Measure Algebras and Applications

A^{**}-biprojectivity of Banach algebras

Mehdi Rostami[1] ✉, **Amir Sahami**[2]

1. Corresponding Author, Department of Mathematics and Computer Science, Amirkabir University of Technology (Tehran Polytechnic), Iran. Email: mross@aut.ac.ir
2. Department of Mathematics, Faculty of Basic Science, Ilam University, P.O. Box 69315-516 Ilam, Iran. Email: a.sahami@ilam.ac.ir

Article Info	ABSTRACT

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 1 August 2023
Received in revised form:
10 September 2023
Accepted: 27 September 2023
Published Online:
30 September 2023

Keywords:
Amenable,
A^{**}-biprojective,
Inner amenable,
Lipschitz algebra,
Triangular algebra

2020 Mathematics Subject Classification:
43A20, 46M10

In this paper, we introduce a new homological notion related to biprojective Banach algebras, namely A^{**}-biprojective Banach algebras. We study the relation between this new notion and the other homological notions, such as amenability, pseudo-amenability and inner amenability. Also, we investigate this new notion on certain Banach algebras such as group algebras, Lipschitz algebras and triangular Banach algebras.

Cite this article: Rostami, M., & Sahami, A. (2023). A^{**}-biprojectivity of Banach algebras. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 128–140. http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9829.1011

©The Author(s).
Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/MAA.2023.9829.1011

Extended Abstract

Introduction

Biprojectivity of Banach algebras as an important homological notion arise naturally in Helemskii's works in the 1980s, interested readers are referred to his comprehensive book [5]. We begin with recalling its definition. A Banach algebra A is called *biprojective* if there exists a bounded A-bimodule morphism $\rho\colon A \to A\widehat{\otimes}A$ such that $\pi_A \circ \rho(a) = a$. This concept closely related to the notions of contractibility and amenability introduced by Johnson [8, 9]. The notion of φ-amenability was introduced in [10] and independently in [13]. Let A be a Banach algebra. For a fixed nonzero multiplicative linear functional $\varphi \in A^*$, we call A *left φ-amenable* if A possesses a left φ-*mean*, i.e., a bounded linear functional m on A^* satisfying $m(\varphi) = 1$ and $m(f \cdot a) = \varphi(a)m(f)$ for all $a \in A$ and $f \in A^*$. A Banach algebra is called *character amenable* if it is left φ-amenable for all $\varphi \in \Delta(A)$ and it has a bounded right approximate identity. Character amenability of some Banach algebras associated to a locally compact group and their second duals were studied in [6, 13]. Character amenability of Lipschitz algebras was studied by Dashti et al in [1]. Here, we remind that A is *φ-inner amenable* if there exists a bounded net (a_α) in A such that $aa_\alpha - a_\alpha a \to 0$ and $\varphi(a_\alpha) = 1$ (or equivalently $\varphi(a_\alpha) \to 1$) for all α and $a \in A$ [7]. Some examples of φ-inner amenable Banach algebras are commutative Banach algebras, character amenable Banach algebras and Banach algebras containing a bounded approximate identity. In this paper, we are going to define and investigate the concept of A^{**}-biprojectivity for any Banach algebra. We obtain the relation between this definition with amenability and φ-amenability. After that, we characterize A^{**}-biprojectivity of Lipschitz algebras $A = Lip_\alpha(X)$, where X is a compact metric space and $0 < \alpha < 1$. Finally, we study this new concept for triangular Banach algebras.

Conclusion

In this paper, the following definitions are stated:

***Definition* 0.1.** *A Banach algebra A is called biprojective if there exists a bounded A-bimodule morphism $\rho\colon A \to A\widehat{\otimes}A$ such that $\pi_A \circ \rho(a) = a$.*

***Definition* 0.2.** *A Banach algebra A is called left φ-amenable if A possesses a left φ-mean, i.e., a bounded linear functional m on A^* satisfying $m(\varphi) = 1$ and $m(f \cdot a) = \varphi(a)m(f)$ for all $a \in A$ and $f \in A^*$.*

***Definition* 0.3.** *A Banach algebra A is called A^{**}-biprojective if there exists bounded A-module morphism $\rho : A \to A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ such that for all $a \in A$*

$$\pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \kappa_A(a).$$

***Definition* 0.4.** *Let A be a Banach algebra and $\varphi \in \Delta(A)$. A is called φ-inner amenable if there exists a net (m_α) in A such that for all $a \in A$*

$$am_\alpha - \varphi(a)m_\alpha \to 0, \qquad \varphi(m_\alpha) \to 1.$$

Also, the next theorems are presented:

***Theorem* 0.5.** *Let A be a Banach algebra with a bounded approximate identity. If A is A^{**}-biprojective, then A is (pseudo-)amenable.*

***Theorem* 0.6.** *Let G be a locally compact group. If $L^1(G)$ is $L^1(G)^{**}$-biprojective, then G is amenable.*

***Theorem* 0.7.** *Let A be a Banach algebra. If A is A^{**}-biprojective, then A^2 is dense in A.*

***Theorem* 0.8.** *Let A be a Banach algebra and $\varphi \in \Delta(A)$. If A is φ-inner amenable and A^{**}-biprojective, then A is left φ-amenable.*

***Theorem* 0.9.** *Let G be a locally compact group. The algebra $M(G)\widehat{\otimes}L^1(G)$ is $(M(G)\widehat{\otimes}L^1(G))^{**}$-biprojective if and only if G is finite.*

