Measure Algebras and Applications

On the $L_p(G)$ spaces as topological lattice vector groups

Mohammad Ali Ranjbar[1], **Seyyed Hassan Myrnouri**[2]✉

1. Teacher and free researcher. Email: maaliranjbar@gmail.com
2. Corresponding Author, Department of Mathematics, Lahijan Branch, Islamic Azad University, Lahijan, Iran. Email: myrnouri@liau.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 31 December 2023
Received in revised form:
01 March 2024
Accepted: 15 June 2024
Published Online:
20 August 2024

Keywords:
ℓ-group,
Unital ℓ-group,
Order unit,
Locally compact group,
Haar measure,
Riesz algebra,
Topological lattice-ordered ring

2020 Mathematics Subject Classification: 06F20, 06F25

ABSTRACT

In this paper, we consider the $L_p(G)$ spaces with pointwise ordering as Riesz spaces and investigate some lattice group topologies on them. In many cases, these topologies which are called link topologies or positive filter topologies are not vector topologies in the sense that the scalar multiplication is not continuous with respect to them, but they have many useful properties.

Cite this article: Ranjbar, M.A., & Myrnouri, S.H. (2024). On the $L_p(G)$ spaces as topological lattice vector groups. *Measure Algebras and Applications*, 1(2), 1–13. http://doi.org/10.22091/MAA.2024.10266.1013

Publisher: University of Qom

DOI: 10.22091/MAA.2024.10266.1013

Extended Abstract

Introduction

Ordered algebraic structures have been investigated by many mathematicians. In the last decades, many researchers introduced and investigated lattice topologies on the ordered algebraic structures [12], [19], [14], [23], [27] and [29]. In 1998, Gusic introduced the concept of an admissible subset of a 2-divisible lattice-ordered group H, which induces a topology on it. This topology is a group topology and also is locally solid. The Gusic topology investigated by Ranjbar and Pourgholamhossein in [23] and [27] and Yang in [29]. In [23], the authors introduced the concept of links as a generalization of admissible subsets of a lattice-ordered group. The topology induced by a link is Hausdorff. If the lattice-ordered group H is Archimedean with order unit, then the set of all order units is a link and called the strong link. It is a case that the lattice-ordered group is also an Archimedean Riesz space. However the link topology in an Archimedean Riesz space is not necessarily a vector topology. The authors in [24] showed that the link topology in an Archimedean Riesz space is a vector topology if and only if the link is the strong link. Although the link topology in a Riesz space is not a vector topology in general, it makes the Riesz space into a locally convex topological vector group [17]. The notion of topological vector group was defined and studied by Raikov in [25] and [26].

Positive filter topology on a lattice-ordered group is another lattice group topology which was introduced and investigated in [19] and [14]. A positive filter is a subset of the positive cone of an ℓ- group which induces the positive filter topology. Every link in an ℓ-group is a positive filter. In some cases, the positive filter topology and link topology on an ℓ-group are the same, which have been investigated by authors in [24].

In this work, we review the last researches about the introduction of lattice topologies on a Riesz space and we investigate some properties of these topologies on $L_p(G)$ $(0 < p < \infty)$ spaces, where G is a locally compact abelian group with the Haar measure. In fact, we consider $L_p(G)$ $(0 < p < \infty)$ as Riesz spaces with pointwise ordering in the sense of almost everywhere. The Riesz spaces $L_p(G)$ or $L_p(X, \Sigma, \mu)$ are very important in functional analysis. It is well known that for $1 \leq p$, $L_p(G)$ spaces are Banach lattices with respect to the integral norm. A famous theorem about the spaces $L_p(G)$ or more generally $L_p(X, \Sigma, \mu)$ is that every abstract L_p-space has a representation of the form $L_p(X, \Sigma, \mu)$ (see [1] for more details). Furthermore, as we shall see later, $L_p(G)$ is a locally convex topological vector group with respect to every link topology on it. We also see that some of the link topologies are finer than the integral norm topology on $L_p(G)$.

We show that if G is not discrete, then for every $0 < p < \infty$ and every neighborhood U of zero in G, there is an unbounded $f \in L_p(G)$ such that $supp(f)$ is contained in U. We also show that an $L_p(G)$ $(0 < p < \infty)$ does not contain an order unit unless G is finite. We introduce the notion of *completely positive* functions in an $L_p(G)$ and we show that the set of all completely positive functions is a link in $L_p(G)$ if G is σ-compact. A completely positive function is a real-valued measurable function on G which is far from zero almost everywhere.

It is well known that in $L_p(G)$ the pointwise multiplication is not closed in general. We introduce the concept of *p-ideal* subspace of an $L_p(G)$ which is closed under pointwise multiplication. More precisely, for $0 < p < \infty$, a function $f \in L_p(G)$ is p-ideal, if for every $g \in L_p(G)$, we have $f.g \in L_p(G)$. For instance, every characteristic function on a compact subset of G is a p-ideal of $L_p(G)$ for all $0 < p < \infty$. The set of all p-ideal functions is a linear subspace of $L_p(G)$ and we call it the p-ideal subspace of $L_p(G)$.

We show that this is an order-ideal of $L_p(G)$. We also show that the p-ideal subspace of an $L_p(G)$ with pointwise multiplication is a Riesz algebra. In addition, we give a link topology on the p-ideal subspace of $L_p(G)$ which makes it a topological lattice-ordered ring.

Conclusion

In this paper, the following concepts are presented:
1- A completely positive measurable function.
2- A p-ideal function in an $L_p(G)$.
3- A p-ideal subspace of an $L_p(G)$ and we denote it by $IL_p(G)$.
4- The link IP in $IL_p(G)$.

Also, the next theorems, propositions and corollaries are presented:
1- The Riesz space of $L_p(G)$ contains a strong link, if G is a finite group.
2- If G is a σ-compact locally compact abelian group, then the set of all completely positive functions in $L_p(G)$ is a link in $L_p(G)$ $(0 < p < \infty)$.
3- $IL_p(G)$ is a Riesz subspace and an order-ideal of $L_p(G)$. Furthermore, $IL_p(G)$ is closed under pointwise multiplication and is a Riesz algebra.
4- If G is σ-compact, then $IL_p(G)$ is a topological lattice-ordered ring with respect to some of the link topologies.

