



## Some results on resolutions of the identity in Hilbert spaces

Zohreh Aghamir Mohammad Ali<sup>1</sup> 

1. Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran. Email: [z.aghamir@yahoo.com](mailto:z.aghamir@yahoo.com)

---

---

### Article Info

### ABSTRACT

---

---

#### Article type:

Research Article

#### Article history:

Received: 12 August 2023

Received in revised form:

21 September 2023

Accepted: 26 September 2023

Published Online:

30 September 2023

#### Keywords:

Hilbert spaces,

Resolutions of the identity,

Atomic systems,

Frame-like systems

In this paper, some new results on resolutions of the identity, atomic systems and frame-like systems for subspaces of a Hilbert space are obtained. In particular, their sums and their stability under the action of invertible operators are considered.

#### 2020 Mathematics Subject

#### Classification:

42C15

---

---

**Cite this article:** Aghamir Mohammad Ali, Z. (2023). Some results on resolutions of the identity in Hilbert spaces. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 119–127.  
<http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9766.1010>



©The Author(s).

DOI: 10.22091/MAA.2023.9766.1010

**Publisher:** University of Qom

# Extended Abstract

## Introduction

A discrete frame is a subset of a Hilbert space indexed by a finite or countable index set satisfying two inequalities for every element of the Hilbert space. In 1952, Duffin and Schaeffer introduced discrete frames when they were studying some problems in nonharmonic Fourier series ([6]). The continuous version of discrete frames was proposed by Kaiser in [10] and independently by Ali, Antoine and Gazeau in [1].

**Definition 0.1.** Let  $(\Omega, \mu)$  be a measure space and let  $\mathcal{H}$  be a Hilbert space. A weakly-measurable mapping  $F : \Omega \rightarrow \mathcal{H}$  is called a continuous frame for  $\mathcal{H}$  with respect to  $(\Omega, \mu)$  if there exist constants  $0 < A_F \leq B_F < \infty$  such that for each  $f \in \mathcal{H}$ , we have

$$A_F \|f\|^2 \leq \int_{\Omega} |\langle f, F(\omega) \rangle|^2 d\mu(\omega) \leq B_F \|f\|^2.$$

The positive numbers  $A_F$  and  $B_F$  are called the lower and upper bounds of the frame, respectively. The mapping  $F$  is called tight if  $A_F = B_F$  and if  $A_F = B_F = 1$ , it is called a Parseval frame. If only the second inequality is required, we say that  $F$  is a continuous Bessel mapping.

As we see, continuous frames are defined using a measure space, i.e., the indices are related to some measurable space, so every discrete frame can be considered as a continuous frame using the counting measure on the index set. Although there are many similarities between continuous and discrete frames, continuous frames can behave completely different from the discrete ones (for example, continuous frames are not necessarily norm bounded). Both discrete and continuous frames have great applications in pure and applied mathematics, particularly they are useful in signal processing. Indeed, each frame possesses at least one dual and the existence of duals facilitates the reconstruction of signals. For more information about continuous frames and their duals, we refer the readers to [8, 13] and the references therein.

Let  $F : \Omega \rightarrow \mathcal{H}$  be a Bessel mapping. Then, a Bessel mapping  $G : \Omega \rightarrow \mathcal{H}$  is called a *dual* for  $F$  if

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} \langle f, F(x) \rangle \langle G(x), g \rangle d\mu(x), \quad (0.1)$$

for each  $f, g \in \mathcal{H}$ . The equality (0.1) can be written weakly as

$$f = \int_{\Omega} \langle f, F(x) \rangle G(x) d\mu(x), \quad (f \in \mathcal{H}).$$

Now, we define the function  $\tau : \Omega \rightarrow B(\mathcal{H})$  by  $\tau(x)(f) = \langle f, F(x) \rangle G(x)$ . Hence, for each  $f \in \mathcal{H}$ , we have

$$f = \int_{\Omega} \tau(x)(f) d\mu(x).$$

Indeed, using the function  $\tau$ , every  $f$  in the underlying Hilbert space can be reconstructed. The operators like  $\tau$  are so valuable in frame theory. In fact, the crucial role of these operators caused the appearance of some important concepts such as resolutions of the identity, local atoms and atomic systems of subspaces, see [2], [3], [4], [5], [7], [9], [11] and the references therein.

