Measure Algebras and Applications

The amenability of the universal groupoids of a Clifford semigroup

Mahmoud Kazemi Hokmabad[1], **Mahmood Pourgholamhossein**[2]

1. Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran.
   Email: makazemi2006@yahoo.com
2. Corresponding Author, Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran.
   Email: m-purghol@qom.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 28 May 2023
Received in revised form: 24 August 2023
Accepted: 26 August 2023
Published Online: 30 September 2023

Keywords:
Amenability,
Universal groupoid,
Clifford semigroup,
Inverse semigroup

2020 Mathematics Subject Classification:
43A20, 46H25

ABSTRACT

We show that there is a one-to-one correspondence (up to isomorphism) between maximal subgroups of a Clifford semigroup and isotropy subgroups of its universal groupoid. We prove that a Clifford semigroup is a union of amenable subgroups if and only if its universal groupoid is amenable. We give an example of an amenable Clifford semigroup that its universal groupoid is not amenable.

Cite this article: Pourgholamhossein, M., & Kazemi Hokmabad, M. (2023). The amenability of the universal groupoids of a Clifford semigroup. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 107–118. http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9500.1006

Publisher: University of Qom

DOI: 10.22091/MAA.2023.9500.1006

Extended Abstract

Introduction

First studied by Brandt in 1927, groupoids have a central role in Mathematics and Mathematical Physics. In Algebraic Geometry, Grothendieck used groupoids to investigate moduli spaces, and in Crystallography, they are used to study microscopic symmetry via screw operators [5]. On the other hand, inverse semigroups were first explicitly defined by Wagner in 1952 and independently by Preston in 1954. They had a role in Klein's Erlangen program and Lie's theory of infinite continuous groups. These two notions are related; to a groupoid, one may associate its ample semigroup [6] and each inverse semigroup has a universal groupoid [5]. However, the relation between the structure and properties of these objects is not well studied. Paterson in [5] suggests that the amenability of an inverse semigroup should be related to the amenability of the maximal subgroups of the inverse semigroup. This seems to be a necessary condition but certainly is not sufficient (consider the free inverse semigroup on two generators). In this paper, we solve this problem for Clifford semigroups by showing that a Clifford semigroup is a union of amenable groups if and only if its universal groupoid is amenable. We also give a correspondence between the isotropy groups of the universal groupoid and subgroups of the maximal group homomorphic image of the Clifford semigroup.

Conclusion

The main results of this paper are:

***Theorem* 0.1.** *Let S be a Clifford semigroup, G_S and $G = G(X, S)$ be its maximal group homomorphic image and universal groupoid, respectively. Then G is the union of its isotropy groups which could be identified with subgroups of G_S.*

***Theorem* 0.2.** *Let S be an amenable Clifford semigroup and $S = \cup_{e\in E} H_e$. Then $T = \cup_{e\leq e_0} H_e$ is an amenable Clifford subsemigroup of S for each $e_0 \in E$. Also $H_e H_{e_0} = H_e$ and $H_e H_f \subseteq H_{ef}$.*

***Theorem* 0.3.** *Let S be an amenable Clifford semigroup and $S = \cup_{e\in E} H_e$. Then for every $e \in E$, $H_e \cong H_{\overline{e}}$.*

***Theorem* 0.4.** *Let $S = \bigcup_{e\in E} H_e$ be a Clifford semigroup such that for each $e \in E$, H_e is amenable, then its universal groupoid $G = G(X, S)$ is amenable.*

***Theorem* 0.5.** *Let $S = \bigcup_{e\in E} H_e$ be a Clifford semigroup whose universal groupoid G is amenable. Then each group H_e is amenable.*

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۱۱۸-۱۰۷

میانگین‌پذیری گروه‌واره‌های جهانی یک نیم‌گروه کلیفورد

محمود کاظمی حکم‌آباد [1] ، **محمود پورغلامحسین** [2] ✉

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: makazemi2006@yahoo.com
۲. نویسندهٔ مسئول،گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: m-purghol@qom.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۳/۷
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۶/۲
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۶/۴
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
میانگین‌پذیری،
گروه‌وارهٔ جهانی،
نیم‌گروه کلیفورد،
نیم‌گروه وارون

رده‌بندی ریاضی:
43A20, 46H25

در این مقاله، نشان می‌دهیم که بین زیرگروه‌های ماکسیمال از یک نیم‌گروه کلیفورد و زیرگروه‌های ایزوتروپی از گروه‌وارهٔ جهانی آن، یک تناظر یک‌به‌یک (با تقریب یکریختی) موجود است. همچنین ثابت می‌کنیم یک نیم‌گروه کلیفورد به‌صورت اجتماعی از زیرگروه‌های میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر گروه‌وارهٔ جهانی آن میانگین‌پذیر باشد. در خاتمه، مثالی از یک نیم‌گروه میانگین‌پذیر کلیفورد می‌آوریم که گروه‌وارهٔ جهانی آن میانگین‌پذیر نیست.

