Measure Algebras and Applications

Some results on resolutions of the identity in Hilbert spaces

Zohreh Aghamir Mohammad Ali[1]

1. Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran. Email: z.aghamir@yahoo.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 12 August 2023
Received in revised form:
21 September 2023
Accepted: 26 September 2023
Published Online:
30 September 2023

Keywords:
Hilbert spaces,
Resolutions of the identity,
Atomic systems,
Frame-like systems

2020 Mathematics Subject Classification:
42C15

ABSTRACT

In this paper, some new results on resolutions of the identity, atomic systems and frame-like systems for subspaces of a Hilbert space are obtained. In particular, their sums and their stability under the action of invertible operators are considered.

Cite this article: Aghamir Mohammad Ali, Z. (2023). Some results on resolutions of the identity in Hilbert spaces. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 119–127.
http://doi.org/ 10.22091/MAA.2023.9766.1010

Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/MAA.2023.9766.1010

Extended Abstract

Introduction

A discrete frame is a subset of a Hilbert space indexed by a finite or countable index set satisfying two inequalities for every element of the Hilbert space. In 1952, Duffin and Schaeffer introduced discrete frames when they were studying some problems in nonharmonic Fourier series ([6]). The continuous version of discrete frames was proposed by Kaiser in [10] and independently by Ali, Antoine and Gazeau in [1].

***Definition* 0.1.** *Let (Ω, μ) be a measure space and let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space. A weakly-measurable mapping $F : \Omega \to \mathcal{H}$ is called a continuous frame for $\mathcal{H}$ with respect to (Ω, μ) if there exist constants $0 < A_F \leq B_F < \infty$ such that for each $f \in \mathcal{H}$, we have*

$$A_F\|f\|^2 \leq \int_\Omega |\langle f, F(\omega)\rangle|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) \leq B_F\|f\|^2.$$

The positive numbers A_F and B_F are called the lower and upper bounds of the frame, respectively. The mapping F is called tight if $A_F = B_F$ and if $A_F = B_F = 1$, it is called a Parseval frame. If only the second inequality is required, we say that F is a continuous Bessel mapping.

As we see, continuous frames are defined using a measure space, i.e., the indices are related to some measurable space, so every discrete frame can be considered as a continuous frame using the counting measure on the index set. Although there are many similarities between continuous and discrete frames, continuous frames can behave completely different from the discrete ones (for example, continuous frames are not necessarily norm bounded). Both discrete and continuous frames have great applications in pure and applied mathematics, particularly they are useful in signal processing. Indeed, each frame possesses at least one dual and the existence of duals facilitates the reconstruction of signals. For more information about continuous frames and their duals, we refer the readers to [8, 13] and the references therein.

Let $F : \Omega \to \mathcal{H}$ be a Bessel mapping. Then, a Bessel mapping $G : \Omega \to \mathcal{H}$ is called a *dual* for F if

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega \langle f, F(x)\rangle\langle G(x), g\rangle \mathrm{d}\mu(x), \tag{0.1}$$

for each $f, g \in \mathcal{H}$. The equality (0.1) can be written weakly as

$$f = \int_\Omega \langle f, F(x)\rangle G(x) \mathrm{d}\mu(x), \quad (f \in \mathcal{H}).$$

Now, we define the function $\tau : \Omega \to B(\mathcal{H})$ by $\tau(x)(f) = \langle f, F(x)\rangle G(x)$. Hence, for each $f \in \mathcal{H}$, we have

$$f = \int_\Omega \tau(x)(f) \mathrm{d}\mu(x).$$

Indeed, using the function τ, every f in the underlying Hilbert space can be reconstructed. The operators like τ are so valuable in frame theory. In fact, the crucial role of these operators caused the appearance of some important concepts such as resolutions of the identity, local atoms and atomic systems of subspaces, see [2], [3], [4], [5], [7], [9], [11] and the references therein.