## Conclusion

In [12], using some real numbers as parameters, some new versions of resolutions of the identity, atomic systems and frame-like systems for subspaces of a Hilbert space were introduced. The new versions cover many of the notions related to atomic systems and resolutions of the identity, also, the existence of the parameters provides more flexible tools for the reconstruction of signals. Also, it was shown in [12] that there are close relationships between the new notions and some generalizations of frames and fusion frames.

In the present paper, these concepts are focused and some new results are obtained.



## برخی نتایج در مورد تجزیه‌های همانی در فضاهای هیلبرت

زهره آقامیر محمدعلی<sup>۱</sup>

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: [z.ghamir@yahoo.com](mailto:z.ghamir@yahoo.com)

اطلاعات مقاله	چکیده
<p>نوع مقاله: مقاله پژوهشی</p> <p>تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۵/۲۱ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۶/۳۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۷/۴ تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸</p> <p>کلمات کلیدی: فضاهای هیلبرت، تجزیه‌های همانی، دستگاه‌های اتمی، دستگاه‌های شبه‌قاب</p> <p>رده‌بندی ریاضی: 42C15</p>	<p>در این مقاله، نتایج جدیدی در مورد تجزیه‌های همانی، دستگاه‌های اتمی و دستگاه‌های شبه‌قاب برای زیرفضاهای بسته از یک فضای هیلبرت به دست می‌آیند. به‌ویژه، مجموع آنها و پایایی آنها تحت عملگرهای وارون‌پذیر مورد بررسی قرار می‌گیرند.</p>

استناد: آقامیر محمدعلی، زهره. (۱۴۰۲). برخی نتایج در مورد تجزیه‌های همانی در فضاهای هیلبرت. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۱۱۹-۱۲۷.

<http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9766.1010>



ناشر: دانشگاه قم.  
© نویسندگان.

## ۱ معرفی و تاریخچه

یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های یک پایه متعامدیکه در فضای هیلبرت<sup>۱</sup>  $\mathcal{H}$  آن است که هر عضو از فضا را می‌توان به صورت ترکیب خطی متناهی یا نامتناهی از عناصر پایه نوشت که ضرایب آن یکتا هستند. همچنین یک قاب نیز دنباله‌ای از عناصر فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  است که این امکان را به ما می‌دهد هر عضو از فضا را به صورت ترکیب خطی متناهی یا نامتناهی از عناصر قاب نوشت، اما ضرایب آن لزوماً یکتا نیستند. به طور کلی قاب‌ها تعمیمی از پایه‌های متعامدیکه هستند که لزوماً خاصیت مستقل خطی بودن را ندارند. در نتیجه قاب‌ها دارای خاصیت تکرار بردارها هستند؛ یعنی نمایش‌های متفاوت یک عضو از فضای هیلبرت با استفاده از قاب‌ها امکان‌پذیر است. این خاصیت مطلوب در بسیاری از کاربردهای قاب ظاهر می‌شود. این ویژگی قاب‌ها باعث می‌شود در یک دستگاه پردازش سیگنال، قاب‌ها از مقاومت بیشتری در برابر خطاهای ارسالی نسبت به پایه‌ها برخوردار باشند و برخلاف تجزیه منحصربه‌فرد برحسب پایه‌های متعامدیکه باعث ایجاد مشکل و محدودیت نمی‌شوند. عملکرد مطلوب قاب‌ها نسبت به پایه باعث تعریف آن توسط دانشمندان شد.

مفهوم قاب‌ها در فضاهای هیلبرت برای اولین بار در سال ۱۹۵۲، توسط دافین<sup>۲</sup> و شیفر<sup>۳</sup> معرفی شد و در سال ۱۹۸۶ توسط دوبچیز<sup>۴</sup>، گراسمان<sup>۵</sup> و میر<sup>۶</sup> مورد بازنگری قرار گرفت. کاربرد دیگر قاب‌ها در نظریه کدگذاری و ارتباطات است. معمولاً به خاطر پردازش اطلاعات، دستگاه قاب‌ها را به دستگاه‌های کوچک‌تر تقسیم می‌کنند که در سال‌های اخیر این مطلب باعث ایجاد تعمیم دیگری از قاب‌ها به نام قاب زیرفضاها یا قاب مخلوط شد که به جای کار کردن با قاب‌ها با استفاده از زیرفضاهای یک فضای هیلبرت تعریف می‌شود و سپس با پیوند این قاب‌های زیرفضا، یک قاب برای کل فضا به دست می‌آید. مزیت این روش، سادگی محاسبات و بررسی قاب بودن روی زیرفضاهای کوچک‌تری از فضای کل است که کارایی و دقت را بیشتر می‌کند. در حقیقت قاب‌های مخلوط تعمیمی از قاب‌ها هستند که از زیرفضاهای بسته یک فضای هیلبرت برای تجزیه سیگنال‌ها استفاده می‌نمایند.