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۳، دوره ۱، شماره ۲، ص ۱۳-۱

بررسی فضاهای $L_p(G)$ به‌عنوان گروه‌های برداری مشبکه توپولوژیکی

محمدعلی رنجبر [۱]، سید حسن میرنوری [۲] ✉

۱. قم. آموزش‌وپرورش ناحیه چهارم. رایانامه: maaliranjbar@gmail.com

۲. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران. رایانامه: myrnouri@liau.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۰/۱۰
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۱۲/۱۱
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۳/۲۶
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۵/۳۰

کلمات کلیدی:
گروه مشبکه،
گروه مشبکهٔ یکانی،
یکّهٔ ترتیبی،
گروه فشردهٔ موضعی،
اندازهٔ هار،
جبر ریس،
حلقهٔ مشبکهٔ توپولوژیک

رده‌بندی ریاضی:
06F20, 06F25

چکیده

در این مقاله، فضاهای $L_p(G)$ را با رابطهٔ ترتیب نقطه‌ای به‌عنوان فضاهای ریس در نظر می‌گیریم و دسته‌ای از توپولوژی‌های گروهی (با عمل جمع) مشبکه‌ای را روی آن‌ها بررسی خواهیم کرد. این توپولوژی‌ها که توپولوژی‌های فیلتری مثبت و یا توپولوژی‌های زنجیره‌ای نام دارند، در بسیاری از مواقع توپولوژی برداری نیستند، بدین معنا که عمل ضرب اسکالر در آن‌ها پیوستهٔ توأم نیست، ولی بسیاری از ویژگی‌های مورد انتظار را دارند.

استناد: رنجبر، محمدعلی.، میرنوری، سید حسن. (۱۴۰۳). بررسی فضاهای $L_p(G)$ به‌عنوان گروه‌های برداری مشبکه توپولوژیکی. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۲)، ۱۳-۱.

http://doi.org/10.22091/MAA.2024.10266.1013

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه و پیش‌نیازها

ساختارهای جبری مرتب از اوایل قرن بیستم مورد توجه ریاضی‌دانان بزرگ جهان بوده است. همچنین رابطهٔ بین آن‌ها و MV -جبرها نیز به‌وسیلهٔ بسیاری از ریاضی‌دانان ازجمله موندیچی مورد بررسی قرار گرفته است، تا جایی که موندیچی نشان داد که رستهٔ گروه‌های مشبکهٔ یکانی با رستهٔ همهٔ MV -جبرها، یکریخت رسته‌ای است [۲۰]. یادآور می‌شویم که مفهوم MV -جبر، در سال ۱۹۵۸ میلادی توسط چانگ و به‌عنوان تعمیمی از مفهوم جبر بولی معرفی شد [۴]. می‌دانیم که در یک MV -جبر، مجموعهٔ همهٔ عناصر خودتوان، همراه با اعمال مشبکه، تشکیل یک جبر بولی می‌دهد [۵]. در دهه‌های اخیر، ساخت و بررسی توپولوژی‌ها بر روی گروه‌های مشبکه و فضاهای ریس مورد توجه بسیاری از پژوهشگران در ایران و جهان قرار گرفته است [۱۲]، [۱۹]، [۱۴]، [۲۳]، [۲۷]، [۲۸] و [۲۹]. این توپولوژی‌ها باید با اعمال جبری و اعمال مشبکه‌ای سازگار باشند. بدین معنا که عمل دوتایی جمع و عمل‌های دوتایی سوپریمم و اینفیمم تحت این توپولوژی‌ها پیوسته باشند. در این مقاله، پس از بیان خواص مقدماتی گروه‌های مشبکه، فضاهای ریس و فضاهای L_p، مختصری از پژوهش‌های نوین پیرامون ساخت توپولوژی‌های مشبکه‌ای در گروه‌های مشبکه و فضاهای ریس را بیان می‌کنیم. همچنین به تطبیق و بررسی این توپولوژی‌ها در یک فضای $L_p(G)$ می‌پردازیم که در آن G یک گروه فشردهٔ موضعی آبلی با اندازهٔ هار است. در انتها نیز یک سؤال بی‌پاسخ را در این خصوص مطرح خواهیم کرد. یک گروه مشبکه عبارت است از یک گروه جزئاً مرتب (یک گروه به‌همراه یک رابطهٔ ترتیب $\leq$ بر روی آن که تحت انتقال پایا است؛ بدین معنا که اگر $x \leq y$ ، آنگاه برای هر عنصر z در گروه، $x + z \leq y + z$) که هر زیرمجموعهٔ متناهی از آن، دارای سوپریمم و اینفیمم باشد. (سوپریمم مجموعهٔ دو عضوی x, y را با $x \vee y$ و اینفیمم آن را با $x \wedge y$ نمایش می‌دهیم). برای اطلاع از خواص گروه‌های جزئاً مرتب و گروه‌های مشبکه به [۱۰] و [۱۱] مراجعه نمایید. در اینجا ما گروه مشبکهٔ $(L, +, \leq)$ را همواره آبلی در نظر می‌گیریم و آن را به‌اختصار با L نمایش می‌دهیم و عضو خنثی نیز همواره با ۰ نمایش داده می‌شود. همچنین مجموعهٔ همهٔ عناصر $x \in L$ که در رابطهٔ $0 \leq x$ صدق کنند، را با L^+ نمایش می‌دهیم که مجموعهٔ عناصر مثبت نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱. عنصر مثبت u در گروه مشبکهٔ L را یکّهٔ ترتیبی نامند، هرگاه برای هر $x \in L$، عدد طبیعی n یافت شود به‌طوری‌که $x \leq nu$. همچنین یک گروه مشبکهٔ یکانی یا ℓ -گروه یکانی، عبارت است از یک گروه مشبکه که دارای یکّهٔ ترتیبی باشد.

