ولی این ضرب را روی تمام فضا اعمال نمی‌کنیم و در این خصوص تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۸.۲. تابع $f \in L_p(G)$ ($0 < p < \infty$) را یک تابع p -ایده‌آل نامیم، اگر برای هر $g \in L_p(G)$ ، $f \cdot g \in L_p(G)$ همچنین مجموعه همه توابع p -ایده‌آل در $L_p(G)$ را زیرفضای p -ایده‌آل نامیم و با $IL_p(G)$ نمایش می‌دهیم.

روشن است که برای هر $0 < p < \infty$ و برای هر زیرمجموعه فشرده G مانند K ، داریم $\chi_K \in IL_p(G)$. در زیر دلیل انتخاب این نام برای این توابع، با یک قضیه روشن می‌شود.

قضیه ۹.۲. الف) $IL_p(G)$ یک زیرفضای ریس و همچنین یک ایده‌آل ترتیبی در $L_p(G)$ است. ب) $IL_p(G)$ با رابطه ترتیب نقطه‌ای و ضرب نقطه‌ای، یک جبر ریس است.

اثبات. الف) اگر $f, g \in IL_p(G)$ ، آنگاه برای هر $h \in L_p(G)$ داریم $h \cdot f, h \cdot g \in L_p(G)$ و در نتیجه

$$h \cdot (f + g) = h \cdot f + h \cdot g \in L_p(G).$$

سایر ویژگی‌های فضای برداری به وضوح برقرارند. حال فرض کنیم $f, g \in IL_p(G)$. اگر $h \in L_p(G)$ دلخواه باشد، آنگاه خواهیم داشت $|h \cdot (f \wedge g)| \leq |h \cdot f| \in L_p(G)$ که این نتیجه می‌دهد $f \wedge g \in L_p(G)$. بنابراین $IL_p(G)$ با رابطه ترتیب نقطه‌ای یک فضای ریس است. همچنین روشن است که اگر $f \in IL_p(G)$ و $|g| \leq |f|$ ، آنگاه $g \in IL_p(G)$. بنابراین $IL_p(G)$ یک ایده‌آل ترتیبی در $L_p(G)$ است.

ب) برای دیدن اینکه $IL_p(G)$ یک جبر ریس است، کافی است ملاحظه کنیم که اگر $f, g \in IL_p(G)$ و $f \leq g$ آنگاه نامساوی $f \cdot h \leq g \cdot h$ برای هر $h \in (IL_p(G))^+$ برقرار است. \square

مجموعه توابع کاملاً مثبت در $IL_p(G)$ را با IP نمایش می‌دهیم. در قضیه ۷.۲ دیدیم که P یک زنجیره در $L_p(G)$ است، به شرط اینکه G سیگما-فشرده باشد. اگر G سیگما-فشرده باشد، خواص ۱ و ۲ و ۳ و ۵ از زنجیره‌ها به وضوح برای IP نیز برقرارند. برهان اینکه $\inf(IP) = 0$ ، همانند برهان $\inf(P) = 0$ در قضیه ۷.۲ است و در نتیجه IP یک زنجیره در $IL_p(G)$ است.

نتیجه ۱۰.۲. اگر G سیگما-فشرده باشد، آنگاه زنجیره IP در $IL_p(G)$ نسبت به عمل ضرب بسته است.

گزاره ۱۱.۲. اگر G سیگما-فشرده باشد، آنگاه $IL_p(G)$ با توپولوژی زنجیره‌ای IP ، یک حلقه توپولوژیک است. بدین معنا که علاوه بر اینکه توپولوژی زنجیره‌ای IP یک توپولوژی گروهی روی $IL_p(G)$ است، عمل ضرب نقطه‌ای توابع نیز نسبت به این توپولوژی پیوسته است.

اثبات. نشان می‌دهیم که عمل ضرب برداری در صفر پیوسته است. با توجه به اینکه توپولوژی فیلتری مثبت که به‌وسیله IP القا شده است، با توپولوژی زنجیره‌ای القا شده به‌وسیله IP یکی است، کافی است که این پیوستگی در توپولوژی فیلتری مثبت ثابت شود. فرض کنیم $u \in IP$ دلخواه باشد. نشان می‌دهیم عناصر $v, w \in IP$ وجود دارند که $N_v(\circ) \cdot N_w(\circ) \subseteq N_u(\circ)$. قبل از برهان این ادعا، ابتدا به این نکته اشاره می‌کنیم که چون برای هر $u \in IP$ و هر $n \in \mathbf{N}$ داریم $\frac{1}{n}u \in IP$ ، لذا می‌توانیم تمام همسایگی‌های صفر در $IL_p(G)$ را در توپولوژی فیلتری مثبت به‌صورت $N_u(\circ)$ در نظر بگیریم. حال تابع v را برای هر $x \in G$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$v(x) = \min \{u(x), 1\}.$$

بنابراین تابع v نیز اندازه‌پذیر، کاملاً مثبت و در نتیجه $v \in P$ است و در نتیجه $v(x) \leq 1$ ، $x \in G$ ، بنابراین $v^2 \leq v$ حال اگر $f, g \in N_v(\circ)$ آنگاه $|f| \leq v$ ، $|g| \leq v$ ، و خواهیم داشت

$$|fg| = |f| |g| \leq v^2 \leq v \leq u$$

□

که این نیز نتیجه می‌دهد $N_v(\circ) \cdot N_v(\circ) \subseteq N_u(\circ)$.