قاب‌های مخلوط توسط کاسازا<sup>۷</sup> و کوتینیوک<sup>۸</sup> در سال ۲۰۰۴ معرفی شدند. قاب‌های مخلوط کاربردهای مهمی از جمله در کدگذاری و کدگذاری دارند. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به مرجع [۵] مراجعه کنید.

از آنجایی که تجزیه سیگنال‌ها کاربردهای مهمی دارد، تجزیه همانی و ارتباط آن با قاب‌های مخلوط نخستین بار توسط کاسازا و کوتینیوک در سال ۲۰۰۴ در مرجع [۵] مطرح شد. در سال ۲۰۰۵ تجزیه اتمی همانی گسسته توسط عسگری<sup>۹</sup> و خسروی<sup>۱۰</sup> در مرجع [۲] معرفی شد. در سال ۲۰۱۶ جوانشیری<sup>۱۱</sup> و فتاحی<sup>۱۲</sup> در مرجع [۹] مفاهیم تجزیه همانی پیوسته و تجزیه اتمی همانی پیوسته را معرفی کردند.

## ۲ نتایج اصلی

انواع جدیدی از تجزیه‌های همانی و دستگاه‌های شبه‌قاب در مقاله [۱۲] معرفی شدند. در تعریف زیر، این مفاهیم را یادآوری می‌کنیم. دقت شود که هرگاه صحبت از توابع  $\mathcal{H}$  مقدار اندازه‌پذیر شد، منظور این است که به‌ازای هر  $f$  و  $g$  در  $\mathcal{H}$  نگاشت

$$\begin{aligned}\Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \langle \tau(x), f, g \rangle\end{aligned}$$

و یا به‌ازای هر  $f$  در  $\mathcal{H}$  نگاشت

$$\begin{aligned}\Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \|\tau(x)f\|\end{aligned}$$

اندازه‌پذیر است.  $q$  و  $r$  اعداد حقیقی دلخواه هستند و همواره  $p \geq 1$ .

<sup>1</sup>Hilbert space

<sup>2</sup>Duffin

<sup>3</sup>Schaefer

<sup>4</sup>Daubechies

<sup>5</sup>Grossmann

<sup>6</sup>Meyer

<sup>7</sup>Casazza

<sup>8</sup>Kutyniok

<sup>9</sup>Asgari

<sup>10</sup>Khosravi

<sup>11</sup>Javanshiri

<sup>12</sup>Fattahi

$B(\mathcal{H})$  نشان‌دهنده تمام توابع کران‌دار روی  $\mathcal{H}$  است،  $(\Omega, \mu)$  یک فضای اندازه است که در آن  $\mu$  یک اندازه مثبت است. همچنین  $\omega$  یک تابع اندازه‌پذیر از  $\Omega$  به  $(0, \infty)$  فرض می‌شود.

**تعریف ۱.۲.** فرض کنیم  $\mathcal{H}_0$  یک زیرفضای بسته از فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  و  $\tau : \Omega \rightarrow B(\mathcal{H})$  نگاشتی باشد به طوری که تابع  $\mathcal{H}$  مقدار  $T_f : \Omega \rightarrow \mathcal{H}$  که به ازای هر  $f \in \mathcal{H}$  به صورت  $T_f(x) = \tau(x)f$  تعریف می‌شود، اندازه‌پذیر باشد.

الف) نگاشت  $\tau$  را یک  $r$ -تجزیه همانی پیوسته برای  $\mathcal{H}_0$  نسبت به  $(\mu, \omega)$  می‌نامیم اگر به ازای هر  $f \in \mathcal{H}$  و  $g \in \mathcal{H}_0$  داشته باشیم:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} \omega(x)^r \langle \tau(x)f, g \rangle d\mu(x).$$

ب) نگاشت  $\tau$  را یک  $(p, q)$ -دستگاه اتمی پیوسته برای  $\mathcal{H}$  نسبت به  $(\mu, \omega)$  می‌نامیم اگر عدد مثبتی مانند  $B_\tau$  موجود باشد به طوری که به ازای هر  $f \in \mathcal{H}$  داشته باشیم:

$$\left( \int_{\Omega} \omega(x)^q \|\tau(x)f\|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq B_\tau \|f\|.$$

