Measure Algebras and Applications

Relative commutativity degree for some topological groups

Seyyed Ali Moosavi[1]

1. Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran. Email: s.a.mousavi@qom.ac.ir

Article Info	ABSTRACT

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 4 April 2023
Received in revised form:
18 May 2023
Accepted: 22 May 2023
Published Online:
30 September 2023

Keywords:
Commutativity degree,
Relative commutativity degree,
Topological group,
Compact group,
Closed subgroup

2020 Mathematics Subject Classification:
20P05, 20D60, 28A60

Assume that G is a compact Hausdorff topological group and H is a closed subgroup of G. In this paper, we will define the notion of relative commutativity degree for the subgroup H, which will be a generalization of the concept of relative commutativity degree in the case of finite groups. Then we will prove some properties of relative commutativity degree, that hold for finite groups, for these groups. In particular, we will derive an upper bound for the relative commutativity degree and state and prove a structural theorem for groups that have this upper bound. Additionally, we will provide some examples of compact infinite groups for which the mentioned bounds hold.

Cite this article: Moosavi, S.A. (2023). Relative commutativity degree for some topological groups. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 1–12. http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9447.1004

Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/MAA.2023.9447.1004

Extended Abstract

Introduction

Let G be a locally compact topological group, then by [6], there exists a Haar measure μ on the Borel σ-algebra. Suppose that H is a closed subgroup with non-zero measure, i.e., $\mu(H) \neq 0$. Define the measure μ_H on Borel subsets by

$$\mu_H(D) := \frac{\mu(D \cap H)}{\mu(H)}.$$

In this paper, we define the relative commutativity degree of subgroup H as follows:

$$\mathrm{Pr}(H, G) := \mu_H \times \mu(C) = \int_{G \times G} \chi_c(x, y) d\mu_H(y) d\mu(x),$$

where $C = \{(x, y) \in G \times G \mid xy = yx\}$ and μ is the normalized Haar measure on G. We will show that

$$\mathrm{Pr}(H, G) = \frac{1}{\mu(H)} \int_G \mu(C_H(y)) d\mu(y) = \frac{1}{\mu(H)} \int_H \mu(C_G(x)) d\mu(x).$$

Using the above result, we will prove that

$$\mathrm{Pr}(G) \leq \mathrm{Pr}(H, G) \leq \mathrm{Pr}(H),$$

and if H is a non-normal subgroup, then both of the above inequalities are strict. Also we will state some necessary and sufficient conditions such that the equality holds in the above inequalities.

In Section 4, we will find upper bounds for the relative commutativity degree of a subgroup. In fact, it will be shown that

$$\mathrm{Pr}(H, G) \leq \frac{\mu(H) + \mu(Z \cap H)}{2\mu(H)}.$$

We will show that $\mathrm{Pr}(H, G) \leq \frac{3}{4}$ and if H is non-abelian, then $\mathrm{Pr}(H, G) \leq \frac{5}{8}$ and we will provide some examples of groups for which these upper bounds occur.

Finally, we state a theorem about the groups that reach these upper bounds, in particular, we will show that if $\mathrm{Pr}(H, G) = \frac{3}{4}$, then

$$\frac{H}{Z(G) \cap H} \cong \mathbb{Z}_2$$

and if $\mathrm{Pr}(H, G) = \frac{5}{8}$ and H is non-abelian, then

$$\frac{H}{Z(G) \cap H} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Conclusion

In this article, we defined the notion of relative permutation degree for a subgroup in a compact topological group and examined some properties of this concept for these groups. We observed that the properties that hold for finite groups also hold for compact topological groups. In fact, since finite groups have the discrete topology, the definition in the finite case can be considered as a special case of the above definition for compact topological groups, and the results obtained for finite groups can be seen as a special case of the results obtained for compact groups.

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۱۲-۱

درجه جابه‌جایی نسبی برای برخی از گروه‌های توپولوژیک

سید علی موسوی [۱]

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: s.a.mousavi@qom.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱/۱۵
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۲/۲۸
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۳/۱
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
درجهٔ جابه‌جایی،
درجهٔ جابه‌جایی نسبی،
گروه توپولوژیک،
گروه فشرده،
زیرگروه بسته

رده‌بندی ریاضی:
20P05, 20D60, 28A60

چکیده

فرض کنید G یک گروه توپولوژیک فشرده، هاسدورف و H زیرگروهی بسته از G باشد. در این مقاله، به تعریف درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه H خواهیم پرداخت که تعمیمی از مفهوم درجهٔ جابه‌جایی نسبی در حالت گروه‌های متناهی خواهد بود. در ادامه، برخی از ویژگی‌های درجهٔ جابه‌جایی نسبی که برای گروه‌های متناهی برقرار هستند را برای این گروه‌ها ثابت خواهیم کرد. به‌ویژه، کران بالایی برای درجهٔ جابه‌جایی نسبی به دست خواهیم آورد و یک قضیهٔ ساختاری در مورد گروه‌هایی که این کران بالا را دارند بیان و اثبات خواهیم کرد. همچنین مثال‌هایی از گروه‌های فشردهٔ نامتناهی که کران‌های ذکرشده برای آنها برقرار هستند را ارائه خواهیم کرد.