ملاحظه ۱۲.۲. لازم به ذکر است که عمل ضرب اسکالر در $IL_p(G)$ نسبت به توپولوژی زنجیره‌ای IP پیوسته نیست، مگر آنکه G یک گروه متناهی باشد. لذا اگر G متناهی نباشد (حتی اگر فشرده باشد)، هیچ‌کدام از توپولوژی‌های زنجیره‌ای، فضای $IL_p(G)$ را به یک جبر توپولوژیک مبدل نمی‌کنند.

References

- [1] Aliprantis, C.D., & Burkinshaw, O. (2003). Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics. *Math Surveys and Monographs*, Volume 105, American Math. Society.
- [2] Birkhoff, G. (1967). Lattice Theory. *A.M.S. Colloquium Publications*.
- [3] Bohnenblust, H.F. (1940). On axiomatic characterization of L_p -spaces. *Duke Math. J*, 6, 627–640. DOI: <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-40-00648-2>.
- [4] Chang, C.C. (1958). Algebraic analysis of many valued logics. *Trans. Amer. Math. Soc*, 88, 467–490. DOI: <https://doi.org/10.2307/1993227>.
- [5] Cignoli, R., Ottaviano, I.M.L.D., & Mundici, D. (2000). Algebraic Foundations of many-valued Reasoning. *Kluwer Academic Publ, Dordrecht*. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9480-6>.
- [6] Darnel, M. (1995). Theory of lattice-ordered groups. *Marcel Dekker, New York*.
- [7] Dominguez, X., & Tarieladze, V. (2008). Group topologies on vector spaces and character lifting properties. *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (3), 14, 21–34.
- [8] Folland, G.B. (1994). A Course in Abstract Harmonic Analysis. *CRC Press*. DOI: <https://doi.org/10.1201/b19172>.

- [9] Folland, G.B. (1999). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Wiley, New York, second edition.
- [10] Glass, A.M.W. (1999). *Partially Ordered Groups*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [11] Goodearl, K.R. (1986). *Partially Ordered Abelian Groups With Interpolation*. Amer. Mathematical Society (Mathematical Surveys and Monographs). DOI: <https://doi.org/10.1090/surv/020>.
- [12] Gusic, I. (1998). A topology on lattice-ordered groups. *Proc Amer Math Soc*, 126(9), 2593–2597.
- [13] Hahn, H. (1907). Uber die nichtarchimedischen Groben-systeme. *Sitz. ber. K. Akad. der Wiss., Math. Nat. Kl. Ila*, 116, 601–655.
- [14] Jordan, F., & Pajoohesh, H. (2018). Topologies on abelian lattice-ordered groups induced by a positive filter and completeness. *Algebra Universalis*, 79(62), 1–18. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00012-018-0543-7>.
- [15] Kadison, R.V. (1951). A representation theory for commutative topological algebra. *Mem. A M S*, No. 7.
- [16] Kakutani, S. (1941). Concrete Representation of Abstract (L)-Spaces and the Mean Ergodic Theorem. *Ann. of Math*, 42, 523–537. DOI: <https://doi.org/10.2307/1968915>.
- [17] Karamdoust, S., Myrnouri, H., & Pourgholamhossein, M. (2024). On the Boolean algebra induced by a unital ℓ -group. *Algebra Universalis*, 85, 16. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00012-024-00848-6>.
- [18] Kenderov, P. (1970). On topological vector groups. *Mat. Sb*, 10, 531–546. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM1970v010n04ABEH001679>.
- [19] Kopperman, R., Pajoohesh, H., & Richmond, T. (2011). Topologies arising from metrics valued in abelian ℓ -groups. *Algebra Universalis*, 65, 315–330. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00012-011-0132-5>.
- [20] Mundici, D. (1986). Interpretation of AF C*-algebras in Lukasiewicz sentential calculus. *J. Funct. Anal*, 65, 15–63. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(86\)90015-7](https://doi.org/10.1016/0022-1236(86)90015-7).
- [21] Nakano, H. (1955). *Semi-Ordered Linear Spaces*. Japan Society for the Promotion of Science, Tokyo.
- [22] Pagter, B. de. (1981). *F-Algebras and Orthomorphisms*. Ph. D. Dissertation, Leiden.
- [23] Pourgholamhossein, M., & Ranjbar, M.A. (2019). On the topological mass Lattice Groups. *Positivity*, 23, 811–827. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11117-018-0639-5>.
- [24] Pourgholamhossein, M., & Ranjbar, M.A. (2022). Positive filters and links in an ℓ -group. *Quaestiones Mathematicae*, 45, 1297–1308. DOI: <https://doi.org/10.2989/16073606.2021.1942287>.
- [25] Raikov, D.A. (1964). Free locally convex spaces for uniform spaces. *Mat. Sb. (N.S)*, 63(105), 582–590.

- [26] Raikov, D.A. (1968). On B-complete topological vector groups. *Studia Math*, 31, 295–306.
- [27] Ranjbar, M.A., & Pourgholamhossein, M. (2020). Filter and weak link topologies. *Algebra Universalis*, 81, 41. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00012-020-00670-w>.
- [28] Wu, S., Luan, W., & Yang, Y. (2020). Filter topologies on MV-algebras II. *Soft Computing*, 24, 3173–3177. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00500-020-04682-5>.
- [29] Yang, Y. (2009). The C-topology on lattice-ordered groups. *Sci China Ser A*, 52(11), 2397–2403. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11425-009-0098-3>.