استناد: کاظمی حکم‌آباد، محمود.، پورغلامحسین، محمود. (۱۴۰۲). میانگین‌پذیری گروه‌واره‌های جهانی یک نیم‌گروه کلیفورد. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۱۱۸-۱۰۷.

http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9500.1006

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

در سال ۱۹۲۷ میلادی برای اولین بار، گروه‌واره‌ها توسط برندت مطالعه گردیدند که معلوم شد این ساختار نقش به‌سزایی در ریاضیات و فیزیک دارد. سپس گروه‌واره‌ها توسط گروتندیک در هندسهٔ جبری مورد استفاده قرار گرفتند. ازسوی‌دیگر، نیم‌گروه‌های وارون نخستین بار به‌صراحت و مستقلاً توسط واگنر در سال ۱۹۵۲ و پرستون در سال ۱۹۵۴ تعریف شدند. نیم‌گروه‌های وارون در برنامهٔ ارلانگن کلاین و نظریهٔ گروه‌های پیوستهٔ نامتناهی لی نقش دارند. اگرچه رابطهٔ بین ساختار و ویژگی‌های این اشیا به‌خوبی مطالعه نشده‌اند، پترسون در [۵] این مطلب را مطرح کرد که میانگین‌پذیری نیم‌گروه‌های وارون با میانگین‌پذیری زیرگروه‌های ماکسیمال نیم‌گروه‌های وارون مرتبط است. به نظر می‌رسد این یک شرط لازم است؛ اما مسلماً یک شرط کافی نیست (نیم‌گروه وارون آزاد روی دو مولد را در نظر بگیرید). در این مقاله، این مسئله را برای نیم‌گروه کلیفورد با نشان دادن اینکه یک نیم‌گروه کلیفورد برابر اجتماعی از گروه‌های میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر گروه‌وارهٔ جهانی آن میانگین‌پذیر باشد حل می‌کنیم. همچنین یک تناظر بین گروه‌های ایزوتروپ گروه‌وارهٔ جهانی و زیرگروه‌های ماکسیمال تصویر همریخت نیم‌گروه کلیفورد ارائه می‌دهیم. در بخش ۲ تعاریف و ویژگی‌های بنیادی نیم‌گروه‌های کلیفورد و گروه‌واره‌های جهانی را ارائه می‌دهیم و مفهوم میانگین‌پذیری این ساختارها را مرور می‌کنیم. بخش ۳ شامل نتایج بنیادی و اثبات‌های آنها است.

۲ مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۲. نیم‌گروه (گسسته) S را نیم‌گروه وارون می‌نامیم اگر برای هر $s \in S$ یک عضو منحصربه‌فرد مانند $s^* \in S$ موجود باشد، به‌طوری‌که

$$s\, s^*\, s = s \quad , \quad s^*\, ss^* = s^*.$$

نیم‌گروه وارون S را نیم‌گروه کلیفورد می‌نامیم هرگاه به‌صورت اجتماعی از گروه‌ها باشد.

فرض کنیم S یک نیم‌گروه وارون باشد و E مجموعهٔ متشکل از تمام عناصر خودتوان آن باشد، یعنی

$$\mathrm{E} = \mathrm{E(S)} :=\{\ \mathrm{e}{\in}\mathrm{S} : \mathrm{ee} = \mathrm{e}\ \}.$$

در این صورت S یک گروه است اگر و فقط اگر E تک‌عضوی باشد، همچنین S یک نیم‌گروه کلیفورد است اگر و فقط اگر E زیرمجموعهٔ مرکز S باشد. در این حالت، داریم $S = \bigcup_{e\in E} H(e)$ که در آن $H(e)$ یک زیرگروه ماکسیمال S با عنصر همانی e است. زیرنیم‌گروه A از E را فیلتر می‌نامیم هرگاه برای $a \in A\ ,\ b \in E$ رابطهٔ $a{\leq}b$ نتیجه بدهد $b{\in}A$.