***Theorem* 0.10.** *Let X be a compact metric space and $0 < \alpha < 1$. $Lip_\alpha(X)$ is $Lip_\alpha(X)^{**}$-biprojective if and only if X is finite.*

***Theorem* 0.11.** *Let A be a Banach algebra and $\varphi \in \Delta(A)$. If A is φ-inner amenable, then the triangular Banach algebra $\mathcal{T}$ is not $\mathcal{T}^{**}$-biprojective.*

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۱۴۰-۱۲۸

A^{**}- دوتصویری جبرهای باناخ

مهدی رستمی [۱] ✉، **امیر سهامی** [۲]

۱. نویسندهٔ مسئول، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران. رایانامه: mross@aut.ac.ir
۲. دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ایلام، ایلام، ایران. رایانامه: a.sahami@ilam.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۵/۱۰
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۶/۱۹
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۷/۵
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
میانگین‌پذیر،
A^{**}- دوتصویر،
میانگین‌پذیر داخلی،
جبر لیپشیتزی،
جبر مثلثی

رده‌بندی ریاضی:
43A20, 46M10

چکیده

در این مقاله یک مفهوم همانستگی جدید مرتبط با جبرهای باناخ دوتصویر به نام جبرهای باناخ A^{**}-دوتصویر ارائه می‌کنیم. ما به مطالعهٔ رابطهٔ بین این مفهوم و برخی مفاهیم همانستگی همچون میانگین‌پذیری، شبه میانگین‌پذیری و میانگین‌پذیری داخلی می‌پردازیم. همچنین این مفهوم جدید برای جبرهای باناخ خاص مانند جبرهای گروهی، جبرهای لیپشیتزی و جبرهای باناخ مثلثی بررسی می‌شود.

استناد: رستمی، مهدی.، سهامی، امیر. (۱۴۰۲). A^{**}- دوتصویری جبرهای باناخ. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۱۴۰-۱۲۸.
http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9829.1011

ناشر: دانشگاه قم.
© نویسندگان.
CC BY NC

۱ مقدمه

دوتصویری جبرهای باناخ به‌عنوان یک مفهوم همانستگی مهم در آثار هلمسکی در دههٔ ۱۹۸۰ به وجود آمد، خوانندگان علاقه‌مند به کتاب مرجع او مراجعه کنند [۵]. با یادآوری تعریف آن شروع می‌کنیم. یک جبر باناخ A دوتصویر نامیده می‌شود هرگاه یک همریختی A -مدولی کران‌دار $\rho : A \to A\widehat{\otimes}A$ وجود داشته باشد که $\pi_A \circ \rho(a) = a$. این مفهوم ارتباط نزدیکی با مفاهیم انقباض‌پذیری و میانگین‌پذیری ارائه‌شده توسط جانسون دارد [۸، ۹]. مفهوم φ -میانگین‌پذیری در [۱۰] و به‌طور مستقل در [۱۳] معرفی شد. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. برای یک تابعک خطی ضربی $\varphi \in A^*$، A را φ -میانگین‌پذیر چپ می‌نامیم هرگاه A دارای یک φ -میانگین چپ باشد، یعنی، یک تابعک خطی کران‌دار m روی A^* که برای هر $a \in A$ و $f \in A^*$ در شرط $m(\varphi) = ۱$ و $m(f \cdot a) = \varphi(a)m(f)$ صدق کند. جبر باناخ A مشخصه میانگین‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\varphi \in \Delta(A)$، φ -میانگین‌پذیر چپ باشد و دارای یکهٔ تقریبی راست کران‌دار باشد. مشخصه میانگین‌پذیری برخی از جبرهای باناخ وابسته به یک گروه فشرده موضعی و دوگان دوم آن در [۶] مطالعه شده است. مشخصه میانگین‌پذیری جبرهای لیپشیتزی توسط دشتی و همکاران در [۱] مطالعه شده است. در اینجا یادآوری می‌کنیم که A را φ -میانگین‌پذیر داخلی می‌نامیم هرگاه تور کران‌دار (a_α) در A وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$ و هر α، $aa_\alpha - a_\alpha a \to ۰$ و $\varphi(a_\alpha) = ۱$ (یا به‌طور معادل $\varphi(a_\alpha) \to ۱$). جبرهای باناخ جابه‌جایی، جبرهای باناخ مشخصه میانگین‌پذیر و جبرهای باناخ دارای یکهٔ تقریبی کران‌دار مثال‌هایی از جبرهای باناخ φ -میانگین‌پذیر داخلی هستند. در این مقاله، به تعریف و بررسی مفهوم A^{**} -دوتصویری جبرهای باناخ می‌پردازیم. رابطهٔ بین این تعریف با مفهوم میانگین‌پذیری و φ -میانگین‌پذیری را به دست می‌آوریم. پس از آن، A^{**} -دوتصویری جبرهای لیپشیتزی $A = Lip_\alpha(X)$ را مشخص می‌کنیم. در نهایت، به مطالعهٔ این مفهوم روی جبرهای باناخ مثلثی می‌پردازیم.