تعریف ۲.۱. اگر L, H گروه‌های مشبکه باشند، آنگاه همریختی گروهی $f : L \to H$ را یک همریختی مثبت گوییم اگر $f\left(L^+\right) \subseteq H^+$ همچنین f را همریختی گروه‌های مشبکه نامیم، اگر علاوه‌بر خواص بالا، داشته باشیم:

$$f\left(x \wedge y\right) = f\left(x\right) \wedge f\left(y\right)$$

و

$$f\left(x \vee y\right) = f\left(x\right) \vee f\left(y\right).$$

گزاره ۳.۱. [۶] در هر گروه مشبکهٔ آبلی L، برای هر $x, y \in L$ و هر عدد طبیعی n داریم:

$$n(x \vee y) = nx \vee ny\,,\ \ n(x \wedge y) = nx \wedge ny.$$

لازم به توضیح است که هر گروه مشبکهٔ آبلی، نمایش‌پذیر است (ر.ک [۶]، گزاره ۶.۴۷) یعنی ℓ -زیرگروه حاصل‌ضربی از گروه‌های کاملاً مرتب است. حال، گزارهٔ بالا به‌طور مستقیم از گزاره ۱۰.۴۷ (در همین مرجع) نتیجه می‌شود. گروه مشبکهٔ L را ارشمیدسی [1] نامیم، اگر برای $x, y \in G$، هرگاه نامساوی $nx \leq y$ برای هر عدد طبیعی n برقرار باشد، آنگاه $x \leq 0$. زیرمجموعهٔ A از گروه مشبکهٔ G را جامد [2] نامیم هرگاه برای هر $a \in A$ و هر $x \in G$، اگر $|x| \leq |a|$، آنگاه $x \in A$ که در آن $|x| = x \vee (-x)$ قدرمطلق x نام دارد. فضای برداری حقیقی E به‌همراه رابطهٔ ترتیب جزئی $\leq$ یک فضای ریس نام دارد، هرگاه اولاً $(E, \leq)$ با عمل جمع، یک گروه مشبکه باشد و ثانیاً اگر $x, y \in E$ به‌طوری‌که $x \leq y$، آنگاه نامساوی $rx \leq ry$ برای هر عدد حقیقی مثبت r برقرار باشد. برای اطلاع از خواص مقدماتی مشبکه‌ها و فضاهای ریس به [۱] و [۲] مراجعه نمایید. یک جبر ریس عبارت است از یک جبر حقیقی مانند A همراه با یک رابطهٔ ترتیب جزئی $\leq$ که A به‌عنوان یک فضای برداری حقیقی، همراه با این رابطهٔ ترتیب، یک فضای ریس باشد و علاوه‌بر آن اگر $x, y \in A^+$، آنگاه $0 \leq x.y$ [۲۲]. گروه مشبکهٔ L به‌همراه توپولوژی τ را یک گروه مشبکهٔ توپولوژیک نامیم، هرگاه (L, τ) یک گروه توپولوژیک باشد و علاوه‌بر آن نگاشت‌های $(x, y) \to x \vee y$ و $(x, y) \to x \wedge y$ از $L \times L$ به L پیوسته باشند. در این حالت توپولوژی τ را توپولوژی گروهی مشبکه‌ای نامند. همچنین (L, τ) را گروه مشبکهٔ جامد موضعی نامیم اگر مبدأ دارای پایهٔ موضعی با عناصر جامد باشد. به همین

[1] Archimedean
[2] solid

ترتیب فضای ریس جامد موضعی تعریف می‌شود. لازم به توضیح است که $S \subseteq L$ را جامد نامند، اگر برای هر $x \in S$ و هر $y \in L$، اگر $|y| \leq |x|$، آنگاه $y \in S$.

فرض کنیم G یک گروه فشردهٔ موضعی آبلی باشد و μ اندازهٔ هار روی آن باشد. در این صورت برای هر $0 < p < \infty$، $L_p(G)$ را مجموعهٔ همهٔ توابع اندازه‌پذیر حقیقی مقدار روی G در نظر می‌گیریم که $\int_G |f|^p \, d\mu < \infty$. همان‌گونه که می‌دانیم $L_p(G)$ یک فضای برداری حقیقی است و با اعمال جمع نقطه‌ای و ضرب اسکالر، یک فضای برداری است. یادآور می‌شویم مفهوم تساوی در $L_p(G)$ با یک رابطهٔ هم‌ارزی تعریف می‌شود. مثلاً دو تابع $f, g \in L_p(G)$ را مساوی گوییم اگر تقریباًهمه‌جا مساوی باشند. یعنی

$$\mu \{x \in G : f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

برای اطلاع از خواص مقدماتی گروه‌های فشردهٔ موضعی و توابع انتگرال‌پذیر به [8] و [9] مراجعه نمایید. حال برای هر $0 < p < \infty$، رابطهٔ ترتیب نقطه‌ای را به مفهوم تقریباًهمه‌جا بر روی $L_p(G)$ در نظر می‌گیریم. یعنی $f \leq g$ اگر و تنها اگر نامساوی $f(x) \leq g(x)$ تقریباًهمه‌جا برقرار باشد. برای هر $f, g \in L_p(G)$ می‌دانیم که $f \wedge g$ اندازه‌پذیر است و ثانیاً

$$\int_G |f \wedge g|^p \, d\mu \leq \int_G (|f| + |g|)^p \, d\mu < \infty.$$

بنابراین $L_p(G)$ با این رابطهٔ ترتیب، یک فضای ریس است. همچنین یک بررسی ساده نشان می‌دهد که $L_p(G)$ یک فضای ریس ارشمیدسی است. البته معمولاً به‌جای گروه فشردهٔ موضعی G، فضای اندازه (X, Σ, μ) را در نظر می‌گیرند و به همین ترتیب ثابت می‌شود که $L_p(X, \Sigma, \mu)$ یک فضای ریس ارشمیدسی است [1].

فرض کنیم E یک فضای ریس و مجهز به نرم ریس N باشد (یعنی N یک نرم باشد به‌طوری‌که برای هر $x, y \in E$، نامساوی $|x| \leq |y|$، نامساوی $N(x) \leq N(y)$ را نتیجه دهد). فضای E را یک مشبکهٔ باناخ نامند، اگر E به‌همراه نرم ریس N یک فضای باناخ باشد. همچنین به‌ازای عدد حقیقی $p \geq 1$، نرم N را p- جمع‌پذیر نامند اگر تساوی

$$(N(x) + N(y))^p = (N(x))^p + (N(y))^p$$

برای هر $x, y \in E^+$ که $x \wedge y = 0$ برقرار باشد. مشبکهٔ باناخ (E, N) را یک فضای L_p مجرد نامند، اگر نرم ریس N، p- جمع‌پذیر باشد. ثابت شده است که برای هر فضای اندازهٔ (X, Σ, μ) و هر $p \geq 1$، فضای ریس $L_p(X, \Sigma, \mu)$ با نرم انتگرالی

$$\| f \|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

یک مشبکهٔ باناخ و همچنین یک L_p- فضای مجرد است. یادآور می‌شویم که یک L_p- فضای مجرد عبارت است از یک مشبکهٔ باناخ که نرم آن اولاً یک نرم ریس و ثانیاً p- جمع‌پذیر باشد. قضیهٔ زیر که تلفیقی از قضایای کاکوتانی [1] [16]، باننبلاست [2] [3] و ناکانو [3] [21] است، نشان می‌دهد که حتی هر L_p- فضای مجرد، یکریخت مشبکه‌ای با یک فضا به شکل بالا است.