پ) نگاشت  $\tau$  را یک  $(p, q)$ -دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای  $\mathcal{H}$  می‌نامیم اگر  $\tau$  یک  $(p, q)$ -دستگاه اتمی پیوسته برای  $\mathcal{H}$  نسبت به  $(\mu, \omega)$  باشد و عدد مثبت  $A_\tau$  موجود باشد به طوری که به ازای هر  $f \in \mathcal{H}$  داشته باشیم:

$$A_\tau \|f\| \leq \left( \int_{\Omega} \omega(x)^q \|\tau(x)f\|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

ت) نگاشت  $\tau$  را یک  $(p, q, r)$ -دستگاه اتمی پیوسته برای  $(\mathcal{H}_0, \mathcal{H})$  می‌نامیم اگر  $\tau$  یک  $r$ -تجزیه همانی پیوسته برای  $\mathcal{H}_0$  و همچنین یک  $(p, q)$ -دستگاه اتمی پیوسته برای  $\mathcal{H}$  نسبت به  $(\mu, \omega)$  باشد. اگر  $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ ،  $\tau$  را یک  $(p, q, r)$ -دستگاه اتمی پیوسته برای  $\mathcal{H}$  می‌نامیم.

ث) نگاشت  $\tau$  را یک  $(p, q, r)$ -دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای  $(\mathcal{H}_0, \mathcal{H})$  نامیده می‌شود اگر  $\tau$  یک  $r$ -تجزیه همانی پیوسته برای  $\mathcal{H}_0$  و یک  $(p, q)$ -دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای  $\mathcal{H}$  نسبت به  $(\mu, \omega)$  باشد. اگر  $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ ،  $\tau$  را یک  $(p, q, r)$ -دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای  $\mathcal{H}$  می‌نامیم.

**قضیه ۲.۲.** فرض کنیم  $\mathcal{H}_0$  یک زیرفضای بسته از  $\mathcal{H}$  و  $T$  یک عملگر وارون‌پذیر روی  $\mathcal{H}$  باشد. در این صورت،

الف) اگر  $\tau$  یک  $r$ -تجزیه همانی پیوسته برای  $\mathcal{H}_0$  نسبت به  $(\mu, \omega)$  باشد، آن‌گاه  $\tau_T : \Omega \rightarrow B(\mathcal{H})$  که به صورت

$$\tau_T(x)(f) = T(\tau(x)T^{-1}f)$$

تعریف می‌شود یک  $r$ -تجزیه همانی پیوسته برای  $T(\mathcal{H}_0)$  نسبت به  $(\mu, \omega)$  است.

ب) اگر  $\tau$  یک  $(p, q)$ -دستگاه اتمی پیوسته برای  $\mathcal{H}$  نسبت به  $(\mu, \omega)$  باشد، آن‌گاه  $\tau_T$  نیز یک  $(p, q)$ -دستگاه اتمی پیوسته برای  $\mathcal{H}$  نسبت به  $(\mu, \omega)$  است.

پ) اگر  $\tau$  یک  $(p, q)$ -دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای  $\mathcal{H}$  باشد، آن‌گاه  $\tau_T$  نیز یک  $(p, q)$ -دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای  $\mathcal{H}$  است.

ت) اگر  $\tau$  یک  $(p, q, r)$ -دستگاه اتمی پیوسته برای  $(\mathcal{H}_0, \mathcal{H})$  باشد، آن‌گاه  $\tau_T$  یک  $(p, q, r)$ -دستگاه اتمی پیوسته برای  $(T(\mathcal{H}_0), \mathcal{H})$  است.

ث) اگر  $\tau$  یک  $(p, q, r)$ -دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای  $(\mathcal{H}_0, \mathcal{H})$  باشد، آن‌گاه  $\tau_T$  یک  $(p, q, r)$ -دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای  $(T(\mathcal{H}_0), \mathcal{H})$  است.

اثبات. ابتدا دقت می‌کنیم که چون  $\mathcal{H}_0$  یک زیرفضای بسته  $\mathcal{H}$  و  $T$  یک عملگر وارون‌پذیر روی  $\mathcal{H}$  است، پس  $T(\mathcal{H}_0)$  یک زیرفضای بسته  $\mathcal{H}$  است.

اکنون فرض می‌کنیم  $f$  و  $g$  دو عضو از  $\mathcal{H}$  باشند. طبق فرض نگاهت

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \langle \tau(x) T^{-1} f, T^* g \rangle \end{aligned}$$

اندازه‌پذیر است، لذا

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \langle T(\tau(x) T^{-1} f), g \rangle \end{aligned}$$

اندازه‌پذیر است، به طور معادل می‌توان گفت که

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \langle \tau_T(x) f, g \rangle \end{aligned}$$

اندازه‌پذیر است. اینک به اثبات موارد گفته شده می‌پردازیم.