۲ تعاریف و مقدمات

فرض کنید A یک جبر باناخ و $A\widehat{\otimes}A$ فضای حاصلضرب تانسوری تصویری باشد. در این صورت $A\widehat{\otimes}A$ یک باناخ A- دومدول با اعمال مدولی زیر است:

$$a \cdot (b \otimes c) = ab \otimes c,\ (b \otimes c) \cdot a = b \otimes ca \qquad (a, b, c \in A)$$

همچنین $(A\widehat{\otimes}A)^*$ با اعمال مدولی زیر یک باناخ A- دومدول است:

$$(a \cdot f)(b \otimes c) = f(b \otimes ca),$$

$$(f \cdot a)(b \otimes c) = f(ab \otimes c) \qquad (a, b, c \in A, f \in (A\hat{\otimes}A)^*).$$

به‌طور مشابه می‌توان $(A\widehat{\otimes}A)^{**}$ را به‌عنوان یک باناخ A -دومدول در نظر گرفت. در سرتاسر این مقاله، $\Delta(A)$ بیانگر مجموعهٔ تمام تابعک‌های خطی ضربی ناصفر روی جبرهای باناخ A، $\kappa_A : A \to A^{**}$ نشانندهٔ طبیعی و $\pi_A : A\hat{\otimes}A \to A$ نگاشت ضربی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\pi_A(a \otimes b) = ab \qquad (a, b \in A).$$

آرنز در سال ۱۹۵۱ دو ضرب روی دوگان دوم یک جبر باناخ تعریف کرد تا بتواند آن را تبدیل به یک جبر باناخ کند. در واقع این ضرب‌ها توسیع ضرب معمولی روی جبر هستند. به این ضرب‌ها ضرب آرنز اول و دوم گفته می‌شود که به‌ترتیب با نمادهای $\Box$ و $\Diamond$ نمایش داده می‌شوند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\langle F\Box G, f\rangle = \langle F, G \cdot f\rangle, \qquad \langle F\Diamond G, f\rangle = \langle G, f \cdot F\rangle,$$

و

$$\langle G \cdot f, a\rangle = \langle G, f \cdot a\rangle, \qquad \langle f \cdot F, a\rangle = \langle F, a \cdot f\rangle,$$

و

$$\langle f \cdot a, b\rangle = \langle f, ab\rangle, \qquad \langle a \cdot f, b\rangle = \langle f, ba\rangle,$$

که در آن $F, G \in A^{**}$، $f \in A^*$ و $a, b \in A$.

ابتدا تعریف جبرهای باناخ A^{**} -دوتصویر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. جبر باناخ A را A^{**}-دوتصویر نامیم هرگاه همریختی پیوسته A- دومدولی $\rho : A \to A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $a \in A$

$$\pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \kappa_A(a)$$

که در آن $\pi_{A^{**}} : A^{**}\widehat{\otimes}A^{**} \to A^{**}$ عملگر ضربی با ضابطهٔ $\pi_{A^{**}}(F \otimes G) = F\Box G$ است.

در قضیهٔ زیر به بررسی رابطهٔ بین میانگین‌پذیری جبر باناخ A با A^{**}-دوتصویری می‌پردازیم.

قضیه ۲.۲. فرض کنیم A یک جبر باناخ با یکهٔ تقریبی کران‌دار باشد. اگر A، A^{**}-دوتصویر باشد، آنگاه A میانگین‌پذیر است.

اثبات. ازآنجاکه جبر A، A^{**}-دوتصویر است؛ لذا طبق تعریف، عملگر خطی $\rho : A \to A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $a, b \in A$ داریم:

$$\pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \kappa_A(a), \qquad \rho(ab) = \rho(a) \cdot b = a \cdot \rho(b).$$

فرض کنیم (e_α) یکهٔ تقریبی کران‌دار A باشد. حال قرار دهید $N_\alpha = \rho(e_\alpha) \in A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$. در این صورت برای هر $a \in A$ داریم

$$a \cdot N_\alpha - N_\alpha \cdot a = a \cdot \rho(e_\alpha) - \rho(e_\alpha) \cdot a = \rho(ae_\alpha - e_\alpha a) \to \circ,$$

و نیز

$$\pi_{A^{**}}(N_\alpha)a = \pi_{A^{**}} \circ \rho(e_\alpha)a = \kappa_A(e_\alpha)a \to a.$$

طبق [۳، لم ۱.۷] نگاشت

$$\Psi : A^{**}\widehat{\otimes}A^{**} \to (A\widehat{\otimes}A)^{**}$$

موجود است به‌طوری‌که برای هر $a, b \in A$ و $n \in A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) $\Psi(\kappa_A(a) \otimes \kappa_A(b)) = \kappa_{A\widehat{\otimes}A}(a \otimes b)$

ب) $\Psi(n) \cdot a = \Psi(n \cdot a)$

پ) $a \cdot \Psi(n) = \Psi(a \cdot n)$

ت) $\pi_A^{**}(\Psi(n)) = \pi_{A^{**}}(n)$.

تعریف می‌کنیم $m_\alpha = \Psi(N_\alpha) \in (A\widehat{\otimes}A)^{**}$. چون (m_α) یک تور کران‌دار است در نتیجه طبق قضیه باناخ آلاغلو دارای حد ضعیف ستاره $M \in (A\widehat{\otimes}A)^{**}$ است؛ بنابراین برای هر $a \in A$

$$\begin{aligned} a \cdot M - M \cdot a &= w^* - \lim_\alpha a \cdot m_\alpha - m_\alpha \cdot a \\ &= w^* - \lim_\alpha a \cdot \Psi(N_\alpha) - \Psi(N_\alpha) \cdot a \\ &= w^* - \lim_\alpha \Psi(a \cdot N_\alpha - N_\alpha \cdot a) = \circ, \end{aligned}$$

و همچنین

$$\pi_A^{**}(M) \cdot a = w^* - \lim_\alpha \pi_A^{**}(\Psi(N_\alpha)) \cdot a = w^* - \lim_\alpha \pi_{A^{**}}(N_\alpha) \cdot a = a.$$

پس $M \in (A\widehat{\otimes}A)^{**}$ یک قطر مجازی برای A است و طبق قضیه [۹، قضیه ۱.۳] A میانگین‌پذیر است. □

نتیجه ۳.۲. فرض کنیم G یک گروه فشرده موضعی باشد. اگر $L^1(G)$، $L^1(G)^{**}$-دوتصویر باشد، آنگاه G میانگین‌پذیر است.