قضیه ۴.۱. ([1]، قضیه ۳۳.۳. کاکوتانی- باننبلاست- ناکانو) برای هر $p \geq 1$، هر L_p- فضای مجرد، یکریخت مشبکه‌ای با یک مشبکهٔ باناخ $L_p(X, \Sigma, \mu)$ است.

ملاحظه ۵.۱. همان‌گونه که می‌بینیم مطالب ذکرشده در بالا فقط برای حالت‌هایی است که $p \geq 1$ و همان‌گونه که می‌دانیم، اگر $p < 1$ حتی ممکن است $\|\,.\,\|_p$ یک نرم نباشد و در واقع نامساوی مثلثی ممکن است برقرار نباشد.

تعریف ۶.۱. فرض کنیم E یک فضای ریس باشد و $C \subseteq E^+$. C را یک زنجیره در E نامیم اگر شرایط زیر برقرار باشند.

۱) اگر $x, y \in C$، آنگاه $x \wedge y \in C$.
۲) اگر $x \leq y$ و $x \in C$، آنگاه $y \in C$.
۳) $0 \notin C$.
۴) $\inf(C) = 0$.
۵) اگر $x \in C$ آنگاه $rx \in C$ برای هر $0 < r \leq 1$.

همچنین $F \subseteq E$ را یک فیلتر مثبت نامند اگر خواص ۱و۲و ۵ فوق را داشته باشد.

[1] Kakutani
[2] Bohnenblust
[3] Nakano

تعریف ۷.۱. فرض کنیم Ω یک زنجیره در E باشد. برای هر $g \in E$ و $r \in \Omega$ مجموعهٔ زیر را در نظر می‌گیریم.

$$U_{g,r} = \{x \in G, r - |x - g| \in \Omega\}$$

گردایهٔ همهٔ مجموعه‌های به شکل $U_{g,r}$ $(r \in \Omega, g \in E)$ تشکیل یک توپولوژی روی E می‌دهد که آن را توپولوژی زنجیره‌ای القاشده با Ω یا Ω-توپولوژی گوییم.

ملاحظه ۸.۱. زنجیره‌ها در اصل روی گروه‌های مشبکه تعریف می‌شوند و خاصیت ۵ که در بالا ذکر شد، در گروه‌های مشبکه تعمیم داده می‌شود و بیان آن خارج از اهداف این مقاله است. برای اطلاع از خواص توپولوژی‌های زنجیره‌ای به [۲۳]، [۲۴] و [۲۷] مراجعه نمایید.

قضیهٔ زیر از قضیه ۴ در [۲۳] و نتیجه ۱۰.۲ در [۱۷] نتیجه می‌شود. ابتدا تعریف زیر را یادآور می‌شویم که برای اولین بار رایکوف در [۲۵] آن را معرفی کرد.

تعریف ۹.۱. یک فضای برداری X به‌همراه توپولوژی τ روی آن را یک گروه برداری توپولوژیک نامند اگر اولاً (X, τ) به‌همراه عمل جمع یک گروه توپولوژیک هاسدورف باشد و ثانیاً τ دارای یک پایهٔ موضعی متعادل [1] در صفر باشد.

در برخی منابع در تعریف گروه برداری توپولوژیک، به‌جای متعادل موضعی بودن، شرط کلی‌تری را ارائه داده‌اند که عبارت است از اینکه برای هر اسکالر (حقیقی یا مختلط) α، نگاشت $x \mapsto \alpha x$ از X به X پیوسته باشد [۷] و [۱۸].

قضیه ۱۰.۱. اگر Ω یک زنجیره در E باشد، آنگاه E به‌همراه Ω- توپولوژی، یک گروه برداری توپولوژیک هاسدورف، جامد موضعی و محدب موضعی است.

فرض کنیم F یک فیلتر مثبت در فضای ریس E باشد، آنگاه برای هر $a \in F$ و برای هر $r \in F$ و هر عدد طبیعی n، مجموعهٔ زیر را در نظر می‌گیریم

$$N_{\frac{r}{n}}(a) = \{x \in E : n\,|x - a| \leq r\}.$$

گردایهٔ چنین مجموعه‌هایی، یک پایه برای یک توپولوژی روی E است. توپولوژی تولیدشده توسط این مجموعه‌ها را توپولوژی فیلتری مثبت نامند. البته مجموعه‌های به شکل $N_{\frac{r}{n}}(a)$ در این توپولوژی باز نیستند، بلکه هرکدام از آن‌ها حاوی یک همسایگی باز و مشمول در یک همسایگی بازند. در واقع پایهٔ توپولوژی در توپولوژی فیلتری مثبت، متشکل از مجموعه‌هایی به فرم زیر است

$$T_{\frac{r}{n}}(a) = \left\{x \in E : \exists k \in \mathbb{N}, N_{\frac{r}{k}}(x) \subseteq N_{\frac{r}{n}}(a)\right\}$$

که در آن $r \in F, a \in E$ و $n \in \mathbb{N}$ و می‌توان آن را یک گوی باز به مرکز a و شعاع $\frac{1}{n}r$ تصور کرد. البته این گفته بدین معنا نیست که توپولوژی فیلتری مثبت، توپولوژی متری است و ممکن است که این توپولوژی، مترپذیر نباشد. این توپولوژی را با τ_F نمایش می‌دهیم. برای اطلاع از ویژگی‌های توپولوژی فیلتری مثبت به [۱۴] و [۱۹] مراجعه نمایید. در زیر برخی از ویژگی‌های اساسی این توپولوژی و رابطهٔ آن با توپولوژی زنجیره‌ای بیان خواهند شد.

قضیه ۱۱.۱. ([۱۹]، قضیه ۵.۲) اگر F یک توپولوژی فیلتری مثبت در گروه مشبکهٔ G باشد، آنگاه (G, τ_F) یک گروه مشبکهٔ توپولوژیک است.

قضیه ۱۲.۱. ([۲۴]، قضیه ۵.۲). اگر F یک زنجیره در گروه مشبکهٔ L باشد، آنگاه توپولوژی زنجیره‌ای القاشده با F و توپولوژی τ_F یکسان‌اند.

البته همان‌گونه که پیش‌ازاین نیز بیان شد، در این تحقیق، نظر ما معطوف به فضای ریس $L_p(G)$ است و قضایای بالا را بر روی چنین فضایی اعمال می‌کنیم.