استناد: موسوی، سید علی. (۱۴۰۲). درجه جابه‌جایی نسبی برای برخی از گروه‌های توپولوژیک. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۱۲-۱.
http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9447.1004

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

فرض کنید G یک گروه متناهی و H زیرگروهی از G باشد. درجهٔ جابه‌جایی گروه G با نماد $\Pr(G)$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Pr(G) = \frac{|C|}{|G|^{۲}},$$

که در آن

$$C = \{(x, y) \in G \times G \mid xy = yx\}. \quad (۱.۱)$$

درجهٔ جابه‌جایی درحقیقت نشان‌دهندهٔ احتمال جابه‌جاشدن دو عضو از G است که به‌صورت تصادفی انتخاب شده باشند. درجهٔ جابه‌جایی برای اولین بار در [۲] مطرح شده است و کارهای بسیار زیادی در این زمینه توسط محققان انجام شده است. در [۳] نویسندگان مفهوم درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه را به‌عنوان تعمیمی از مفهوم درجهٔ جابه‌جایی مطرح کردند که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Pr(H, G) = \frac{|\{(x, y) \in H \times G \mid xy = yx\}|}{|H||G|}.$$

درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه نیز توسط بسیاری از محققان مورد بررسی قرار گرفته است که برای نمونه می‌توان به [۳، ۵، ۸] مراجعه کرد. یک سؤال که به‌طور طبیعی به ذهن می‌رسد این است که آیا می‌توان مفاهیم فوق را برای گروه‌های نامتناهی هم مطرح کرد به‌گونه‌ای که این مفاهیم در حالت متناهی با تعاریف فوق مطابقت داشته باشند؟ در پاسخ به این سؤال، اولین بار گوستافسون در [۵] درجهٔ جابه‌جایی را در حالت کلی‌تر برای یک گروه توپولوژیک فشرده تعریف کرد و با استفاده از آن چند خاصیت مشابه حالت متناهی را برای این گروه‌ها ثابت کرد. در سال ۲۰۰۸ عرفانیان و روسو در [۴] و در سال ۲۰۱۱ رضایی و روسو در [۹] به روشی مشابه، این موضوعات را مورد بررسی قرار داده و برخی احکام مشابه حالت متناهی را ثابت کردند.

در این مقاله، مفهوم درجهٔ جابه‌جایی نسبی را برای گروه‌های توپولوژیک فشرده تعریف خواهیم کرد و ویژگی‌های آن را مورد بررسی قرار خواهیم داد. همان‌طور که خواهیم دید این تعریف و خاصیت‌های مورد توجه، مشابه حالت متناهی به دست خواهند آمد. به‌ویژه خواهیم دید که چون هر گروه متناهی با توپولوژی گسسته یک گروه توپولوژیک فشرده است، نتایج فوق در حالت خاص گروه‌های متناهی با نتایج قبلی کاملاً مطابقت دارد. لازم به ذکر است که اغلب نتایج به‌دست‌آمده در این مقاله، با نتایج بیان‌شده در [۹] مشابه است؛ ولی شیوهٔ تعریف و برهان آنها در بسیاری موارد متفاوت است. همچنین در این مقاله به ارائهٔ مثال‌هایی در ارتباط با این موضوع خواهیم پرداخت که در جهت روشن‌تر شدن مفاهیم، بسیار اثرگذار خواهد بود.

۲ تعاریف و قضایای مقدماتی

در این بخش به بیان تعاریف و احکام مقدماتی خواهیم پرداخت که در بخش ۳ و ۴ مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت. مرکزساز عضو x در G را با نماد $C_G(x)$ نشان می‌دهیم. همچنین شاخص زیرگروه H در گروه G با نماد $|G : H|$ نشان داده خواهد شد.

قضیه ۱.۲ (حکم ۵.۳.۱ از [۱۰]). فرض کنید G یک گروه باشد و H و K زیرگروه‌هایی از G باشند به‌طوری‌که $K \leq H \leq G$. در این صورت داریم

$$|G : K| = |G : H||H : K|.$$

قضیه ۲.۲ (حکم ۱۱.۳.۱ از [۱۰]). فرض کنید G یک گروه باشد و H و K زیرگروه‌هایی از G باشند. در این صورت داریم

$$|G : H \cap K| \leq |G : H||G : K|,$$

و تساوی اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر $G = HK$.

فرض کنید G یک گروه توپولوژیک فشرده و هاسدورف باشد. در این صورت طبق بخش‌های ۸ و ۹ از فصل دوم [۷]، یک اندازهٔ هار چپ μ روی σ -جبر شامل مجموعه‌های بورل با خاصیت $\mu(xE) = \mu(E)$ به‌ازای هر عضو x از G وجود دارد. با اعمال شرط نرمال‌سازی