Conclusion

In [12], using some real numbers as parameters, some new versions of resolutions of the identity, atomic systems and frame-like systems for subspaces of a Hilbert space were introduced. The new versions cover many of the notions related to atomic systems and resolutions of the identity, also, the existence of the parameters provides more flexible tools for the reconstruction of signals. Also, it was shown in [12] that there are close relationships between the new notions and some generalizations of frames and fusion frames.

In the present paper, these concepts are focused and some new results are obtained.

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۱۲۷-۱۱۹

برخی نتایج در مورد تجزیه‌های همانی در فضاهای هیلبرت

زهره آقامیر محمدعلی [۱]

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: z.aghamir@yahoo.com

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۵/۲۱
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۶/۳۰
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۷/۴
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
فضاهای هیلبرت،
تجزیه‌های همانی،
دستگاه‌های اتمی،
دستگاه‌های شبه‌قاب

رده‌بندی ریاضی:
42C15

در این مقاله، نتایج جدیدی در مورد تجزیه‌های همانی، دستگاه‌های اتمی و دستگاه‌های شبه‌قاب برای زیرفضاهای بسته از یک فضای هیلبرت به دست می‌آیند. به‌ویژه، مجموع آنها و پایایی آنها تحت عملگرهای وارون‌پذیر مورد بررسی قرار می‌گیرند.

استناد: آقامیر محمدعلی، زهره. (۱۴۰۲). برخی نتایج در مورد تجزیه‌های همانی در فضاهای هیلبرت. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۱۲۷-۱۱۹.

http://doi.org/ 10.22091/MAA.2023.9766.1010

ناشر: دانشگاه قم.

۱ معرفی و تاریخچه

یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های یک پایهٔ متعامدیکه در فضای هیلبرت[۱] $\mathcal{H}$ آن است که هر عضو از فضا را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی متناهی یا نامتناهی از عناصر پایه نوشت که ضرایب آن یکتا هستند. همچنین یک قاب نیز دنباله‌ای از عناصر فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است که این امکان را به ما می‌دهد هر عضو از فضا را به‌صورت ترکیب خطی متناهی یا نامتناهی از عناصر قاب نوشت، اما ضرایب آن لزوماً یکتا نیستند. به‌طور کلی قاب‌ها تعمیمی از پایه‌های متعامدیکه هستند که لزوماً خاصیت مستقل خطی بودن را ندارند. در نتیجه قاب‌ها دارای خاصیت تکرار بردارها هستند؛ یعنی نمایش‌های متفاوت یک عضو از فضای هیلبرت با استفاده از قاب‌ها امکان‌پذیر است. این خاصیت مطلوب در بسیاری از کاربردهای قاب ظاهر می‌شود. این ویژگی قاب‌ها باعث می‌شود در یک دستگاه پردازش سیگنال، قاب‌ها از مقاومت بیشتری در برابر خطاهای ارسالی نسبت به پایه‌ها برخوردار باشند و برخلاف تجزیهٔ منحصربه‌فرد برحسب پایه‌های متعامدیکه باعث ایجاد مشکل و محدودیت نمی‌شوند. عملکرد مطلوب قاب‌ها نسبت به پایه باعث تعریف آن توسط دانشمندان شد.

مفهوم قاب‌ها در فضاهای هیلبرت برای اولین بار در سال ۱۹۵۲، توسط دافین[۲] و شیفر[۳] معرفی شد و در سال ۱۹۸۶ توسط دوبچیز[۴]، گراسمان[۵] و میر[۶] مورد بازنگری قرار گرفت. کاربرد دیگر قاب‌ها در نظریهٔ کدگذاری و ارتباطات است. معمولاً به‌خاطر پردازش اطلاعات، دستگاه قاب‌ها را به دستگاه‌های کوچک‌تر تقسیم می‌کنند که در سال‌های اخیر این مطلب باعث ایجاد تعمیم دیگری از قاب‌ها به نام قاب زیرفضاها یا قاب مخلوط شد که به‌جای کار کردن با قاب‌ها با استفاده از زیرفضاهای یک فضای هیلبرت تعریف می‌شود و سپس با پیوند این قاب‌های زیرفضا، یک قاب برای کل فضا به دست می‌آید. مزیت این روش، سادگی محاسبات و بررسی قاب بودن روی زیرفضاهای کوچک‌تری از فضای کل است که کارایی و دقت را بیشتر می‌کند. در حقیقت قاب‌های مخلوط تعمیمی از قاب‌ها هستند که از زیرفضاهای بستهٔ یک فضای هیلبرت برای تجزیهٔ سیگنال‌ها استفاده می‌نمایند.