---
[1] balanced

۲ گروه‌های برداری مشبکه توپولوژیک

مثال ۱.۲. فرض کنیم G یک گروه فشردهٔ موضعی و $K \subseteq G$ فشرده باشد به‌طوری‌که $\mu(K) > \circ$ که در آن μ اندازهٔ هار روی G است. برای هر $\circ < p \leq \infty$ قرار می‌دهیم

$$L_p^+(G) = \{f \in L_p(G) : \circ \leq f\}$$

و

$$P_K := \left\{f \in L_p^+(G) : f(x) > \circ, \forall x \in K\right\}.$$

اولاً با توجه به اینکه $\chi_K \in P_K$، لذا $P_K \neq \emptyset$. ثانیاً روشن است که اگر $f \leq g$ و $f \in P_K$، آنگاه $g \in P_K$. ثالثاً $f \wedge g \in P_K$ برای هر $f, g \in P_K$. همچنین برای هر $f \in P_K$ و برای هر عدد طبیعی n روشن است که $\frac{1}{n} f \in P_K$. ازاینجا نتیجه می‌گیریم که $\inf \{f : f \in P_K\} = \circ$. بنابراین P_K یک زنجیره در $L_p(G)$ است. فرض کنیم $p \leq ۱$ و $\mu(K) = ۱$. می‌بینیم که برای هر عدد طبیعی n، $\frac{1}{n}\chi_K \in P_K$. همچنین برای هر عدد طبیعی n و هر $f \in N_{\frac{\chi_K}{n}}(\circ)$ داریم $n\,|f| \leq \chi_K$ و درنتیجه

$$n \parallel f \parallel_p \leq \parallel \chi_K \parallel^p = ۱.$$

بنابراین $N_{\frac{\chi_K}{n}}(\circ) \subseteq \left\{f \in L_p : \parallel f \parallel_p \leq \frac{1}{n}\right\}$. با توجه به اینکه $T_{\frac{\chi_K}{n}}(\circ) \subseteq N_{\frac{\chi_K}{n}}(\circ)$ بنابراین توپولوژی فیلتری مثبت روی $L_p(G)$ که با P_K القاء شده است، ظریف‌تر از توپولوژی حاصل از نرم $\parallel . \parallel_p$ است.

از مثال بالا می‌بینیم که برای هر زیرمجموعهٔ فشرده با اندازهٔ بزرگ‌تر از صفر در G، یک توپولوژی گروهی هاسدورف روی $L_p(G)$ ساخته می‌شود. حال این دو سؤال مطرح می‌شود. ۱) آیا ممکن است توپولوژی زنجیره‌ای روی فضای $L_p(G)$، یک توپولوژی برداری باشد؟ ۲) آیا هر زنجیره در $L_p(G)$، به‌صورت P_K است که در آن K یک زیرمجموعهٔ با اندازهٔ ناصفر در G است؟
برای پاسخ به سؤال اول ابتدا گزارهٔ زیر را یادآور می‌شویم.

گزاره ۲.۲. ([۲۴] گزاره ۷.۴) اگر G یک گروه فشردهٔ موضعی ناگسسته یا یک گروه نامتناهی با توپولوژی گسسته باشد، آنگاه $L_p(G)$ $(۱ \leq p < \infty)$ با رابطهٔ ترتیب نقطه‌ای، یکّهٔ ترتیبی ندارد.

لم ۳.۲. اگر گروه فشردهٔ موضعی G گسسته نباشد، آنگاه برای هر همسایگی صفر مانند U در G، تابع $f \in L_p(G)$ وجود دارد که اولاً بی‌کران است و ثانیاً $supp(f) \subseteq U$.

اثبات. فرض کنیم $U \subseteq G$ یک همسایگی صفر باشد. با استفاده از روشی که در برهان گزاره ۲.۲ به کار رفته است، یک دنبالهٔ تودرتو از همسایگی‌های باز و متقارن صفر مانند $(U_n)_n$ وجود دارد که $۲\mu(U_{n+۱}) \leq \mu(U_n)$ و $\overline{U_۱} \subseteq U$. برای نشان دادن این نکته، فرض کنیم $U_۱ \subseteq U$ یک همسایگی باز و متقارن صفر باشد که بستار آن نیز زیرمجموعهٔ U باشد. چون G گسسته نیست، عنصر $\circ \neq a \in U_۱$ وجود دارد و چون G هاسدورف است، لذا همسایگی باز و متقارن $U_۲$ از صفر وجود دارد که $U_۲ \cap a + U_۲ = \emptyset$. می‌توان $U_۲$ را طوری در نظر گرفت که $U_۲\ ,\ a + U_۲ \subseteq U_۱$. بنابراین

$$۲\mu(U_۲) = \mu(U_۲) + \mu(a + U_۲) \leq \mu(U_۱).$$

به همین ترتیب همسایگی‌های باز $U_۳, U_۴, \ldots$ ساخته می‌شوند. می‌توان $U_۱$ را طوری در نظر گرفت که $\mu(U_۱) < \infty$. حال تابع حقیقی مقدار f را روی G به‌صورت زیر می‌سازیم. برای هر $x \in G \setminus U_۱$ قرار می‌دهیم $f(x) = \circ$. برای هر عدد طبیعی n و هر $x \in U_n \setminus U_{n+۱}$، قرار می‌دهیم $f(x) = n$. می‌بینیم تابع f بی‌کران است. همچنین داریم

$$\circ < \int_G f^p d\mu \leq (۱ + \frac{۲^p}{۲} + \frac{۳^p}{۴} + \ldots + \frac{n^p}{۲^{n-۱}} + \ldots)\mu(U_۱).$$

با توجه به اینکه سری $\Sigma_{n=۱}^{\infty} \frac{n^p}{۲^{n-۱}}$ برای هر $p > \circ$ همگراست، لذا انتگرال بالا متناهی است. □

نتیجه ۴.۲. فضای ریس $L_p(G)$ حاوی یک زنجیرهٔ قوی است اگر و تنها اگر G یک گروه متناهی باشد.