اثبات. می‌دانیم که $L^1(G)$ همواره دارای یکهٔ تقریبی کران‌دار است. از قضیه ۲.۲ نتیجه می‌شود که اگر $L^1(G)$، $L^1(G)^{**}$-دوتصویر باشد، آنگاه $L^1(G)$ میانگین‌پذیر است و طبق قضیه جانسون نتیجه می‌شود که G میانگین‌پذیر است. □

مشابه تکنیک استدلال قضیه می‌توان قضیهٔ زیر را ثابت کرد که ما از اثبات آن چشم‌پوشی می‌کنیم.

قضیه ۴.۲. فرض کنیم A یک جبر باناخ با یکهٔ تقریبی باشد. اگر A، A^{**}-دوتصویر باشد، آنگاه A شبه میانگین‌پذیر است.

فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد و $\ell^1(S)$ مجموعهٔ تمام توابع مختلط مقدار $f: S \to \mathbb{C}$ باشد به‌طوری‌که $\|f\|_1 = \sum_{s\in S} |f(s)| < \infty$.
برای هر $f, g \in \ell^1(S)$ ضرب پیچشی f و g به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(f * g)(r) = \sum_{st=r} f(s)g(t) \qquad (r \in S),$$

و در حالتی که هیچ عضوی مانند s و t یافت نشود که $st = r$ آن‌گاه $\sum_{st=r} f(s)g(t) = 0$. در این صورت $(\ell^1(S), *, \|\cdot\|_1)$ یک جبر باناخ است که آن را جبر نیم‌گروهی S می‌نامیم. در مثال زیر مشاهده می‌کنیم که شرط وجود یکهٔ تقریبی (کران‌دار) در قضیه ۲.۲ و قضیه ۴.۲ ضروری است.

مثال ۵.۲. فرض کنیم S نیم‌گروه صفر چپ با حداقل دو عضو باشد؛ یعنی برای هر $s, t \in S$ داشته باشیم

$$st = s.$$

فرض کنید $\ell^1(S)$ جبر نیم‌گروهی وابسته به S باشد.
قرار دهید

$$\varphi_S(\sum_{i\in S} f(s)\delta_s) = \sum_{s\in S} f(s).$$

به‌وضوح φ_S یک مشخصه روی $\ell^1(S)$ است که آن را مشخصه افزایشی می‌نامیم. به‌راحتی دیده می‌شود که برای هر $f, g \in \ell^1(S)$

$$f * g = \varphi_S(g) f.$$

حال f_0 را عضوی در $\ell^1(S)$ در نظر بگیریم که $\varphi_S(f_0) = 1$. نگاشت

$$\rho: \ell^1(S) \to \ell^1(S)^{**} \widehat{\otimes} \ell^1(S)^{**}$$

را به‌صورت $\rho(f) = f \otimes f_0$ تعریف می‌کنیم. در این صورت ρ یک همریختی پیوسته $\ell^1(S)$-دو مدولی است که برای هر $f \in \ell^1(S)$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\pi_{\ell^1(S)^{**}} \circ \rho(f) = \pi_{\ell^1(S)^{**}}(f \otimes f_0) = f * f_0 = \varphi(f_0) f = f.$$

این نتیجه می‌دهد که $\ell^1(S)$، $\ell^1(S)^{**}$-دوتصویر است. این در حالی است که $\ell^1(S)$ میانگین‌پذیر (شبه میانگین‌پذیر) نیست؛ زیرا دارای یکهٔ تقریبی نیست.

لم ۶.۲. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. اگر A، A^{**}-دوتصویر باشد، آنگاه A^2 در A چگال است.

اثبات. چون A یک جبر A^{**}-دوتصویر است؛ بنابراین همریختی پیوسته A-دومدولی $\rho: A \to A^{**} \widehat{\otimes} A^{**}$ موجود است به‌طوری‌که به‌ازای هر $a \in A$، $\pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \kappa_A(a)$. حال طبق قضیه [۳، لم ۱.۷] نگاشت

$$\Psi: A^{**} \widehat{\otimes} A^{**} \to (A \widehat{\otimes} A)^{**}$$

موجود است به‌طوری‌که برای هر $a, b \in A$ و $n \in A^{**} \widehat{\otimes} A^{**}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) $\Psi(\kappa_A(a) \otimes \kappa_A(b)) = \kappa_{A \widehat{\otimes} A}(a \otimes b)$
ب) $\Psi(n) \cdot a = \Psi(n \cdot a)$
پ) $a \cdot \Psi(n) = \Psi(a \cdot n)$
ت) $\pi_A^{**}(\Psi(n)) = \pi_{A^{**}}(n)$.