$\mu(G) = ۱$ می‌توانیم فرض کنیم که μ اندازهٔ احتمال منحصربه‌فرد G است. روی فضای $G \times G$ اندازهٔ حاصل‌ضرب $\mu \times \mu$ را در نظر می‌گیریم. حال اگر تابع $f : G \times G \to G$ را با ضابطهٔ

$$f(x, y) = xyx^{-۱}y^{-۱},$$

تعریف کنیم، آنگاه f تابعی پیوسته است و $C = f^{-۱}(۱)$ و لذا C یک مجموعهٔ بسته و در نتیجه اندازه‌پذیر خواهد بود. در [۵] گوستافسون درجهٔ جابه‌جایی را برای گروه فشردهٔ G به‌صورت زیر تعریف کرد

$$\Pr(G) := \mu \times \mu(C), \tag{۱.۲}$$

که در آن μ اندازهٔ هار و C همان مجموعهٔ تعریف‌شده در رابطه (۱.۱) است. گوستافسون سپس نشان داد که احکام مشابه گروه‌های متناهی برای این گروه‌ها برقرار هستند، برای مثال او نشان داد که کران بالای یکسانی برای درجهٔ جابه‌جایی یک گروه غیرآبلی فشرده وجود دارد که در قضیهٔ بعد بیان شده است.

قضیه ۳.۲ (قضیهٔ اول از بخش دو [۵]). فرض کنید G یک گروه غیرآبلی فشرده باشد. در این صورت $\Pr(G) \leq \frac{۵}{۸}$.

مشابه با مفاهیم مطرح‌شده در [۵] در بخش سوم این مقاله به تعریف درجهٔ جابه‌جایی نسبی یک گروه توپولوژیک فشرده خواهیم پرداخت و نشان خواهیم داد که احکام مشابهی برای این گروه‌ها، در مقایسه با گروه‌های متناهی وجود دارند. در ادامه چند حکم مقدماتی بیان خواهند شد که در بخش‌های بعد مورد استفاده قرار خواهند گرفت. در ادامهٔ این مقاله، همواره منظور از گروه G یک گروه توپولوژیک فشرده، هاسدورف و زیرگروه H یک زیرگروه بسته از اندازهٔ غیرصفر است. همچنین منظور از اندازهٔ μ، اندازهٔ هار نرمال‌شده روی گروه G خواهد بود.

لم ۴.۲ (لم ۲.۲ از [۹]). فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از G باشد. در این صورت

$$\mu(H) = \begin{cases} \frac{۱}{|G:H|} & \text{اگر } |G : H| < \infty \\ ۰ & \text{اگر } |G : H| = \infty \end{cases}$$

لم ۵.۲ (برهان قضیه ۱ از بخش دوم [۵]). فرض کنید χ_C تابع مشخصه روی C باشد. در این صورت

$$\int_G \chi_C(x, y) d\mu(y) = \mu(C_G(x)).$$

لم ۶.۲. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از G باشد. در این صورت داریم

$$\frac{\mu(H)}{\mu(C_G(x))} \leq \frac{۱}{\mu(C_G(x))} \tag{۲.۲}$$

و تساوی اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر $G = HC_G(x)$.

اثبات. رابطه (۲.۲) معادل با این است که

$$\mu(H)\mu(C_x(G)) \leq \mu(C_H(x)), \tag{۳.۲}$$

لذا برای اثبات حکم کافی است رابطهٔ فوق را ثابت کنیم.
اگر $|G : C_G(x)| = \infty$، آنگاه با توجه به لم ۴.۲ داریم $\mu(C_G(x)) = ۰$ و واضح است که در این حالت حکم برقرار است. اگر $|G : C_G(x)| < \infty$، آنگاه $\mu(C_G(x)) = \frac{۱}{|G:C_G(x)|}$، $\mu(H) = \frac{۱}{|G:H|}$ و $\mu(C_H(x)) = \frac{۱}{|G:C_H(x)|}$. از طرفی چون $C_H(x) = H \cap C_G(x)$، لذا با توجه به قضیه ۲.۲ داریم

$$|G : C_H(x)| \leq |G : H||G : C_G(x)| \tag{۴.۲}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{۱}{|G : C_H(x)|} \geq \frac{۱}{|G : H|} \frac{۱}{|G : C_G(x)|}$$

و با توجه به لم ۴.۲ حکم به دست می‌آید. از سوی دیگر با توجه به قضیه ۲.۲، در رابطه (۴.۲) تساوی برقرار است اگر و تنها اگر داشته باشیم $G = HC_G(x)$، که نتیجه می‌دهد در (۲.۲) تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G = HC_G(x)$ و اثبات کامل می‌شود. □

تعریف ۷.۲. فرض کنید H زیرگروهی از G از اندازهٔ غیرصفر باشد و D زیرمجموعه‌ای بورل از G باشد. اندازهٔ μ_H را بر زیرمجموعه‌های بورل G به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mu_H(D) := \frac{\mu(H \cap D)}{\mu(H)},$$

در این صورت به‌راحتی می‌توان مشاهده کرد که μ_H اندازهٔ هار نرمال‌شده روی H است. همچنین واضح است که μ_G همان اندازهٔ μ خواهد بود.

در ادامهٔ این مقاله، همواره منظور از μ_H همان اندازهٔ بیان‌شده در تعریف ۷.۲ است و زیرگروه H همواره از اندازهٔ غیرصفر در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۸.۲. اندازهٔ ν را مطلقاً پیوسته نسبت به μ گویند، اگر برای هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر مثل A بتوان نشان داد که با صفر بودن اندازهٔ μ روی A، اندازهٔ ν روی A نیز صفر است، یعنی

$$\mu(A) = \circ \Rightarrow \nu(A) = \circ,$$

و آن را به‌صورت $\mu \gg \nu$ نشان می‌دهند.