اثبات. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. لذا هر تابع در $L_p(G)$ کران‌دار است و درنتیجه تابع ثابت ۱ یکّهٔ ترتیبی است. چون فضای ریس $L_p(G)$ ارشمیدسی است، لذا مجموعهٔ همهٔ یکّه‌های ترتیبی در آن، یک زنجیرهٔ قوی است. برعکس، فرض کنیم P یک زنجیرهٔ قوی در $L_p(G)$ باشد. لذا $L_p(G)$ حاوی یکّهٔ ترتیبی خواهد بود و طبق گزاره ۲.۲ G گسسته و متناهی است. $\square$

مثال زیر نشان می‌دهد که زنجیره‌ها در $L_p(G)$ لزوماً به فرم P_K که در مثال ۱.۲ بیان شد نیستند.

مثال ۵.۲. فرض کنیم G یک گروه فشردهٔ موضعی ناگسسته و $\mathcal{K}$ مجموعهٔ همهٔ همسایگی‌های فشردهٔ صفر در G باشد (بنابراین با توجه به مفروضات، $\infty > \mu(K) > ۰$ برای هر $K \in \mathcal{K}$). قرار می‌دهیم

$$C = \left\{ f \in L_p^+(G) : \exists K \in \mathcal{K}, K \subseteq pos(f) \right\}$$

که در آن $pos(f) = \{x \in G : f(x) > ۰\}$. نشان می‌دهیم C یک زنجیره در $L_p(G)$ است. اگر $f, g \in L_p(G)$، آنگاه همسایگی‌های فشردهٔ $K_۱, K_۲$ از مبدأ وجود دارند که در شرایط بالا صدق می‌کنند. بنابراین $K_۱ \cap K_۲ \subseteq pos(f \wedge g)$ که نتیجه می‌دهد $f \wedge g \in C$. خواص ۲و ۳و ۴و ۵ زنجیره‌ها نیز به‌وضوح برقرارند.

تعریف ۶.۲. برای هر گروه فشرده موضعی G، تابع اندازه‌پذیر $f : G \to \mathbb{R}$ را کاملاً مثبت نامیم اگر برای هر زیرمجموعهٔ فشرده K از G، عدد $\epsilon > ۰$ وجود داشته باشد که

$$\mu\left(f^{-۱}(-\epsilon, \epsilon) \cap K\right) = ۰.$$

به‌عبارت‌دیگر، تابع f کاملاً مثبت است اگر مقادیر این تابع بر هر زیرمجموعهٔ فشرده از G، تقریباًهمه‌جا دور از صفر باشند.

قضیه ۷.۲. اگر G یک گروه فشردهٔ موضعی و سیگما-فشرده باشد، آنگاه مجموعهٔ توابع کاملاً مثبت در $L_p(G)$ یک زنجیره در $L_p(G)$ است ($۰ < p < \infty$).

اثبات. مجموعهٔ همهٔ توابع کاملاً مثبت در $L_p(G)$ را با P نمایش می‌دهیم. ابتدا نشان می‌دهیم P تهی نیست. اگر $\mu(G) < \infty$ آنگاه روشن است که تابع ثابت ۱ در P است. فرض کنیم $\mu(G) = \infty$ ابتدا حالت $\frac{۱}{۲} < p < \infty$ را در نظر می‌گیریم. چون G سیگما-فشرده است، لذا یک دنباله از زیرمجموعه‌های باز پیش‌فشرده و ناتهی مانند $(U_n)_n$ وجود دارد (یعنی بستار هرکدام فشرده است) که تحت شمول صعودی است و $\cup_{n=۱}^{\infty} U_n = G$ ([9]، گزاره ۳۹.۴). برای هر n قرار می‌دهیم $K_n = \overline{U_n}$. بدون کاستن از کلیت برای هر $n > ۱$ می‌توان فرض کرد $\mu(K_n \setminus K_{n-۱}) > ۰$. حال قرار می‌دهیم $f_۱ = \dfrac{\chi_{K_۱}}{\mu(K_۱)}$ و برای هر عدد طبیعی $n > ۱$ قرار می‌دهیم

$$f_n = \left(\chi_{K_n \setminus K_{n-۱}}\right) \left(n^۲ \mu(K_n)\right)^{-۱}.$$

داریم:

$$\int_G f_۱(x) d\mu(x) = \int_{K_۱} f_۱(x) d\mu(x) = ۱$$

و همچنین برای هر $n > ۱$ خواهیم داشت:

$$\int_G f_n(x) d\mu(x) = \int_{K_n \setminus K_{n-۱}} f_n(x) d\mu(x) = \frac{\mu(K_n \setminus K_{n-۱})}{n^۲ \mu(K_n)} \leq \frac{۱}{n^۲}.$$

حال تابع حقیقی مقدار f روی G را چنین تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \vee_{n=۱}^{\infty} f_n(x).$$

با توجه به اینکه برای هر $x \in G$، دنبالهٔ $(f_n(x))_n$ کران‌دار است، لذا سوپریمم بالا برای هر $x \in G$ موجود است. بنابراین، تابع f یک تابع پله‌ای خواهد بود و مقادیر آن روی هرکدام از مجموعه‌های $K_۱,\ K_۲ \setminus K_۱,\ K_۳ \setminus K_۲,\ K_۴ \setminus K_۳, \ldots$ ثابت و مثبت هستند و در هیچ نقطه‌ای صفر نیستند. لذا اگر قرار دهیم $K_۰ = \emptyset$ خواهیم داشت:

$$\int_G |f(x)|^p \, d\mu(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \int_{K_n \setminus K_{n-۱}} f_n^p(x) d\mu(x) \leq \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{۲p}} < \infty$$

که نامساوی آخر به این دلیل است که از ابتدا فرض کردیم $p > \frac{1}{2}$. اگر $0 < p \leq \frac{1}{2}$، آنگاه توابع f_n را به‌صورت

$$f_n = \left(\chi_{K_n \setminus K_{n-1}}\right) \left(n^k \mu(K_n)\right)^{-1}$$

تعریف می‌کنیم که در آن k عددی طبیعی است که $kp > 1$. همچنین تابع f را مانند قبل تعریف می‌کنیم و با قرار دادن در انتگرال بالا خواهیم داشت

$$\int_G |f(x)|^p \, d\mu(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{kp}} < \infty.$$