الف) فرض کنیم  $\tau$  یک  $r$ -تجزیه همانی پیوسته برای  $\mathcal{H}_0$  نسبت به  $(\mu, \omega)$  باشد. اگر  $g \in \mathcal{H}$  و  $T(f) \in T(\mathcal{H}_0)$  داریم:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \omega(x)^r \langle \tau_T(x) T f, g \rangle d\mu(x) &= \int_{\Omega} \omega(x)^r \langle T \tau(x) T^{-1} T f, g \rangle d\mu(x) \\ &= \int_{\Omega} \omega(x)^r \langle \tau(x) f, T^* g \rangle d\mu(x) \\ &= \langle f, T^* g \rangle = \langle T f, g \rangle. \end{aligned}$$

تساوی فوق نشان می‌دهد که  $\tau_T$  یک  $r$ -تجزیه همانی پیوسته برای  $T(\mathcal{H}_0)$  نسبت به  $(\mu, \omega)$  است.

ب) فرض کنیم  $\tau$  یک  $(p, q)$ -دستگاه اتمی پیوسته برای  $\mathcal{H}$  نسبت به  $(\mu, \omega)$  باشد. در این صورت به‌ازای هر  $f \in \mathcal{H}$  داریم:

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Omega} \omega(x)^q \|\tau_T(x) f\|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} &= \left( \int_{\Omega} \omega(x)^q \|T(\tau(x) T^{-1} f)\|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|T\| \left( \int_{\Omega} \omega(x)^q \|\tau(x) T^{-1} f\|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|T\| B_{\tau} \|T^{-1} f\| \leq \|T\| \|T^{-1}\| B_{\tau} \|f\|. \end{aligned}$$

نامساوی فوق ایجاب می‌کند که  $\tau_T$  یک  $(p, q)$ -دستگاه اتمی پیوسته برای  $\mathcal{H}$  نسبت به  $(\mu, \omega)$  باشد.

پ) فرض کنیم  $\tau$  یک  $(p, q)$ -دستگاه شبه‌قاب پیوسته برای  $\mathcal{H}$  باشد. بنابر قسمت (ب)،  $\tau_T$  یک  $(p, q)$ -دستگاه اتمی پیوسته برای

$\mathcal{H}$  است. اکنون به‌ازای هر  $f \in \mathcal{H}$  داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\tau} \|f\| &= \mathcal{A}_{\tau} \|T T^{-1} f\| \leq \|T\| \mathcal{A}_{\tau} \|T^{-1} f\| \\ &\leq \|T\| \left( \int_{\Omega} \omega(x)^q \|\tau(x) T^{-1} f\|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|T\| \left( \int_{\Omega} \omega(x)^q \|T^{-1} T \tau(x) T^{-1} f\|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|T\| \|T^{-1}\| \left( \int_{\Omega} \omega(x)^q \|T(\tau(x) T^{-1} f)\|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{A_\tau}{\|T\| \|T^{-1}\|} \|f\| \leq \left( \int_\Omega \omega(x)^q \|T(\tau(x)T^{-1}f)\|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

و حکم ثابت می‌شود.

ت) از قسمت‌های (الف) و (ب) نتیجه می‌شود.

ث) از قسمت‌های (الف) و (پ) نتیجه می‌شود.

□

**قضیه ۳.۲.** اگر  $\tau_1$  و  $\tau_2$  دو  $(p, q)$ -دستگاه اتمی پیوسته برای  $\mathcal{H}$  نسبت به  $(\mu, \omega)$  باشند، آنگاه  $\tau_1 + \tau_2$  که به صورت

$$(\tau_1 + \tau_2)(x) = \tau_1(x) + \tau_2(x)$$

تعریف می‌شود، یک  $(p, q)$ -دستگاه اتمی پیوسته برای  $\mathcal{H}$  است.