قضیه ۹.۲ (رادون-نیکودیم (بخش ۶ از [۱۱])). فرض کنید (X, Σ) یک فضای اندازه باشد و ν و μ دو اندازهٔ σ-متناهی تعریف‌شده روی آن باشند. اگر اندازهٔ ν مطلقاً پیوسته نسبت به μ باشد، آنگاه یک تابع اندازه‌پذیر مثل f موجود است که نامنفی بوده و برای هر زیرمجموعه‌ای از X (مانند A)، داریم:

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

چنین تابعی را مشتق رادون-نیکودیم ν نسبت به μ گوییم و به شکل $\frac{d\nu}{d\mu}$ نشان می‌دهیم.

تابع f در قضیهٔ فوق به شکل منحصربه‌فردی قابل تشخیص و تعیین است، مگر در نقاطی که اندازهٔ μ آن‌ها صفر است. به این معنی که اگر g، تابع دیگری باشد که در این رابطه صدق کند، تقریباً همه‌جا داریم $f = g$.

اگر $\mu \gg \nu$، آنگاه برای هر تابع μ-انتگرال‌پذیر g داریم

$$\int_X g d\nu = \int_X g f d\mu.$$

ملاحظه ۱۰.۲. فرض کنید μ_H اندازهٔ بیان‌شده در تعریف ۷.۲ باشد. در این صورت $\mu \gg \mu_H$ و به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که مشتق رادون-نیکودیم μ_H نسبت به μ برابر

$$\frac{d\mu_H}{d\mu} = \frac{۱}{\mu(H)} \chi_H$$

است که در آن χ_H تابع مشخصهٔ H است. لذا به‌ازای هر تابع انتگرال‌پذیر g داریم

$$\int_X g d\mu_H = \int_X \frac{۱}{\mu(H)} g \chi_H d\mu = \frac{۱}{\mu(H)} \int_X g \chi_H d\mu. \tag{۵.۲}$$

در اثبات احکام بخش سوم و چهارم مقاله از رابطهٔ فوق به‌صورت مکرر و بدون ارجاع مستقیم به این رابطه استفاده خواهیم کرد.

۳ درجهٔ جابه‌جایی نسبی

در این بخش مشابه با تعریف بیان‌شده در [۵]، درجهٔ جابه‌جایی نسبی یک زیرگروه را با استفاده از توابع μ و μ_H برای یک گروه فشرده و یک زیرگروه بسته از آن تعریف خواهیم کرد و احکام و قضایای مشابه حالت متناهی را برای آن اثبات خواهیم کرد.

تعریف ۱.۳. درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه H را با نماد $\Pr(H, G)$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Pr(H, G) := \mu_H \times \mu(C) = \int_{G \times G} \chi_C(x, y) d\mu_H(x) d\mu(y), \tag{۱.۳}$$

که C همان مجموعهٔ تعریف‌شده در رابطه (۱.۱) و $\chi_C(x, y)$ تابع مشخصه روی C است.

تذکر ۲.۳. درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه را می‌توان در حالت کلی‌تر برای وقتی که $H \leq K \leq G$، به‌صورت زیر تعریف کرد

$$\Pr(H,K) := \mu_H \times \mu_K(C) = \int_{G\times G} \chi_C(x,y) d\mu_H(x) d\mu_K(y), \tag{۲.۳}$$

به‌ویژه $\Pr(H,H)$ همان $\Pr(H)$ خواهد بود که برهان آن در اثبات قسمت دوم قضیه ۵.۳ قابل مشاهده است.

لم ۳.۳. همواره داریم

$$\Pr(H,G) = \frac{۱}{\mu(H)} \int_G \mu(C_H(y)) d\mu(y) = \frac{۱}{\mu(H)} \int_H \mu(C_G(x)) d\mu(x). \tag{۳.۳}$$

اثبات. با توجه به تعریف درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه H و قضیهٔ فوبینی، داریم

$$\begin{aligned}
\Pr(H,G) &= \int_{G\times G} \chi_C(x,y) d\mu_H(x) d\mu(y) \\
&= \int_G \left(\int_G \chi_C(x,y) d\mu_H(x) \right) d\mu(y) \\
&= \frac{۱}{\mu(H)} \int_G \left(\int_G \chi_C(x,y) \chi_H(x) d\mu(x) \right) d\mu(y) \\
&= \frac{۱}{\mu(H)} \int_G \left(\int_H \chi_C(x,y) d\mu(x) \right) d\mu(y) \\
&= \frac{۱}{\mu(H)} \int_G \mu(C_H(y)) d\mu(y)
\end{aligned}$$

و تساوی اول ثابت می‌شود. همچنین با استفادهٔ مجدد از تعریف داریم

$$\begin{aligned}
\Pr(H,G) &= \int_{G\times G} \chi_C(x,y) d\mu_H(x) d\mu(y) \\
&= \int_G \left(\int_G \chi_C(x,y) d\mu(y) \right) d\mu_H(x) \\
&= \int_G \mu(C_G(x)) d\mu_H(x) \\
&= \frac{۱}{\mu(H)} \int_G \mu(C_G(x)) \chi_H(x) d\mu(x) \\
&= \frac{۱}{\mu(H)} \int_H \mu(C_G(x)) d\mu(x)
\end{aligned}$$