قاب‌های مخلوط توسط کاسازا[۷] و کوتینیوک[۸] در سال ۲۰۰۴ معرفی شدند. قاب‌های مخلوط کاربردهای مهمی از جمله در کدگذاری و کدگشایی دارند. برای اطلاعت بیشتر در این زمینه به مرجع [۵] مراجعه کنید.

ازآنجایی‌که تجزیهٔ سیگنال‌ها کاربردهای مهمی دارد، تجزیهٔ همانی و ارتباط آن با قاب‌های مخلوط نخستین بار توسط کاسازا و کوتینیوک در سال ۲۰۰۴ در مرجع [۵] مطرح شد. در سال ۲۰۰۵ تجزیهٔ اتمی همانی گسسته توسط عسگری[۹] و خسروی[۱۰] در مرجع [۲] معرفی شد. در سال ۲۰۱۶ جوانشیری [۱۱] و فتاحی[۱۲] در مرجع [۹] مفاهیم تجزیهٔ همانی پیوسته و تجزیهٔ اتمی همانی پیوسته را معرفی کردند.

۲ نتایج اصلی

انواع جدیدی از تجزیه‌های همانی و دستگاه‌های شبه‌قاب در مقاله [۱۲] معرفی شدند. در تعریف زیر، این مفاهیم را یادآوری می‌کنیم. دقت شود که هرگاه صحبت از توابع $\mathcal{H}$ مقدار اندازه‌پذیر شد، منظور این است که به‌ازای هر f و g در $\mathcal{H}$ نگاشت

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \langle \tau(x) f, g \rangle \end{aligned}$$

و یا به‌ازای هر f در $\mathcal{H}$ نگاشت

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \|\tau(x) f\| \end{aligned}$$

اندازه‌پذیر است. q و r اعداد حقیقی دلخواه هستند و همواره $p \geq ۱$.

[1] Hilbert space
[2] Duffin
[3] Schaefer
[4] Daubechies
[5] Grossmann
[6] Meyer
[7] Casazza
[8] Kutyniok
[9] Asgari
[10] Khosravi
[11] Javanshiri
[12] Fattahi

$B(\mathcal{H})$ نشان‌دهندهٔ تمام توابع کران‌دار روی $\mathcal{H}$ است، (Ω, μ) یک فضای اندازه است که در آن μ یک اندازهٔ مثبت است. همچنین ω یک تابع اندازه‌پذیر از Ω به $(\circ, \infty)$ فرض می‌شود.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $\mathcal{H}_\circ$ یک زیرفضای بسته از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ و $\tau : \Omega \longrightarrow B(\mathcal{H})$ نگاشتی باشد به‌طوری‌که تابع $\mathcal{H}$ مقدار $T_f : \Omega \longrightarrow \mathcal{H}$ که به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ به‌صورت $T_f(x) = \tau(x)f$ تعریف می‌شود، اندازه‌پذیر باشد.