تعریف ۲.۲. مجموعهٔ ناتهی G به‌همراه یک زیرمجموعهٔ $G^{(۲)}$ از $G \times G$ و یک نگاشت ضرب $(x,y) \longmapsto xy$ از $G^{(۲)}$ به G و یک نگاشت وارون $x \longmapsto x^{-۱}$ از G به روی G را یک گروه‌واره می‌گوییم هرگاه برای هر $x, y, z \in G$ داشته باشیم:

۱. $(x^{-۱})^{-۱} = x$،

۲. اگر $(x,y), (y,z) \in G^{(۲)}$، آنگاه $(xy,z), (x,yz) \in G^{(۲)}$ و $(xy)z = x(yz)$.

۳. $(x, x^{-۱})\ ,\ (x^{-۱}, x) \in G^{(۲)}$.

۴. اگر $(x,y) \in G^{(۲)}$، آنگاه $x^{-۱}\ (xy) = y = (yx)\ x^{-۱}$.

برای گروه‌وارهٔ G، نگاشت‌های d و r را به‌ترتیب دامنه و برد می‌نامیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d : G \to G;\ d(x) = x^{-۱}\, x \quad , \quad r : G \to G;\ r(x) = xx^{-۱}\ .$$

مجموعهٔ $G^{(\circ)} := d(G) = r(G)$ را فضای یکهٔ G می‌گوییم و برای هر $u, v \in G^{(\circ)}$ نیز داریم:

$$G^u := r^{-۱}(\{u\}) \quad , \quad G_v := d^{-۱}(\{v\}) \quad , \quad G^u_v :=\ G^u \cap\ G_v.$$

همچنین G^u_u یک گروه است که آن را گروه ایزوتروپی می‌نامند. گروه‌وارهٔ توپولوژیک عبارت است از یک گروه‌وارهٔ مجهز به یک توپولوژی که نگاشت‌های ضرب و وارون پیوسته باشند. خانوادهٔ $\{\lambda^u\}_{u\in G^{(\circ)}}$ از اندازه‌های منظم بورل مثبت روی گروه‌وارهٔ توپولوژیک G را دستگاه هار چپ می‌نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(الف) برای هر $u \in G^{(\circ)}$ داشته باشیم $supp(\lambda^u) \subseteq G^u$،

(ب) برای هر $f \in C_c(G)$ نگاشت $u \mapsto \int f d\lambda^u$ روی $G^{(\circ)}$ پیوسته باشد،

(پ) برای هر $x \in G$ و $f \in C_c(G)$ داشته باشیم:

$$\int f(xy)d\lambda^{d(x)}(y) = \int f(y)d\lambda^{r(x)}(y).$$

یک گروه‌وارهٔ فشردهٔ موضعی عبارت است از یک گروه‌وارهٔ توپولوژیک که در شرایط زیر صدق کند:

(۵) با توپولوژی القایی $G^{(\circ)}$ فشردهٔ موضعی و هاوسدورف باشد،

(۶) خانوادهٔ شمارایی مانند $\complement$ متشکل از زیرمجموعه‌های هاوسدورف فشردهٔ G، موجود باشد به‌طوری‌که مجموعهٔ درون آنها، یک پایهٔ توپولوژی برای G باشد ($B = \{intA : A \in \complement\}$)،

(۷) هر G^u یک زیرفضای هاوسدورف فشردهٔ موضعی از G باشد،

(۸) G مجهز به یک دستگاه هار مانند $\{\lambda^u\}$ باشد.

فرض کنیم G یک گروه‌وارهٔ فشردهٔ موضعی باشد. در این صورت، خانوادهٔ تمام زیرمجموعه‌های باز و هاوسدورف آن را که نگاشت‌های دامنه و برد روی آنها همان‌سانی باشند را با G^{op} نمایش می‌دهیم. گروه‌وارهٔ G را $r-$گسسته می‌گوییم هرگاه G^{op} یک پایه برای توپولوژی G باشد.