تعریف می‌کنیم $\eta = \Psi \circ \rho: A \to (A \widehat{\otimes} A)^{**}$. در این صورت η یک همریختی A-دومدولی پیوسته است که

$$\pi_A^{**} \circ \eta(a) = \pi_A^{**} \circ \Psi \rho(a) = \pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \kappa_A(a).$$

قرار می‌دهیم $\theta + \eta^*|_{(A\widehat{\otimes}A)^*}$. نگاشت θ یک همریختی A -دومدولی پیوسته است و برای هر $f \in A^*$ داریم

$$\begin{aligned}\langle \theta(\pi_A^*(f)), a\rangle &= \langle \eta^*|_{(A\widehat{\otimes}A)^*}(\pi_A^*(f)), a\rangle \\ &= \langle \eta(a), \pi_A^*(f)\rangle \\ &= \langle \pi_A^{**}\circ\eta(a), f\rangle \\ &= \langle f, a\rangle.\end{aligned}$$

در نتیجه $\theta \circ \pi_A^* = id_{A^*}$. حال به برهان خلف فرض کنیم $A^۲$ در A چگال نباشد. از قضیه هان-باناخ می‌توان نتیجه گرفت که تابعک خطی ناصفر $f \in A^*$ وجود دارد به‌طوری‌که $f|_{A^۲} = ۰$. عنصر $a_۰ \in A^{**}$ را چنان در نظر می‌گیریم که $f(a_۰) = ۱$. نگاشت $\widetilde{f} : A\widehat{\otimes}A \to \mathbb{C}$ را با ضابطهٔ

$$\widetilde{f}(a\otimes b) = f(a)f(b)$$

در نظر بگیرید. $\widetilde{f}$ یک تابعک خطی کران‌دار بر $A\widehat{\otimes}A$ است. اگر قرار دهیم $g = \theta(\widetilde{f})$، آنگاه چون $f|_{A^۲} = ۰$ پس برای هر $a \in A$، $a\cdot\widetilde{f} = ۰$. لذا $a\cdot g = ۰$ و لذا $g|_{A^۲} = ۰$. از طرفی می‌دانیم $\widetilde{f}\cdot a_۰ = \pi^*(f)$ و در نتیجه $g\cdot a_۰ = f$. بنابراین

$$۰ = g(a_۰^۲) = g\cdot a_۰(a_۰) = f(a_۰) = ۱$$

و به تناقض می‌رسیم. □

مثال ۷.۲. فرض کنیم $A = \left\{\begin{bmatrix} ۰ & \alpha & \beta \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix} : \alpha, \beta, \in \mathbb{C}\right\}$. در این صورت A با جمع و ضرب اسکالر و ضرب معمولی ماتریسی و نرم زیر یک جبر باناخ است

$$\left\|\begin{bmatrix} ۰ & \alpha & \beta \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\right\| = |\alpha| + |\beta|.$$

ازآنجاکه $A \neq \{۰\} = A^۲$ نتیجه می‌شود که جبر A، A^{**}- دوتصویر نیست.

فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. $\Delta(A)$ را مجموعهٔ تمام تابعک‌های خطی ضربی ناصفر روی A در نظر می‌گیریم. به‌عنوان یک نکته متذکر می‌شویم که اگر A یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(A)$، آنگاه توسیع یکتایی از φ به A^{**} موجود است که آن را با $\widetilde{\varphi}$ نمایش می‌دهیم. در واقع برای هر $F \in A^{**}$ قرار می‌دهیم

$$\widetilde{\varphi}(F) = F(\varphi).$$

لائو در سال ۱۹۸۸ کلاس F -جبرها را معرفی کرد [۱۲]. در واقع یک F -جبر یک جبر باناخ است که پیش دوگان یک W^* -جبر M باشد به‌طوری‌که عنصر همانی M یک تابعک خطی ضربی روی A باشد. برای اولین بار لائو میانگین‌پذیری چپ F -جبرها را تعریف و به مطالعهٔ خواص آن پرداخت. نصراصفهانی در سال ۲۰۰۱ [۱۴] مفهوم میانگین‌پذیری داخلی را برای F -جبرها تعریف کرد و نتایج بسیاری در مورد جبرهای مختلف به دست آورد. یکی از این نتایج این بود که جبر گروهی $L^۱(G)$ همواره میانگین‌پذیر داخلی است. جباری در سال ۲۰۱۱ در [۷] مفهوم φ -میانگین‌پذیر داخلی را برای جبرهای باناخ معرفی کرد.

تعریف ۸.۲. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(A)$. جبر A را φ -میانگین‌پذیر داخلی گوییم هرگاه تور کران‌دار (a_α) در A موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$

$$aa_\alpha - a_\alpha a \to ۰, \qquad \varphi(a_\alpha) \to ۱.$$

تعریف ۹.۲. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(A)$. گوییم A، φ -میانگین‌پذیر چپ است هرگاه تور (m_α) در A موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$

$$am_\alpha - \varphi(a)m_\alpha \to ۰, \qquad \varphi(m_\alpha) \to ۱.$$

قضیه ۲.۱۰. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(A)$. اگر A، φ- میانگین‌پذیر داخلی و A^{**} -دوتصویر باشد، آنگاه A، φ- میانگین‌پذیر چپ است.