و تساوی دوم هم حاصل شد. □

حال مثالی از درجهٔ جابه‌جایی نسبی برای یک گروه فشردهٔ نامتناهی، ارائه می‌دهیم. فرض کنید $G_۱ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = ۱\}$، در این صورت $G_۱$ با ضرب معمولی اعداد مختلط و توپولوژی معمولی اعداد مختلط، یک گروه توپولوژیک فشرده است. در مثال‌های آینده همواره از گروه $G_۱$ استفاده خواهیم کرد.

مثال ۴.۳. فرض کنید $G = G_۱ \times S_۳$ که $S_۳$ گروه متقارن از درجهٔ ۳ است و فرض کنید که μ اندازهٔ هار نرمال‌شده روی G باشد. قرار می‌دهیم $H = G_۱ \times \langle (۱۲) \rangle$. در این صورت واضح است که $|G:H| = ۳$ و در نتیجه $\mu(H) = \frac{۱}{۳}$. حال درجهٔ جابه‌جایی نسبی H را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید

$$H_۱ = \{(g, id) \mid g \in G_۱\}, \quad H_۲ = \{(g, (۱۲)) \mid g \in G_۱\}.$$

در این صورت داریم $|G:H_{۱}|=۶$ و در نتیجه $\mu(H_{۱})=\mu(H_{۲})=\frac{۱}{۶}$. همچنین واضح است که برای $(g,id)\in H_{۱}$ داریم $C_G(g,id)=G$ و برای $(g,(۱۲))\in H_{۲}$ داریم $C_G(g,(۱۲))=H$. لذا خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\Pr(H,G)&=\frac{۱}{\mu(H)}\int_H \mu(C_G(x))d\mu(x)=۳\left(\int_{H_{۱}}\mu(C_G(x))d\mu(x)+\int_{H_{۲}}\mu(C_G(x))d\mu(x)\right)\\&=۳\left(\int_{H_{۱}}\mu(G)d\mu(x)+\int_{H_{۲}}\mu(H)d\mu(x)\right)=۳\left(\mu(H_{۱})+\mu(H)\mu(H_{۲})\right)\\&=۳\left(\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۶}\right)=\frac{۲}{۳}.\end{aligned}$$

قضیه ۵.۳. فرض کنید H زیرگروهی از G باشد. در این صورت داریم

$$\Pr(G)\leq\Pr(H,G)\leq\Pr(H), \tag{۴.۳}$$

که $\Pr(H)$ همان درجهٔ جابه‌جایی H است.

اثبات. با استفاده از لم ۳.۳ داریم

$$\begin{aligned}\Pr(H,G)&=\frac{۱}{\mu(H)}\int_G\mu(C_H(y))d\mu(y)\\&=\int_G\frac{\mu(C_H(y))}{\mu(H)}d\mu(y)\\&\geq\int_G\mu(C_G(y))d\mu(y)=\Pr(G),\end{aligned}$$

که رابطهٔ آخر با استفاده از لم ۶.۲ به دست آمده است. برای اثبات نامساوی دوم ابتدا توجه می‌کنیم که با استفاده از لم ۳.۳ داریم

$$\Pr(H,G)=\frac{۱}{\mu(H)}\int_H\mu(C_G(x))d\mu(x)$$

از سوی دیگر داریم

$$\begin{aligned}\Pr(H,H)&=\int_G\left(\int_G\chi_C(x,y)d\mu_H(y)\right)d\mu_H(x)\\&=\frac{۱}{\mu(H)}\int_G\left(\int_G\chi_C(x,y)\chi_H(y)d\mu(y)\right)d\mu_H(x)\\&=\frac{۱}{\mu(H)}\int_G\mu(C_H(x))d\mu_H(x)\\&=\frac{۱}{\mu(H)}\int_G\mu(C_H(x))\frac{۱}{\mu(H)}\chi_H(x)d\mu(x)\\&=\frac{۱}{\mu(H)}\int_H\frac{\mu(C_H(x))}{\mu(H)}d\mu(x)\\&\geq\frac{۱}{\mu(H)}\int_H\mu(C_G(x))d\mu(x)=\Pr(H,G)\end{aligned}$$

و نامساوی دوم هم ثابت شد (توجه کنید که در رابطهٔ آخر دوباره لم ۶.۲ به کار گرفته شده است). □

قضیه ۶.۳. فرض کنید H زیرگروهی از G باشد، در این صورت $\Pr(H,G)=\Pr(G)$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $y\in G$ داشته باشیم $G=HC_G(y)$.