اثبات. به آسانی ثابت می‌شود که  $\tau_1 + \tau_2$  اندازه‌پذیر است. اکنون، برای هر  $f \in \mathcal{H}$  داریم:

$$\begin{aligned} & \left( \int_\Omega \omega(x)^q \|(\tau_1 + \tau_2)(x)f\|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \int_\Omega \left\| \left( \omega(x)^{\frac{q}{p}} \tau_1(x)f \right) + \left( \omega(x)^{\frac{q}{p}} \tau_2(x)f \right) \right\|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \int_\Omega \left\| \omega(x)^{\frac{q}{p}} \tau_1(x)f \right\|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_\Omega \left\| \omega(x)^{\frac{q}{p}} \tau_2(x)f \right\|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq B_{\tau_1} \|f\| + B_{\tau_2} \|f\| = (B_{\tau_1} + B_{\tau_2}) \|f\| \end{aligned}$$

□

و حکم ثابت می‌شود.

**قضیه ۴.۲.** فرض کنیم  $\tau_1$  و  $\tau_2$  دو  $r$ -تجزیه‌همانی پیوسته برای  $\mathcal{H}$  نسبت به  $(\mu, \omega)$  باشند. در این صورت  $\tau$  که به صورت

$$\tau(x) = \frac{1}{r} (\tau_1(x) + \tau_2(x))$$

تعریف می‌شود، یک  $r$ -تجزیه‌همانی پیوسته برای  $\mathcal{H}$  نسبت به  $(\mu, \omega)$  است.

اثبات. به آسانی ثابت می‌شود که  $\tau$  اندازه‌پذیر است. اکنون، به‌ازای هر  $f$  در  $\mathcal{H}$  و  $g$  در  $\mathcal{H}$  داریم:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \omega(x)^r \langle \tau(x)f, g \rangle d\mu(x) &= \int_\Omega \omega(x)^r \left\langle \frac{1}{r} (\tau_1(x) + \tau_2(x))f, g \right\rangle d\mu(x) \\ &= \frac{1}{r} \int_\Omega \omega(x)^r \langle \tau_1(x)f, g \rangle d\mu(x) \\ &\quad + \frac{1}{r} \int_\Omega \omega(x)^r \langle \tau_2(x)f, g \rangle d\mu(x) \\ &= \frac{1}{r} \langle f, g \rangle + \frac{1}{r} \langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

□

و حکم ثابت می‌شود.



## References

- [1] Ali, S.T., Antoine, J.P., & Gazeau, J.P. (1993). Continuous frames in Hilbert spaces. *Ann. Physics*, 222, 1–37. DOI: <https://doi.org/10.1006/aphy.1993.1016>.
- [2] Asgari, M.S., & Khosravi, A. (2005). Frames and bases of subspaces in Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl*, 308, 541–553. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.11.036>.
- [3] Balazs, P. (2007). Basic definition and properties of Bessel multipliers. *J. Math. Anal. Appl*, 325, 571–585. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.02.012>.
- [4] Balazs, P., Bayer, D., & Rahimi, A. (2012). Multipliers for continuous frames in Hilbert spaces. *J. Phys. A*, 45, 244023–244043. DOI: <https://doi.org/10.1088/1751-8113/45/24/244023>.
- [5] Casazza, P., & Kutyniok, G. (2004). Frames of subspaces. *Contemp. Math. Amer. Math. Soc*, 345, 87–113.
- [6] Duffin, R.J., & Schaeffer, A.C. (1952). A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc*, 72, 341–366. DOI: <https://doi.org/10.2307/1990760>.
- [7] Feichtinger, H.G., & Werther, T. (2001). Atomic systems for subspaces. In: Zayed, L. (ed.) *Proceedings SampTA 2001, Orlando*, pp 163–165.
- [8] Gabardo, J.P., & Han, D. (2003). Frame associated with measurable spaces. *Adv. Comp. Math*, 18, 127–147. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1021312429186>.
- [9] Javanshiri, H., & Fattahi, A.M. (2016). Continuous atomic systems for subspaces. *Mediterr. J. Math*, 13, 1871–1884. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00009-015-0593-4>.
- [10] Kaiser, G. (1994). A Friendly Guide to Wavelets. *Birkhauser, Boston*. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8111-1>.
- [11] Khosravi, A., & Asgari, M.S. (2007). Frames of subspaces and approximation of the inverse frame operator. *Houst. J. Math*, 33, 907–920.
- [12] Mirzaee Azandaryani, M., & Aghamir Mohammad Ali, Z. (2023). Atomic and Frame-Like Systems for Subspaces of a Hilbert Space. *Mediterr. J. Math*, 20, 185-1–185-17. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00009-023-02395-1>.
- [13] Mirzaee Azandaryani, M., & Javadi, Z. (2022). Pseudo-duals of continuous frames in Hilbert spaces. *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl*, 13, 1–16. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11868-022-00486-3>.