اثبات. طبق فرض چون A، φ -میانگین‌پذیر داخلی است پس تور کران‌دار (a_α) در A وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$

$$aa_\alpha - a_\alpha a \to ۰, \qquad \varphi(a_\alpha) \to ۱.$$

از طرفی چون A یک جبر A^{**} -دوتصویر است پس همریختی پیوسته A -دومدولی $\rho : A \to A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ موجود است به‌طوری‌که به‌ازای هر $a \in A$

$$\pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \kappa_A(a).$$

قرار می‌دهیم $\theta_\alpha = \rho(a_\alpha)$. در این صورت (θ_α) یک تور کران‌دار در $A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ است که برای هر $a \in A$

$$a \cdot \theta_\alpha - \theta_\alpha \cdot a \to ۰, \qquad \widetilde{\varphi} \circ \pi_{A^{**}}(\theta_\alpha) \to ۱.$$

حال نگاشت $T : A^{**}\widehat{\otimes}A^{**} \to A^{**}$ را با ضابطهٔ زیر در نظر می‌گیریم:

$$T(a \otimes b) = \widetilde{\varphi}(b)a, \qquad (a, b \in A^{**}).$$

واضح است که T یک عملگر خطی کران‌دار است که برای هر $a \in A^{**}$ و $x \in A^{**}\widehat{\otimes}A^{**}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) $T(a \cdot a) = aT(x)$

ب) $T(x \cdot a) = \widetilde{\varphi}(a)T(x)$

پ) $\widetilde{\varphi} \circ T(x) = \widetilde{\varphi} \circ \pi_{A^{**}}(x)$.

قرار می‌دهیم $n_\alpha = T(\theta_\alpha)$. در این صورت (n_α) یک تور کران‌دار در A^{**} است که

$$\begin{aligned} an_\alpha - \widetilde{\varphi}(a)n_\alpha &= aT(\theta_\alpha) - \widetilde{\varphi}(a)T(\theta_\alpha) \\ &= T(a \cdot \theta_\alpha) - T(\theta_\alpha \cdot a) \\ &= T(a \cdot \theta_\alpha - \theta_\alpha \cdot a) \to ۰, \end{aligned}$$

و همچنین

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(n_\alpha) &= \widetilde{\varphi} \circ T(\theta_\alpha) = \widetilde{\varphi} \circ \pi_{A^{**}}(\theta_\alpha) \\ &= \widetilde{\varphi} \circ \pi_{A^{**}} \circ \rho(a_\alpha) = \widetilde{\varphi}(a_\alpha) \\ &= \varphi(a_\alpha) \to ۱. \end{aligned}$$

حال فرض کنید $\varepsilon > ۰$ و $F = \{a_۱, a_۲, \cdots, a_r\}$ زیرمجموعه‌ای متناهی از A باشد. تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(a_۱ n - \varphi(a_۱)n, a_۲ n - \varphi(a_۲)n, \cdots, a_r n - \varphi(a_r)n, \widetilde{\varphi}(n) - ۱) : \ n \in A, \|n\| \le K\} \\ &\subseteq (\prod_{i=۱}^{r} A^{**}) \bigoplus_{۱} \mathbb{C} \end{aligned}$$

که در اینجا $K = \sup_\alpha \|\rho(a_\alpha)\|$. در این صورت Γ یک مجموعهٔ محدب و ناتهی است و بنابراین طبق لم مازور $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}^{wk}$. ازآنجاکه A در A^{**} ضعیف ستاره چگال است به‌راحتی می‌توان دید که

$$(۰, ۰, \cdots, ۰) \in \overline{\Gamma}^{wk} = \overline{\Gamma}.$$

لذا تور کران‌دار $(n_{(F,\varepsilon)})$ در A وجود دارد که

$$\|an_{(F,\varepsilon)} - \varphi(a)n_{(F,\varepsilon)}\| < \varepsilon, \qquad |\widetilde{\varphi}(n_{(F,\varepsilon)}) - ۱| < \varepsilon.$$

با در نظر گرفتن $I=\{(F,\varepsilon): F\subseteq_f A, \varepsilon>0\}$ (که $\subseteq_f$ نماد زیرمجموعهٔ متناهی است) و مجهز کردن I با رابطهٔ ترتیب جزئی زیر

$$(F,\varepsilon)\le(F',\varepsilon') \iff F\subseteq F', \varepsilon\ge\varepsilon'$$

نتیجه می‌گیریم که $(n_{F,\varepsilon})_{(F,\varepsilon)\in I}$ یک تور کران‌دار در A است که

$$an_{(F,\varepsilon)}-\varphi(a)n_{(F,\varepsilon)}\to 0, \qquad \varphi(n_{(F,\varepsilon)})\to 1,$$

و این نتیجه می‌دهد که A، φ -میانگین‌پذیر چپ است. □

مثال ۱۱.۲. فرض کنید $C^1([0,1])$ مجموعهٔ تمام توابع مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته بر $[0,1]$ باشد. در این صورت $C^1([0,1])$ با نرم زیر و ضرب نقطه‌ای توابع تشکیل یک جبر باناخ جابه‌جایی می‌دهد

$$\|f\|=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty.$$

همان‌طور که می‌دانیم

$$\Delta(C^1([0,1]))=\{\phi_t: t\in[0,1]\}$$

که در آن $\phi_t(f)=f(t)$. ازآنجاکه $C^1([0,1])$ یکدار است؛ بنابراین برای هر $t\in[0,1]$، ϕ_t -میانگین‌پذیر داخلی است. چون طبق [۱۰، مثال ۲.۵] $C^1([0,1])$، ϕ_t -میانگین‌پذیر چپ نیست؛ بنابراین طبق قضیه ۱۰.۲ $C^1([0,1])^{**}$ -دوتصویر نیست.

قضیه ۱۲.۲. فرض کنیم G یک گروه فشرده باشد. در این صورت $M(G)\widehat{\otimes}L^1(G)$ یک جبر $(M(G)\widehat{\otimes}L^1(G))^{**}$ -دوتصویر است اگر و فقط اگر G متناهی باشد.