اثبات. با توجه به اثبات قضیه ۵.۳ می‌توان دید که $\Pr(H,G)=\Pr(G)$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $y\in G$ داشته باشیم

$$\frac{\mu(C_H(y))}{\mu(H)}=\mu(C_G(y))$$

و با توجه به لم ۴.۲ این تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G=HC_G(y)$ به‌ازای هر $y\in G$ برقرار باشد. □

با استدلالی مشابه قضیهٔ قبل به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که در نامساوی دوم قضیه ۵.۳ تساوی برقرار است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $x \in H$ داشته باشیم $G = HC_G(x)$ و دلیل اینکه این رابطه فقط برای اعضای H بیان می‌شود این است که در اثبات نامساوی دوم قضیه ۵.۳ انتگرال‌های نهایی روی مجموعهٔ H هستند. لذا قضیهٔ زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۷.۳. فرض کنید H زیرگروهی از G باشد، در این صورت $\Pr(H,G) = \Pr(H)$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $x \in H$ داشته باشیم $G = HC_G(x)$.

اگر زیرگروه H را یک زیرگروه غیرنرمال در نظر بگیریم، آنگاه نامساوی‌ها در قضیه ۵.۳ به نامساوی‌های اکید تبدیل خواهند شد که برهان آن در ادامه خواهد آمد.

قضیه ۸.۳. فرض کنید H زیرگروهی غیرنرمال از G باشد. در این صورت داریم

$$\Pr(G) < \Pr(H,G) < \Pr(H). \tag{۵.۳}$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر به‌ازای هر $x \in H$ داشته باشیم $G = HC_G(x)$، آنگاه H زیرگروه نرمالی از G خواهد بود. فرض کنید که شرط فوق برقرار است و $h \in H$ و فرض کنید که $g \in G$ عضوی دلخواه از G باشد. چون

$$G = HC_G(x) = C_G(x)H,$$

لذا می‌توان نوشت $g = c_۱h_۱$ که $c_۱ \in C_G(h)$ و $h_۱ \in H$. حال داریم

$$g^{-۱}hg = h_۱^{-۱}c_۱^{-۱}hc_۱h_۱ = h_۱^{-۱}hh_۱ \in H,$$

که نشان می‌دهد H زیرگروه نرمالی از G است. حال اگر در قضیه ۵.۳ تساوی برقرار باشد، آنگاه با توجه به قضایای ۶.۳ و ۷.۳ و استدلال فوق نتیجه می‌شود که H زیرگروهی نرمال از G است که خلاف فرض است.

□

۴ کران بالایی برای درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه

در این بخش همواره منظور از Z مرکز گروه G است؛ یعنی اعضایی که با تمام اعضای گروه G جابه‌جا می‌شوند.

قضیه ۱.۴. فرض کنید H زیرگروهی از G و Z مرکز گروه G باشد. در این صورت داریم

$$\Pr(H,G) \leq \frac{\mu(H) + \mu(Z \cap H)}{۲\mu(H)}. \tag{۱.۴}$$

اثبات. قرار دهید $K = Z \cap H$. در این صورت به‌ازای هر $x \in K$ داریم $C_G(x) = G$ و در نتیجه $\mu(C_G(x)) = ۱$. همچنین اگر $x \in H - K$، آنگاه $C_G(x) < G$ که نتیجه می‌دهد $|G : C_G(x)| \geq ۲$، لذا با توجه به لم ۴.۲ خواهیم داشت

$$\mu(C_G(x)) \leq \frac{۱}{۲}.$$

حال با توجه به تعریف درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه داریم

$$\begin{aligned}\Pr(H,G) &= \frac{1}{\mu(H)}\int_H \mu(C_G(x))d\mu(x)\\ &= \frac{1}{\mu(H)}\left(\int_K \mu(C_G(x))d\mu(x)+\int_{H-K}\mu(C_G(x))d\mu(x)\right)\\ &\leq \frac{1}{\mu(H)}\left(\int_K d\mu(x)+\int_{H-K}\frac{1}{2}d\mu(x)\right)\\ &= \frac{1}{\mu(H)}\left(\mu(K)+\frac{\mu(H-K)}{2}\right)\\ &= \frac{2\mu(K)+\mu(H-K)}{2\mu(H)}\\ &= \frac{\mu(H)+\mu(K)}{2\mu(H)}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\Pr(H,G)\leq \frac{\mu(H)+\mu(Z\cap H)}{2\mu(H)},$$

و حکم ثابت شد. □

با استفاده از قضیهٔ فوق می‌توان کران‌های بالایی برای درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه‌ها به دست آورد. این نتایج با نتایج به‌دست‌آمده در حالت متناهی کاملاً یکسان است.

قضیه ۲.۴. فرض کنید G یک گروه غیرآبلی و H زیرگروهی از آن باشد. در این صورت داریم

الف. اگر $Z\subseteq H$، آنگاه $\Pr(H,G)=1$؛

ب. اگر $Z\nsubseteq H$، آنگاه $\Pr(H,G)\leq \frac{3}{4}$؛

پ. اگر $Z\nsubseteq H$ و H غیرآبلی باشد، آنگاه $\Pr(H,G)\leq\frac{5}{8}$.