ازاین‌رو $f \in P$. ادعا می‌کنیم که f کاملاً مثبت است. فرض کنیم $K \subseteq G$ فشرده و دلخواه باشد. چون $K \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} U_n$، لذا عدد طبیعی m وجود دارد که $K \subseteq \cup_{n=1}^{m} U_n$ و لذا $K \subseteq \cup_{n=1}^{m} K_n$. با توجه به نحوهٔ ساخت تابع f_m، می‌بینیم که مقادیر تابع f روی K بزرگ‌تر یا مساوی $\left(m^2 \mu(K_m)\right)^{-1}$ خواهند بود. حال کافی است عدد مثبت ϵ را طوری انتخاب کنیم که $\epsilon < \left(m^2 \mu(K_m)\right)^{-1}$. بنابراین

$$\mu\left(f^{-1}(-\epsilon, \epsilon) \cap K\right) = 0.$$

حال نشان می‌دهیم که P یک زنجیره است. روشن است که اگر $f, g \in P$، آنگاه $f \wedge g \in P$ و اگر $f \in P$ و $f \leq g$، آنگاه $g \in P$. برای نشان دادن اینکه $\inf(P) = 0$، فرض کنیم v یک کران پایین برای P باشد. لذا $v^+ = 0 \vee v$ کران پایین دیگری برای P است. بنابراین برای هر تابع $f \in P$ خواهیم داشت $v^+ \leq f$. با توجه به اینکه برای هر $f \in P$ و هر عدد طبیعی n، $\frac{1}{n} f \in P$، لذا نامساوی $v^+ \leq \frac{1}{n} f$ برای هر عدد طبیعی n برقرار است و این بدین معناست که $v^+ = 0$. درنتیجه $v \leq 0$. سایر ویژگی‌های زنجیره‌ها نیز به‌وضوح برقرارند. □

با توجه به اینکه عمل ضرب نقطه‌ای در $L_p(G)$ بسته نیست، لذا معمولاً ضرب‌های دیگری روی فضای $L_p(G)$ در نظر گرفته می‌شوند که آن را تبدیل به یک جبر کنند. به‌عنوان مثال ضرب پیچشی روی $L_1(G)$ که آن را به‌همراه نرم انتگرالی، به یک جبر باناخ مبدل می‌کند، کاربرد زیادی در جبر اندازه‌ها دارد. اما این ضرب فقط به ازای $p = 1$ روی $L_p(G)$ تعریف می‌شود. در اینجا سعی داریم به ضرب نقطه‌ای در $L_p(G)$ بازگردیم، ولی این ضرب را روی تمام فضا اعمال نمی‌کنیم و در این خصوص تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۸.۲. تابع $f \in L_p(G)$ ($0 < p < \infty$) را یک تابع p- ایده‌آل نامیم، اگر برای هر $g \in L_p(G)$، $f.g \in L_p(G)$. همچنین مجموعهٔ همهٔ توابع p- ایده‌آل در $L_p(G)$ را زیرفضای p- ایده‌آل $L_p(G)$ نامیم و با $IL_p(G)$ نمایش می‌دهیم.

روشن است که برای هر $0 < p < \infty$ و برای هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ G مانند K، داریم $\chi_K \in IL_p(G)$. در زیر دلیل انتخاب این نام برای این توابع، با یک قضیه روشن می‌شود.

قضیه ۹.۲. الف) $IL_p(G)$ یک زیرفضای ریس و همچنین یک ایده‌آل ترتیبی در $L_p(G)$ است.
ب) $IL_p(G)$ با رابطهٔ ترتیب نقطه‌ای و ضرب نقطه‌ای، یک جبر ریس است.

اثبات. الف) اگر $f, g \in IL_p(G)$، آنگاه برای هر $h \in L_p(G)$ داریم $h.f, h.g \in L_p(G)$ و درنتیجه

$$h.(f+g) = h.f + h.g \in L_p(G).$$

سایر ویژگی‌های فضای برداری به‌وضوح برقرارند. حال فرض کنیم $f, g \in IL_p(G)$. اگر $h \in L_p(G)$ دلخواه باشد، آنگاه خواهیم داشت $|h.(f \wedge g)| \leq |h.f| \in L_p(G)$ که این نتیجه می‌دهد $f \wedge g \in L_p(G)$. بنابراین $IL_p(G)$ با رابطهٔ ترتیب نقطه‌ای یک فضای ریس است. همچنین روشن است که اگر $f \in IL_p(G)$ و $|g| \leq |f|$، آنگاه $g \in IL_p(G)$. بنابراین $IL_p(G)$ یک ایده‌آل ترتیبی در $L_p(G)$ است.

ب) برای دیدن اینکه $IL_p(G)$ یک جبر ریس است، کافی است ملاحظه کنیم که اگر $f, g \in IL_p(G)$ و $f \leq g$ آنگاه نامساوی $f.h \leq g.h$ برای هر $h \in (IL_p(G))^+$ برقرار است. □

مجموعهٔ توابع کاملاً مثبت در $IL_p(G)$ را با IP نمایش می‌دهیم. در قضیه ۷.۲ دیدیم که P یک زنجیره در $L_p(G)$ است، به شرط اینکه G سیگما-فشرده باشد. اگر G سیگما-فشرده باشد، خواص ۱و۲و۳و ۵ از زنجیره‌ها به‌وضوح برای IP نیز برقرارند. برهان اینکه $\inf(IP) = 0$، همانند برهان $\inf(P) = 0$ در قضیه ۷.۲ است و درنتیجه IP یک زنجیره در $IL_p(G)$ است.

نتیجه ۱۰.۲. اگر G سیگما-فشرده باشد، آنگاه زنجیرهٔ IP در $IL_p(G)$ نسبت به عمل ضرب بسته است.

گزاره ۱۱.۲. اگر G سیگما-فشرده باشد، آنگاه $IL_p(G)$ با توپولوژی زنجیره‌ای IP، یک حلقهٔ توپولوژیک است. بدین معنا که علاوه‌بر اینکه توپولوژی زنجیره‌ای IP یک توپولوژی گروهی روی $IL_p(G)$ است، عمل ضرب نقطه‌ای توابع نیز نسبت به این توپولوژی پیوسته است.