اثبات. چون $M(G)$ یک جبر یکدار و $L^1(G)$ دارای یکهٔ تقریبی کران‌دار است بنابراین $M(G)\widehat{\otimes}L^1(G)$ دارای یکهٔ تقریبی کران‌دار است. از قضیه ۴.۲ نتیجه می‌گیریم که $M(G)\widehat{\otimes}L^1(G)$ میانگین‌پذیر است. در نتیجه برای هر $\varphi\in\Delta(L^1(G))$ و هر $\psi\in\Delta(M(G))$ جبر $M(G)\widehat{\otimes}L^1(G)$، $\psi\otimes\varphi$ -میانگین‌پذیر چپ است. حال طبق [۱۰، قضیه ۳.۳] برای هر $\psi\in M(G)$ جبر $M(G)$، ψ -میانگین‌پذیر چپ است و چون $M(G)$ یکدار است در نتیجه مشخصه میانگین‌پذیر است؛ لذا طبق [۱۳، نتیجه ۲.۵] G گسسته است. پس G متناهی است. برای اثبات عکس قضیه، اگر G متناهی باشد، آنگاه $M(G)\widehat{\otimes}L^1(G)\cong\ell^1(G\times G)$ دوتصویری است و در نتیجه $(M(G)\widehat{\otimes}L^1(G))^{**}$ -دوتصویر است. □

فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک فشرده باشد و $\alpha>0$. قرار می‌دهیم

$$Lip_\alpha(X)=\{f:X\to\mathbb{C}: p_\alpha(f)<\infty\},$$

که در آن

$$p_\alpha(f)=\sup\{\left|\frac{f(x)-f(y)}{d(x,y)^\alpha}\right| : x,y\in X, x\neq y\}.$$

در این صورت $Lip_\alpha(X)$ با ضرب نقطه‌ای توابع و نرم زیر تشکیل یک جبر باناخ جابه‌جایی می‌دهد و آن را جبر لیپشیتزی از مرتبه α می‌نامیم

$$\|f\|=\|f\|_\infty+p_\alpha(f),$$

که $\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|: x\in X\}$. این خانواده از جبرهای باناخ برای اولین بار توسط شربرت در [۱۵] مورد توجه قرار گرفت. میانگین‌پذیری جبرهای لیپشیتزی توسط گوردئو در [۴] بررسی شده است. کانیوث، لائو و پیم در [۱۱] ثابت کردند که $Lip_\alpha(X)$ یک جبر ϕ_x -میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر x یک نقطهٔ تنهای X باشد. دشتی و همکاران نیز در [۱] مشخصه میانگین‌پذیری جبرهای لیپشیتزی را مطالعه کردند.

قضیه ۱۳.۲. فرض کنیم X یک فضای متریک فشرده باشد و $0<\alpha<1$. $Lip_\alpha(X)$ یک جبر $Lip_\alpha(X)^{**}$ -دوتصویر است اگر و فقط اگر X متناهی باشد.

اثبات. فرض کنیم $Lip_\alpha(X)$، $Lip_\alpha(X)^{**}$ -دوتصویر باشد. چون $Lip_\alpha(X)$ یک جبر یکدار است؛ بنابراین طبق قضیه ۲.۲ میانگین‌پذیر است و در نتیجه مشخصه میانگین‌پذیر است. حال طبق نکتهٔ پس از [۶، قضیه ۳۸] می‌توان نتیجه گرفت که X متناهی است. عکس قضیه به‌وضوح برقرار است. □

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. در این صورت مجموعهٔ

$$\mathcal{T}=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ \circ & c \end{bmatrix} :\ a,b,c\in A\right\}$$

همراه با جمع و ضرب ماتریسی و نرم زیر تشکیل یک جبر باناخ می‌دهد که آن را جبر باناخ مثلثی می‌نامیم

$$\left\|\begin{bmatrix} a & b \\ \circ & c \end{bmatrix}\right\| = \|a\|+\|b\|+\|c\|.$$

فارست و مارکو در [۲] میانگین‌پذیری ضعیف و منظم آرنز بودن این جبرها را بررسی کردند. در قضیهٔ زیر $\mathcal{T}^{**}$ -دوتصویری این جبرها را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱۴.۲. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\varphi\in\Delta(A)$. اگر A، φ -میانگین‌پذیر داخلی باشد، آنگاه جبر مثلثی $\mathcal{T}$، $\mathcal{T}^{**}$ -دوتصویر نیست.

اثبات. به برهان خلف فرض کنیم $\mathcal{T}$ یک جبر $\mathcal{T}^{**}$ -دوتصویر باشد. چون A، φ -میانگین‌پذیر داخلی است پس تور کران‌دار (a_α) در A وجود دارد به‌طوری‌که برای $a\in A$

$$aa_\alpha-a_\alpha a\rightarrow \circ \qquad\qquad \varphi(a_\alpha)\rightarrow ۱.$$

قرار می‌دهیم $t_\alpha=\begin{bmatrix} a_\alpha & \circ \\ \circ & a_\alpha \end{bmatrix}$. در این صورت (t_α) یک تور کران‌دار در $\mathcal{T}$ است که

$$tt_\alpha-t_\alpha t\rightarrow \circ \qquad\qquad \psi(t_\alpha)\rightarrow ۱,$$

که در اینجا $\psi\in\Delta(\mathcal{T})$ با ضابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\psi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ \circ & c \end{bmatrix}\right)=\varphi(c).$$

پس $\mathcal{T}$ یک جبر ψ -میانگین‌پذیر داخلی است و از قضیه ۲.۲ نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{T}$ یک جبر ψ -میانگین‌پذیر چپ است. قرار می‌دهیم

$$I=\left\{\begin{bmatrix} \circ & b \\ \circ & c \end{bmatrix} :\ b,c\in A\right\}.$$