اثبات. الف. اگر $Z\subseteq H$، آنگاه به‌ازای هر $x\in H$ داریم $\mu(C_G(x))=\mu(G)=1$ و در نتیجه

$$\Pr(H,G)=\frac{1}{\mu(H)}\int_H \mu(C_G(x))d\mu(x)=\frac{1}{\mu(H)}\int_H d\mu(x)=\frac{\mu(H)}{\mu(H)}=1.$$

ب. چون $Z\nsubseteq H$ پس $Z\cap H<H$ که نتیجه می‌دهد $|H:Z\cap H|\geq 2$. بنابراین

$$|G:Z\cap H|=|G:H||H:Z\cap H|\geq 2|G:H|,$$

که با توجه به لم ۴.۲ نتیجه می‌دهد

$$\mu(Z\cap H)\leq \frac{1}{2}\mu(H).$$

حال با به کار بردن قضیه ۱.۴ خواهیم داشت

$$\Pr(H,G)\leq\frac{\mu(H)+\mu(Z\cap H)}{2\mu(H)}\leq\frac{\mu(H)+\frac{1}{2}\mu(H)}{2\mu(H)}=\frac{3}{4}.$$

پ. چون H غیرآبلی است؛ لذا از قضیه ۳.۲ داریم $\Pr(H)\leq\frac{5}{8}$، بنابراین با توجه به قضیه ۵.۳ خواهیم داشت

$$\Pr(H,G)\leq\Pr(H)\leq\frac{5}{8}.$$

□

مثال ۳.۴. فرض کنید $G=G_۱\times D_۸$ که $D_۸$ گروه دووجهی از مرتبهٔ ۱۰ با مولدهای a و b است (توجه کنید که برای مولدهای گروه $D_۸$ داریم $a^۴=b^۲=۱$) و فرض کنید که μ اندازهٔ هار نرمال‌شده روی G باشد. زیرگروه H از G را به‌صورت $H=G_۱\times\langle a\rangle$ در نظر می‌گیریم. واضح است که $|G:H|=۲$ و لذا خواهیم داشت $\mu(H)=\frac{۱}{۲}$. فرض کنید

$$H_۱=\{(g,x)\mid g\in G_۱, x\in\{۱,a^۲\}\},\quad H_۲=\{(g,y)\mid g\in G_۱, y\in\{a,a^۳\}\}.$$

در این صورت داریم $|G:H_۱|=۴$ و در نتیجه $\mu(H_۱)=\mu(H_۲)=\frac{۱}{۴}$. همچنین چون $Z(D_۸)=\{۱,a^۲\}$ لذا برای $(g,x)\in H_۱$ داریم $C_G(g,x)=G$ و برای $(g,y)\in H_۲$ داریم $C_G(g,y)=H$. بنابراین

$$\begin{aligned}\Pr(H,G)&=\frac{۱}{\mu(H)}\int_H\mu(C_G(x))d\mu(x)=۲\left(\int_{H_۱}\mu(C_G(x))d\mu(x)+\int_{H_۲}\mu(C_G(x))d\mu(x)\right)\\&=۲\left(\int_{H_۱}\mu(G)d\mu(x)+\int_{H_۲}\mu(H)d\mu(x)\right)=۲\left(\mu(H_۱)+\mu(H)\mu(H_۲)\right)\\&=۲\left(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{۴}\right)=\frac{۳}{۴}.\end{aligned}$$

مثال ۴.۴. قرار دهید $G_۲=Q_۸\times C_۲$ که در آن $Q_۸$ گروه کواترنیون از مرتبهٔ ۸ و $C_۲$ گروه دوری از مرتبهٔ ۲ است. (در اینجا گروه کواترنیون را به‌صورت $Q_۸=\{\pm۱,\pm i,\pm j,\pm k\}$ در نظر گرفته‌ایم). حال قرار می‌دهیم $G=G_۱\times G_۲$ و زیرگروه H از G را به‌صورت $H=G_۱\times Q_۸$ در نظر می‌گیریم. واضح است که $|G:H|=۲$ و لذا خواهیم داشت $\mu(H)=\frac{۱}{۲}$. فرض کنید

$$H_۱=\{(g,x)\mid g\in G_۱, x\in\{۱,-۱\}\},\quad H_۲=\{(g,y)\mid g\in G_۱, y\in\{\pm i,\pm j,\pm k\}\}.$$

در این صورت داریم $|G:H_۱|=۸$ که نتیجه می‌دهد $\mu(H_۱)=\frac{۱}{۸}$. اگر $(g,x)\in H_۱$، آنگاه $C_G(g,x)=G$ و اگر $(g,y)\in H_۲$، آنگاه داریم $C_G(g,y)=G_۱\times(\langle y\rangle\times C_۲)$. چون مرتبهٔ $\langle y\rangle$ برابر ۴ است؛ لذا برای $(g,y)\in H_۲$ خواهیم داشت $\mu(C_G(g,y))=\frac{۱}{۲}$. لذا درجهٔ جابه‌جایی نسبی زیرگروه H به‌صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned}\Pr(H,G)&=\frac{۱}{\mu(H)}\int_H\mu(C_G(x))d\mu(x)=۲\left(\int_{H_۱}\mu(C_G(x))d\mu(x)+\int_{H_۲}\mu(C_G(x))d\mu(x)\right)\\&=۲\left(\int_{H_۱}\mu(G)d\mu(x)+\int_{H_۲}\frac{۱}{۲}d\mu(x)\right)=۲\left(\mu(H_۱)+\frac{۱}{۲}\mu(H_۲)\right)\\&=۲\left(\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۶}{۱۶}\right)=\frac{۵}{۸}.\end{aligned}$$

ملاحظه ۵.۴. مثال‌های ۳.۴ و ۴.۴ نشان می‌دهند که کران‌های بالای بیان‌شده در قضیه ۲.۴ واقعاً رخ خواهند داد و لذا کران‌های بیان‌شده، بهترین کران‌های ممکن هستند.