فرض کنیم S یک نیم‌گروه گسسته باشد. در این صورت، مجموعهٔ تمام توابع مختلط روی آن که در شرط $\sum_{s \in S} |f(s)| < \infty$ صدق می‌کنند را با $l^{1}(S)$ و مجموعهٔ تمام توابع مختلط روی آن که در شرط $sup_{s \in S}|f(s)| < \infty$ صدق می‌کنند را با $l^{\infty}(S)$ نمایش می‌دهیم، آنها به‌ترتیب با نرم‌های $||f||_1 := \sum_{s \in S} |f(s)|$ و $||f||_{\infty} := sup_{s \in S}|f(s)|$ یک فضای باناخ هستند و به‌ترتیب تحت ضرب پیچشی و ضرب نقطه‌ای، جبر باناخ هستند. با ایزومتری $T(f)(g) = \sum_{s \in S} f(s)g(s)$ داریم:

$$l^{\infty}(S) \cong (l^{1}(S))^*.$$

برای تابع مختلط f روی S، انتقال چپ توسط $s \in S$ را به‌صورت $L_s(f)(t) = f(st)$ تعریف می‌کنیم، که در آن $t \in S$، انتقال راست نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود. یک میانگین μ روی $l^{\infty}(S)$ عنصری از $(l^{\infty}(S))^*$ هست به‌طوری‌که برای هر تابع حقیقی $f \in l^{\infty}(S)$ داریم:

$$inf_s(f(s)) \leq \mu(f) \leq sup_s(f(s)).$$

میانگین μ را پایای چپ می‌نامیم هرگاه برای هر $s \in S$ و $f \in l^{\infty}(S)$ داشته باشیم:

$$\mu(L_s f) = \mu(f).$$

میانگین پایای راست نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود. هر میانگین روی $l^{\infty}(S)$ مانند μ مثبت است و در دو شرط $|\mu| = 1$, $\mu(1) = 1$ صدق می‌کند، همچنین برای هر $f \in l^{\infty}(S)$ داریم:

$$\mu(Re(f)) = Re(\mu(f)) \quad , \quad \mu(Im(f)) = Im(\mu(f))$$

به‌علاوه $\mu(f)$ در پوستهٔ محدب بستهٔ از $f(S)$ قرار دارد.

فرض کنیم S یک نیم‌گروه و $\vartheta \in l^{1}(S)$. در این صورت ϑ را یک میانگین شمارا روی S می‌نامیم هرگاه برای هر s داشته باشیم $\vartheta(s) \geq 0$ و $|\vartheta| = \sum_{s\in S} \vartheta(s) = 1$. همچنین آن را یک میانگین متناهی روی S می‌نامیم هرگاه مجموعهٔ $\{s \in S : \vartheta(s) > 0\}$ متناهی باشد. مجموعهٔ میانگین‌های متناهی (-نرم) در مجموعهٔ میانگین‌های شمارا چگال است. به‌علاوه، مجموعهٔ میانگین‌های متناهی (w^*-) در مجموعهٔ تمام میانگین‌ها روی $l^{\infty}(S)$ چگال است.

تعریف ۳.۲. نیم‌گروه S را میانگین‌پذیر چپ می‌نامیم هرگاه یک میانگین پایای چپ موجود باشد. میانگین‌پذیر راست به‌طور مشابه تعریف می‌شود. نیم‌گروه S را میانگین‌پذیر می‌نامیم هرگاه، میانگین‌پذیر چپ و میانگین‌پذیر راست باشد.

اگر S یک نیم‌گروه میانگین‌پذیر باشد و $\varphi : S \to S'$ یک همریختی نیم‌گروه‌ها باشد، آنگاه $\varphi(S)$ نیز میانگین‌پذیر است.

قضیه ۴.۲. [۲] نیم‌گروه S میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر دنباله‌ای مانند $\{g_n\}$ از میانگین‌های متناهی موجود باشد که برای هر $t \in S$ داشته باشیم $lim_n(L_t g_n - g_n) = \circ = lim_n(R_t g_n - g_n)$ در توپولوژی ضعیف (یا توپولوژی نرم) از $l^{\backslash}(S)$.

فرض کنیم S یک نیم‌گروه وارون باشد رابطهٔ هم‌ارزی σ_S طوری تعریف شده است که برای $s, t \in S$ داریم $s\,\sigma_S\,t$ هرگاه عنصر خودتوانی مانند $e \in E(S)$ موجود باشد که $es = et$، در این صورت $G_S := S/\sigma_S$ یک گروه است. این گروه ماکسیمالی است که از تصویر همریختی S به دست می‌آید.