الف) نگاشت τ را یک r-تجزیهٔ همانی پیوسته برای $\mathcal{H}_\circ$ نسبت به (μ, ω) می‌نامیم اگر به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}_\circ$ و $g \in \mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega \omega(x)^r \ \langle \tau(x)f, g\rangle \ d\mu(x).$$

ب) نگاشت τ را یک (p, q)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به (μ, ω) می‌نامیم اگر عدد مثبتی مانند B_τ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$\left(\int_\Omega \omega(x)^q \ \|\tau(x)f\|^p \ d\mu(x)\right)^{1/p} \leq B\tau \|f\|.$$

پ) نگاشت τ را یک (p, q)-دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای $\mathcal{H}$ می‌نامیم اگر τ یک (p, q)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به (μ, ω) باشد و عدد مثبت A_τ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$A_\tau \|f\| \leq \left(\int_\Omega \omega(x)^q \|\tau(x)f\|^p \ d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

ت) نگاشت τ را یک (p, q, r)-دستگاه اتمی پیوسته برای $(\mathcal{H}_\circ, \mathcal{H})$ می‌نامیم اگر τ یک r-تجزیهٔ همانی پیوسته برای $\mathcal{H}_\circ$ و همچنین یک (p, q)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به (μ, ω) باشد. اگر $\mathcal{H}_\circ = \mathcal{H}$، τ را یک (p, q, r)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ می‌نامیم.

ث) نگاشت τ یک (p, q, r)-دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای $(\mathcal{H}_\circ, \mathcal{H})$ نامیده می‌شود اگر τ یک r-تجزیهٔ همانی پیوسته برای $\mathcal{H}_\circ$ و یک (p, q)-دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به (μ, ω) باشد. اگر $\mathcal{H}_\circ = \mathcal{H}$، τ را یک (p, q, r)-دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای $\mathcal{H}$ می‌نامیم.

قضیه ۲.۲. فرض کنیم $\mathcal{H}_\circ$ یک زیرفضای بسته از $\mathcal{H}$ و T یک عملگر وارون‌پذیر روی $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت،

الف) اگر τ یک r-تجزیهٔ همانی پیوسته برای $\mathcal{H}_\circ$ نسبت به (μ, ω) باشد، آن‌گاه $\tau_T : \Omega \longrightarrow B(\mathcal{H})$ که به‌صورت

$$\tau_T(x)(f) = T\left(\tau(x)T^{-1}f\right)$$

تعریف می‌شود یک r-تجزیهٔ همانی پیوسته برای $T(\mathcal{H}_\circ)$ نسبت به (μ, ω) است.

ب) اگر τ یک (p, q)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به (μ, ω) باشد، آن‌گاه τ_T نیز یک (p, q)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به (μ, ω) است.

پ) اگر τ یک (p, q)-دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه τ_T نیز یک (p, q)-دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای $\mathcal{H}$ است.

ت) اگر τ یک (p, q, r)-دستگاه اتمی پیوسته برای $(\mathcal{H}_\circ, \mathcal{H})$ باشد، آن‌گاه τ_T یک (p, q, r)-دستگاه اتمی پیوسته برای $(T(\mathcal{H}_\circ), \mathcal{H})$ است.

ث) اگر τ یک (p, q, r)-دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای $(\mathcal{H}_\circ, \mathcal{H})$ باشد، آن‌گاه τ_T یک (p, q, r)-دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای $(T(\mathcal{H}_\circ), \mathcal{H})$ است.

اثبات. ابتدا دقت می‌کنیم که چون $\mathcal{H}_\circ$ یک زیرفضای بستهٔ $\mathcal{H}$ و T یک عملگر وارون‌پذیر روی $\mathcal{H}$ است، پس $T(\mathcal{H}_\circ)$ یک زیرفضای بستهٔ $\mathcal{H}$ است.

اکنون فرض می‌کنیم f و g دو عضو از $\mathcal{H}$ باشند. طبق فرض نگاشت

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \left\langle \tau(x)\, T^{-1} f, T^{*} g \right\rangle \end{aligned}$$

اندازه‌پذیر است، لذا

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \left\langle T\left(\tau(x)\, T^{-1} f\right), g \right\rangle \end{aligned}$$

اندازه‌پذیر است، به طور معادل می‌توان گفت که

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \left\langle \tau_T(x)\, f, g \right\rangle \end{aligned}$$

اندازه‌پذیر است. اینک به اثبات موارد گفته شده می‌پردازیم.