آخرین قضیهٔ این مقاله به یک قضیهٔ ساختاری در مورد گروه‌های فشرده‌ای که کران‌های بالای درجهٔ جابه‌جایی نسبی برای آنها اتفاق می‌افتد، اختصاص دارد. شایان ذکر است که در حالت متناهی هم نتایج کاملاً مشابهی برقرار هستند.

قضیه ۶.۴. فرض کنید H زیرگروهی از G باشد. در این صورت داریم

الف. اگر $\Pr(H,G)=\frac{۳}{۴}$، آنگاه $\frac{H}{Z\cap H}\cong\mathbb{Z}_۲$.

ب. اگر $\Pr(H,G)=\frac{۵}{۸}$ و H غیرآبلی باشد، آنگاه $\frac{H}{Z\cap H}\cong\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲$.

اثبات. الف. فرض کنید $\Pr(H,G)=\frac{۳}{۴}$. در این صورت با توجه به قضیه ۱.۴ داریم

$$\frac{۳}{۴}\leq\frac{\mu(H)+\mu(Z\cap H)}{۲\mu(H)}$$

که نتیجه می‌دهد $\frac{\mu(H)}{\mu(Z\cap H)}\leq ۲$. لذا از لم ۴.۲ داریم $\frac{|G:Z\cap H|}{|G:H|}\leq ۲$. اگر $\frac{|G:Z\cap H|}{|G:H|}=۱$، آنگاه $Z\cap H=H$ که نتیجه می‌دهد $H\subseteq Z$ و در نتیجه $\Pr(H,G)=۱$ که متناقض با فرض است؛ بنابراین $\frac{|G:Z\cap H|}{|G:H|}=۲$ و در نتیجه $|\frac{H}{Z\cap H}|=۲$، لذا خواهیم

داشت $\frac{H}{Z\cap H} \cong \mathbb{Z}_۲$.
ب. فرض کنید $\Pr(H,G) = \frac{۵}{۸}$. در این صورت مشابه استدلال حالت قبل داریم $۴ \leq \frac{\mu(H)}{\mu(Z\cap H)}$ که نتیجه می‌دهد $۴ \leq \frac{|G:Z\cap H|}{|G:H|}$.
بنابراین $|\frac{H}{Z\cap H}| \leq ۴$. اگر $\frac{H}{Z\cap H}$ دوری باشد، آنگاه H آبلی است که خلاف فرض است. پس $|\frac{H}{Z\cap H}| = ۴$ و چون $\frac{H}{Z\cap H}$ غیردوری است لذا $\frac{H}{Z\cap H} \cong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$. □

۵ قدردانی

وظیفهٔ خود می‌دانم که از داوران گرامی که با صرف وقت ارزشمند خود، مقاله را مطالعه نموده و نظرات بسیار مفید و سازنده‌ای را در جهت بهبود مقاله بیان نمودند، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

References

[1] Das, A.K., & Nath, R.K. (2010). On generalized relative commutativity degree of a finite group. *International Electronic Journal of Algebra*, 7(7), 140–151.

[2] Erdos, P., & Turan, P. (1968). On some problems of statistical group theory. *Acta Math. Acad. Sci. Hung*, 19, 413–435. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01894517.

[3] Erfanian, A., Lescot, P., & Rezaei, R. (2007). On the relative commutativity degree of a subgroup of a finite group. *Comm. Algebra*, 35, 4183–4197. DOI: https://doi.org/10.1080/00927870701545044.

[4] Erfanian, A., & Russo, F.G. (2008). Probability of mutually commuting n-tuples in some classes of compact groups. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 34(2), 27–37.

[5] Gustafson, W.H. (1973). What is the probability that two groups elements commute?. *Amer. Math. Monthly*, 80, 1031–1304. DOI: https://doi.org/10.1080/00029890.1973.11993437.

[6] Hewitt, E., & Ross, K.A. (1963). Abstract Harmonic Analysis. *Springer Verlag, NewYork*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-40409-6.

[7] Nachbin, L. (1965). The Haar Integral. *D. Van Nostrand, Princeton, N.J.*

[8] Nath, R.K., & Yadav, M.K. (2015). Some results on relative commutativity degree. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1952-)*, 64, 229–239. DOI: https://doi.org/10.1007/s12215-015-0194-x.

[9] Rezaei, R., & Russo, F.G. (2011). Bounds for the relative n-th nilpotency degree in compact groups. *Asian-European Journal of Mathematics*, 4, 495–506. DOI: https://doi.org/10.1142/S1793557111000411.

[10] Robinson, D. (1996). A Course in the Theory of Groups. *Germany: Springer New York*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8594-1.

[11] Royden, H.L. (1988). Real Analysis. *United Kingdom: Macmillan*.