از [۵] یادآوری می‌کنیم که S میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر G_S میانگین‌پذیر باشد. در خاتمهٔ این بخش، معیارهایی را برای میانگین‌پذیری گروه‌وارهٔ شمارای دوم $r-$گسسته یادآوری می‌کنیم.

قضیه ۵.۲. [۳] فرض کنیم G یک گروه‌وارهٔ شمارای دوم $r-$گسسته باشد. در این صورت، گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱. دنباله‌ای از توابع بورل روی G مانند $\{\varphi_n\}$ موجود است که
(الف) تابع $u \mapsto \sum_{r(x)=u} |\varphi_n(x)|$ کران‌دار است،
(ب) برای هر $u \in G_\circ$ و $n \in \mathbb{N}$ داریم $\sum_{r(x)=u} |\varphi_n(x)| = ۱$،
(ج) برای هر $y \in G$ دنبالهٔ $\sum_{r(x)=r(y)} |\varphi_n(y^{-۱}x) - \varphi_n(x)|$ همگرا به صفر است.

۲. دنباله‌ای از توابع بورل روی G مانند $\{\psi_n\}$ موجود است که
(الف) تابع $u \mapsto \sum_{d(x)=u} |\psi_n(x)|$ کران‌دار است،
(ب) برای هر $u \in G_\circ$ و $n \in \mathbb{N}$ داریم $\sum_{d(x)=u} |\psi_n(x)| = ۱$،
(ج) برای هر $y \in G$ دنبالهٔ $\sum_{d(x)=d(y)} |\psi_n(xy^{-۱}) - \psi_n(x)|$ همگرا به صفر است.

گروه‌وارهٔ شمارای دوم $r-$گسسته G را میانگین‌پذیر می‌نامیم اگر در هرکدام از شرایط فوق صدق کند.

۳ گروه‌وارهٔ جهانی نیم‌گروه کلیفورد

در این بخش، S یک نیم‌گروه کلیفورد با مجموعهٔ خودتوان $E{=}E(S)$ است. مجموعهٔ

$$X = \{x \mid x = \chi_{\mathrm{A}} : E \to \{\circ, ۱\}\}$$

که در آن χ_{A} یک همریختی ناصفر برای فیلتری چون A با توپولوژی همگرایی نقطه‌ای است را در نظر می‌گیریم. برای $e{\in}E$ و $A_e = \{f \in E : e \leq f\}$ از نماد $\overline{e} = \chi_{A_e}$ و $\overline{E} = \{\overline{e} : e \in E\}$ استفاده می‌کنیم که زیرمجموعهٔ چگالی در X است [۵]. فرض کنیم $e_۱, e_۲, \ldots, e_n \in E$، $x \in X$ و برای $m \leq n$، داشته باشیم $x(e_i) = \circ$ برای $i = ۱, ۲, \ldots, m$ و $x(e_{m+۱} \ldots e_n) = ۱$ قرار می‌دهیم $e = e_{m+۱} \ldots e_n$، در این صورت، یک عضو پایهٔ توپولوژی X به‌شکل زیر است:

$$\begin{aligned} D_{e,e_۱,e_۲,\ldots,e_m} &= \{x \in X : x(e) = ۱,\ x(e_i) = \circ \quad (i = ۱, ۲, \ldots, m)\} \\ &= \{\chi_A : e \in A,\ e_i \notin A\}. \end{aligned}$$

اگر $D_e = \{x : x(e) = ۱\}$، آنگاه $D_{e,e_۱,e_۲,\ldots,e_m} = D_e \cap D^c_{e_۱} D^c_{e_۲} \cap \cdots \cap D^c_{e_m}$ و $\overline{e} \in D_{e,e_۱,e_۲,\ldots,e_m}$.
سپس ملاحظه می‌کنیم که در حالت کلی یک عمل راست از S روی X وجود دارد. قرار می‌دهیم $D_s = D_{ss^*}$. چون S یک نیم‌گروه کلیفورد است و $ss^*, s^*s \in E$ پس با هر عضو S جابه‌جا می‌شود

$$\begin{aligned} s^*s &= (s^*ss^*)\,s = (s^*[ss^*])\,s \\ &= ([ss^*]\,s^*)\,s = ss^*s^*s \\ &= s\,(s^*[s^*s]) = s\,([s^*s]\,s^*) \\ &= s\,(s^*ss^*) = ss^* \end{aligned}$$