به‌وضوح I یک ایده‌آل بسته در $\mathcal{T}$ است که $\psi|_I\neq\circ$. حال چون $\mathcal{T}$، ψ -میانگین‌پذیر چپ است؛ لذا طبق [۱۰، لم ۳.۱] I نیز $\psi|_I$ -میانگین‌پذیر چپ است. یعنی تور کران‌دار $i_\alpha=\begin{bmatrix} \circ & b_\alpha \\ \circ & c_\alpha \end{bmatrix}$ در I وجود دارد به‌طوری‌که

$$ii_\alpha-\psi(i)i_\alpha\rightarrow\circ, \qquad\qquad \psi(i_\alpha)\rightarrow ۱.$$

عنصر دلخواه $i=\begin{bmatrix} \circ & b \\ \circ & c \end{bmatrix}$ را در I در نظر می‌گیریم. با قرار دادن آن در معادلهٔ فوق خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \circ & b \\ \circ & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \circ & b_\alpha \\ \circ & c_\alpha \end{bmatrix}-\psi\left(\begin{bmatrix} \circ & b \\ \circ & c \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \circ & b_\alpha \\ \circ & c_\alpha \end{bmatrix}\rightarrow\circ$$

و همچنین
$$\psi\left(\begin{bmatrix} a & b_\alpha \\ \circ & c_\alpha \end{bmatrix}\right) = \varphi(c_\alpha) \to ۱.$$
از معادلهٔ فوق نتیجه می‌شود که برای b, c_α در A، $bc_\alpha - \varphi(c)b_\alpha \to \circ$. حال فرض کنید $b_\circ \in A$ به‌طوری‌که $\varphi(b_\circ) = ۱$ و $c_\circ \in \ker\varphi$. در نتیجه $b_\circ c_\alpha - \varphi(c_\circ)b_\alpha \to \circ$. با اعمال φ بر طرفین معادلهٔ فوق خواهیم داشت
$$\varphi(b_\circ)\varphi(c_\alpha) - \varphi(c_\circ)\varphi(b_\alpha) = \varphi(c_\alpha) \to \circ,$$
و به تناقض می‌رسیم؛ بنابراین جبر $\mathcal{T}$، $\mathcal{T}^{**}$-دوتصویر نیست.

□

References

[1] Dashti, M., Nasr Isfahani, R., & Soltani Renani, S. (2014). Character amenability of Lipschitz algebras. *Canad. Math. Bull*, 57(1), 37–41. DOI: https://doi.org/10.4153/CMB-2012-015-3.

[2] Forrest, B.E., & Marcoux, L.W. (2002). Weak amenability of triangular Banach algebras. *Trans. Amer. Soc*, 354(4), 1435–1452. DOI: https://doi.org/10.1090/s0002-9947-01-02957-9.

[3] Ghahramani, F., Loy, R.J., & Willis, G.A. (1996). Amenability and weak amenability of second conjugate Banach algebras. *Proc. Amer. Math. Soc*, 124, 1489–1497. DOI: https://doi.org/10.1090/s0002-9939-96-03177-2.

[4] Gourdeau, F. (1992). Amenability of Lipschitz algebras. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc*, 112, 581–588. DOI: https://doi.org/10.1017/s0305004100071267.

[5] Helemskii, A.Ya. (1989). The Homology of Banach and Topological Algebras. *Kluwer Academic Publishers, Holland*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-009-2354-6.

[6] Hu, Z., Monfared, M.S., & Traynor, T. (2009). On character amenable Banach algebras. *Studia Math*, 193, 53–78. DOI: https://doi.org/10.4064/sm193-1-3.

[7] Jabbari, A., Mehdi Abad, T., & Zaman Abadi, M. (2011). On ϕ-inner amenable Banach algebras. *Colloq. Math*, 122, 1–10. DOI: https://doi.org/10.4064/cm122-1-1.

[8] Johnson, B.E. (1972). Cohomology in Banach algebras. *Mem. Amer. Math. Soc*, 127.

[9] Johnson, B.E. (1972). Approximate diagonals and cohomology of certain annihilator Banach algebras. *Amer. J. Math*, 94, 685–698. DOI: https://doi.org/10.2307/2373751.

[10] Kaniuth, E., Lau, A.T., & Pym, J. (2008). On ϕ-amenability of Banach algebras. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc*, 144, 85–96. DOI: https://doi.org/10.1017/S0305004107000874.

[11] Kaniuth, E., Lau, A.T., & Pym, J. (2008). On character amenability of Banach algebras. *J. Math. Anal. Appl*, 344, 942–955. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.03.037.

[12] Lau, A.T. (1983). Analysis on a class of Banach algebras with applications to harmonic analysis on locally compact groups and semigroups. *Fund. Math*, 118, 161–175. DOI: https://doi.org/10.4064/FM-118-3-161-175.

[13] Monfared, M.S. (2008). Character amenability of Banach algebras. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc*, 144, 697–706. DOI: https://doi.org/10.1017/S0305004108001126.

[14] Nasr-Isfahani, R. (2001). Inner amenability of Lau algebras. *Arch. Math*, (Brno) 37, 45–55.

[15] Sherbert, D.R. (1963). Banach algebras of Lipschitz functions. *Pacifc J. Math*, 13(4), 1387–1399. DOI: https://doi.org/10.2140/pjm.1963.13.1387.