الف) فرض کنیم τ یک r-تجزیهٔ همانی پیوسته برای $\mathcal{H}_\circ$ نسبت به (μ,ω) باشد. اگر $g \in \mathcal{H}$ و $T(f) \in T(\mathcal{H}_\circ)$، داریم:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \omega(x)^r \ \left\langle \tau_T(x) T f, g \right\rangle \ d\mu(x) &= \int_\Omega \omega(x)^r \ \left\langle T\tau(x)T^{-1} T f, g \right\rangle \ d\mu(x) \\ &= \int_\Omega \omega(x)^r \ \left\langle \tau(x) f, T^{*} g \right\rangle \ d\mu(x) \\ &= \left\langle f, T^{*} g \right\rangle = \left\langle T f, g \right\rangle . \end{aligned}$$

تساوی فوق نشان می‌دهد که τ_T یک r-تجزیهٔ همانی پیوسته برای $T(\mathcal{H}_\circ)$ نسبت به (μ,ω) است.

ب) فرض کنیم τ یک (p,q)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به (μ,ω) باشد. در این صورت به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم:

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega \omega(x)^q \left\|\tau_T(x) f\right\|^p \ d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_\Omega \omega(x)^q \left\|T(\tau(x)T^{-1} f\right\|^p \ d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|T\| \ \left(\int_\Omega \omega(x)^q \left\|\tau(x)T^{-1} f\right\|^p \ d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|T\| \ B_\tau \left\|T^{-1} f\right\| \leq \|T\| \ \left\|T^{-1}\right\| \ B_\tau \left\|f\right\| . \end{aligned}$$

نامساوی فوق ایجاب می‌کند که τ_T یک (p,q)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به (μ,ω) باشد.

پ) فرض کنیم τ یک (p,q)-دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای $\mathcal{H}$ باشد. بنابر قسمت (ب)، τ_T یک (p,q)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ است. اکنون به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\tau \left\|f\right\| = \mathcal{A}_\tau \left\|T T^{-1} f\right\| &\leq \|T\| \, \mathcal{A}_\tau \left\|T^{-1} f\right\| \\ &\leq \|T\| \left(\int_\Omega \omega(x)^q \left\|\tau(x)T^{-1} f\right\|^p \ d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|T\| \left(\int_\Omega \omega(x)^q \left\|T^{-1} T\tau(x)T^{-1} f\right\|^p \ d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \ \|T\| \left\|T^{-1}\right\| \ \left(\int_\Omega \omega(x)^q \left\|T\left(\tau(x)T^{-1} f\right)\right\|^p \ d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} . \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{\mathcal{A}_\tau}{\|T\| \, \|T^{-1}\|} \|f\| \leq \left(\int_\Omega \omega(x)^q \, \left\| T(\tau(x) T^{-1} f) \right\|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

و حکم ثابت می‌شود.

ت) از قسمت‌های (الف) و (ب) نتیجه می‌شود.

ث) از قسمت‌های (الف) و (پ) نتیجه می‌شود. □

قضیه ۳.۲. اگر τ_1 و τ_2 دو (p,q)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به (μ,ω) باشند، آن‌گاه $\tau_1+\tau_2$ که به‌صورت

$$(\tau_1+\tau_2)(x) = \tau_1(x) + \tau_2(x)$$

تعریف می‌شود، یک (p,q)-دستگاه اتمی پیوسته برای $\mathcal{H}$ است.