اثبات. نشان می‌دهیم که عمل ضرب برداری در صفر پیوسته است. با توجه به اینکه توپولوژی فیلتری مثبت که به‌وسیلهٔ IP القا شده است، با توپولوژی زنجیره‌ای القاشده به‌وسیلهٔ IP یکی است، کافی است که این پیوستگی در توپولوژی فیلتری مثبت ثابت شود. فرض کنیم $u \in IP$ دلخواه باشد. نشان می‌دهیم عناصر $v, w \in IP$ وجود دارند که $N_v(\circ).N_w(\circ) \subseteq N_u(\circ)$. قبل از برهان این ادعا، ابتدا به این نکته اشاره می‌کنیم که چون برای هر $u \in IP$، و هر $n \in \mathbf{N}$، داریم $\frac{1}{n}u \in IP$، لذا می‌توانیم تمام همسایگی‌های صفر در $IL_p(G)$ را در توپولوژی فیلتری مثبت به‌صورت $N_u(\circ)$ در نظر بگیریم. حال تابع v را برای هر $x \in G$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$v(x) = \min\{u(x), ۱\}.$$

بنابراین تابع v نیز اندازه‌پذیر، کاملاً مثبت و در $IL_p(G)$ است و درنتیجه $v \in P$. چون برای هر $x \in G$، $v(x) \leq ۱$، بنابراین $v^۲ \leq v$. حال اگر $f, g \in N_v(\circ)$ آنگاه $|f| \leq v, |g| \leq v$، و خواهیم داشت

$$|fg| = |f|\,|g| \leq v^۲ \leq v \leq u$$

که این نیز نتیجه می‌دهد $N_v(\circ).N_v(\circ) \subseteq N_u(\circ)$. □

ملاحظه ۱۲.۲. لازم به ذکر است که عمل ضرب اسکالر در $IL_p(G)$ نسبت به توپولوژی زنجیره‌ای IP پیوسته نیست، مگر آنکه G یک گروه متناهی باشد. لذا اگر G متناهی نباشد (حتی اگر فشرده باشد)، هیچ‌کدام از توپولوژی‌های زنجیره‌ای، فضای $IL_p(G)$ را به یک جبر توپولوژیک مبدل نمی‌کنند.

References

[1] Aliprantis, C.D., & Burkinshaw, O. (2003). Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics. *Math Surveys and Monographs*, Volume 105, *American Math. Society*.

[2] Birkhoff, G. (1967). Lattice Theory. *A.M.S. Colloquium Publications*.

[3] Bohnenblust, H.F. (1940). On axiomatic characterization of L_p-spaces. *Duke Math. J*, 6, 627–640. DOI: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-40-00648-2.

[4] Chang, C.C. (1958). Algebraic analysis of many valued logics. *Trans. Amer. Math. Soc*, 88, 467–490. DOI: https://doi.org/10.2307/1993227.

[5] Cignoli, R., Ottaviano, I.M.L.D., & Mundici, D. (2000). Algebraic Foundations of many-valued Reasoning. *Kluwer Academic Publ, Dordrecht*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-015-9480-6.

[6] Darnel, M. (1995). Theory of lattice-ordered groups. *Marcel Dekker, New York*.

[7] Dominguez, X., & Tarieladze, V. (2008). Group topologies on vector spaces and character lifting properties. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (3)*, 14, 21–34.

[8] Folland, G.B. (1994). A Course in Abstract Harmonic Analysis. *CRC Press*. DOI: https://doi.org/10.1201/b19172.

[9] Folland, G.B. (1999). Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications. *Wiley, New York, second edition*.

[10] Glass, A.M.W. (1999). Partially Ordered Groups. *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*

[11] Goodearl, K.R. (1986). Partially Ordered Abelian Groups With Interpolation. *Amer. Mathematical Society (Mathematical Surveys and Monographs)*. DOI: https://doi.org/10.1090/surv/020.

[12] Gusic, I. (1998). A topology on lattice-ordered groups. *Proc Amer Math Soc*, 126(9), 2593–2597.

[13] Hahn, H. (1907). Uber die nichtarchimedischen Groben-systeme. *Sitz. ber. K. Akad. der Wiss., Math. Nat. KI. IIa*, 116, 601–655.

[14] Jordan, F., & Pajoohesh, H. (2018). Topologies on abelian lattice-ordered groups induced by a positive filter and completeness. *Algebra Universalis*, 79(62), 1–18. DOI: https://doi.org/10.1007/s00012-018-0543-7.

[15] Kadison, R.V. (1951). A representation theory for commutative topological algebra. *Mem. A M S, No. 7*.

[16] Kakutani, S. (1941). Concrete Representation of Abstract (L)-Spaces and the Mean Ergodic Theorem. *Ann. of Math*, 42, 523–537. DOI: https://doi.org/10.2307/1968915.

[17] Karamdoust, S., Myrnouri, H., & Pourgholamhossein, M. (2024). On the Boolean algebra induced by a unital ℓ-group. *Algebra Universalis*, 85, 16. DOI: https://doi.org/10.1007/s00012-024-00848-6.

[18] Kenderov, P. (1970). On topological vector groups. *Mat. Sb*, 10, 531–546. DOI: https://doi.org/10.1070/SM1970v010n04ABEH001679.

[19] Kopperman, R., Pajoohesh, H., & Richmond, T. (2011). Topologies arising from metrics valued in abelian ℓ-groups. *Algebra Universalis*, 65, 315–330. DOI: https://doi.org/10.1007/s00012-011-0132-5.

[20] Mundici, D. (1986). Interpretation of AF C*-algebras in Lukasiewicz sentential calculus. *J. Funct. Anal*, 65, 15–63. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(86)90015-7.

[21] Nakano, H. (1955). Semi-Ordered Linear Spaces. *Japan Society for the Promotion of Science*, Tokyo.

[22] Pagter. B. de. (1981). F-Algebras and Orthomorphisms. *Ph. D. Dissertation, Leiden*.

[23] Pourgholamhossein, M., & Ranjbar, M.A. (2019). On the topological mass Lattice Groups. *Positivity*, 23, 811–827. DOI: https://doi.org/10.1007/s11117-018-0639-5.

[24] Pourgholamhossein, M., & Ranjbar, M.A. (2022). Positive filters and links in an ℓ-group. *Quaestiones Mathematicae*, 45, 1297–1308. DOI: https://doi.org/10.2989/16073606.2021.1942287.

[25] Raikov, D.A. (1964). Free locally convex spaces for uniform spaces. *Mat. Sb. (N.S)*, 63(105), 582–590.

[26] Raikov, D.A. (1968). On B-complete topological vector groups. *Studia Math*, 31, 295–306.

[27] Ranjbar, M.A., & Pourgholamhossein, M. (2020). Filter and weak link topologies. *Algebra Universalis*, 81, 41. DOI: https://doi.org/10.1007/s00012-020-00670-w.

[28] Wu, S., Luan, W., & Yang, Y. (2020). Filter topologies on MV-algebras ll. *Soft Computing*, 24, 3173–3177. DOI: https://doi.org/10.1007/s00500-020-04682-5.

[29] Yang, Y. (2009). The C-topology on lattice-ordered groups. *Sci China Ser A*, 52(11), 2397–2403. DOI: https://doi.org/10.1007/s11425-009-0098-3.