اثبات. به‌آسانی ثابت می‌شود که $\tau_1+\tau_2$ اندازه‌پذیر است. اکنون، برای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_\Omega \omega(x)^q \, \|(\tau_1+\tau_2)(x) f\|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega \left\| \left(\omega(x)^{\frac{q}{p}} \tau_1(x) f \right) + \left(\omega(x)^{\frac{q}{p}} \tau_2(x) f \right) \right\|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_\Omega \left\| \omega(x)^{\frac{q}{p}} \tau_1(x) f \right\|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega \left\| \omega(x)^{\frac{q}{p}} \tau_2(x) f \right\|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq B_{\tau_1} \|f\| + B_{\tau_2} \|f\| = (B_{\tau_1} + B_{\tau_2}) \|f\|
\end{aligned}$$

و حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۴.۲. فرض کنیم τ_1 و τ_2 دو r-تجزیهٔ همانی پیوسته برای $\mathcal{H}_0$ نسبت به (μ,ω) باشند. در این صورت τ که به‌صورت

$$\tau(x) = \frac{1}{2} \left(\tau_1(x) + \tau_2(x) \right)$$

تعریف می‌شود، یک r-تجزیهٔ همانی پیوسته برای $\mathcal{H}_0$ نسبت به (μ,ω) است.

اثبات. به‌آسانی ثابت می‌شود که τ اندازه‌پذیر است. اکنون، به‌ازای هر f در $\mathcal{H}_0$ و g در $\mathcal{H}$ داریم:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \omega(x)^r \, \langle \tau(x) f, g \rangle \, d\mu(x) &= \int_\Omega \omega(x)^r \, \left\langle \frac{1}{2} (\tau_1(x) + \tau_2(x)) f, g \right\rangle \, d\mu(x) \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega \omega(x)^r \, \langle \tau_1(x) f, g \rangle \, d\mu(x) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_\Omega \omega(x)^r \, \langle \tau_2(x) f, g \rangle \, d\mu(x) \\
&= \frac{1}{2} \langle f, g \rangle + \frac{1}{2} \langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle
\end{aligned}$$

و حکم ثابت می‌شود. □

References

[1] Ali, S.T., Antoine, J.P., & Gazeau, J.P. (1993). Continuous frames in Hilbert spaces. *Ann. Physics*, 222, 1–37.

[2] Asgari, M.S., & Khosravi, A. (2005). Frames and bases of subspaces in Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl*, 308, 541–553.

[3] Balazs, P. (2007). Basic definition and properties of Bessel multipliers. *J. Math. Anal. Appl*, 325, 571–585.

[4] Balazs, P., Bayer, D., & Rahimi, A. (2012). Multipliers for continuous frames in Hilbert spaces. *J. Phys. A*, 45, 244023–244043.

[5] Casazza, P., & Kutyniok, G. (2004). Frames of subspaces. *Contemp. Math. Amer. Math. Soc*, 345, 87–113.

[6] Duffin, R.J., & Schaeffer, A.C. (1952). A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc*, 72, 341–366.

[7] Feichtinger, H.G., & Werther, T. (2001). Atomic systems for subspaces. *In: Zayed, L. (ed.) Proceedings SampTA 2001, Orlando*, pp 163–165.

[8] Gabardo, J.P., & Han, D. (2003). Frame associated with measurable spaces. *Adv. Comp. Math*, 18, 127–147.

[9] Javanshiri, H., & Fattahi, A.M. (2016). Continuous atomic systems for subspaces. *Mediterr. J. Math*, 13, 1871–1884.

[10] Kaiser, G. (1994). A Friendly Guide to Wavelets. *Birkhauser, Boston*.

[11] Khosravi, A., & Asgari, M.S. (2007). Frames of subspaces and approximation of the inverse frame operator. *Houst. J. Math*, 33, 907–920.

[12] Mirzaee Azandaryani, M., & Aghamir Mohammad Ali, Z. (2023). Atomic and Frame-Like Systems for Subspaces of a Hilbert Space. *Mediterr. J. Math*, 20, 185-1–185-17.

[13] Mirzaee Azandaryani, M., & Javadi, Z. (2022). Pseudo-duals of continuous frames in Hilbert spaces. *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl*, 13, 1–16.