و $D_s = D_{s^*}$ یک زیرمجموعهٔ باز فشرده از X است. خانوادهٔ $\{D_e \ : e \in E\} \cup \{ D_e^c : e \in E\}$ یک زیرپایه برای توپولوژی X است. فرض کنیم $x.s(e) := x(ses^*)$ و عمل

$$\beta \ : S \ \to \ I(X)$$

$$\beta\,(s) \ : D_e \mapsto \ R_s = D_{s^*} = D_s$$

$$\beta(s)(x) = x.s$$

را در نظر می‌گیریم. در این صورت β یک پادهمومورفیسم است و هر $\beta(\mathrm{s})$ یک همریختی است. در واقع، نگاشت β به هر عضو s از نیم‌گروه، یک همریختی نسبت می‌دهد که عملکرد آن همریختی در ارتباط با s است؛ یعنی هر عضو X را s برابر می‌کند.

اکنون قرار می‌دهیم:

$$\Sigma = \{(x,s) \ : x \in D_s \ , \ s \in S\ \}$$

مجموعهٔ β زوج‌های ترکیب‌پذیر Σ یعنی $\Sigma^{(۲)}$، از زوج‌هایی چون $((x,s),(y,t))$ تشکیل می‌شود که برای آنها $y = x.s$. برای تعریف گروه‌وارهٔ جهانی، یک رابطهٔ هم‌ارزی ρ روی Σ در نظر می‌گیریم. $(x,s)\ \rho\ (y,t)$ اگر و فقط اگر $x = y$ و یک $e \in E$ چنان موجود باشد که $e \leq ss^*tt^*,\ es = et$ و $x \in D_e$.

خانوادهٔ کلاس‌های هم‌ارزی $G = \Sigma/\rho = \{\ [x,s] \ \ : \ \ s \in S,\ x \in D_s\}$ یک گروه‌واره با اعمال زیر است:

$$[x,s]\,[\,x.s,t] = [x,st]\,,\ [x,s]^{-۱} \ = [x.s,s^*\,]$$

و

$$r\,([x,s]) = [\,x,ss^*]\ \ ,\ d([x,s]) = x.s,s^*s\,].$$

همچنین برای نمایش $G^{(\circ)} \ = \ \{\ [x,e\,] : \mathrm{e}{\in}\mathrm{E}\ ,\ \mathrm{x}\ \in \mathrm{X}\ \}$، می‌توانیم از تساوی $x \ \ = \ \ [x,e]$ استفاده کنیم، چون دلیل تساوی وجود رابطهٔ هم‌ارزی بین آنهاست یعنی برای هر $x \in D_{e_۱e_۲}$ با $e_۱,e_۲ \in E$ داریم $(x,e_۱)\ \rho(x,e_۲)$. بنابراین می‌توانیم قرار بدهیم $G^{(\circ)} \ = X$.

لم ۱.۳. با نمادگذاری‌های فوق، برای هر $x \in D_s$ و $s \in S$، داریم $x.s = x$.

اثبات. یادآوری می‌کنیم که x و $x.s$ همریختی‌هایی ناصفر روی E هستند (زیرا برای $ss^* \in E$ داریم $x(ss^*) = ۱$ و $x.s\,(ss^*\ ) = ۱$). از طرفی برای هر $e \in E$ داریم $x(e) \ = \ x.s(e)$ (چون اگر $e \ \leq \ ss^*$، آنگاه $e = ess^* \ = \ ses^*$ بنابراین $x.s\ (e) = x(ses^*) = x(e)$). اکنون فرض کنیم $e \in E$ یک عضو دلخواه باشد. چون $ess^* \ \ \leq \ \ ss^*$ بنابر حالت اول داریم، $x.s(ess^*) = \ x(ess^*)$، بنابراین

$$\begin{aligned} x.s(e) &= x.s(e)۱ = x.s(e)x.s(ss^*) \\ &= x.s(ess^*) = x(ess^*) \\ &= x(e)x(ss^*) = x(e)۱ \\ &= x(e), \end{aligned}$$

که برهان را کامل می‌کند. $\square$

به‌خصوص، برای نیم‌گروه‌های کلیفورد، $\beta(s)\ (x) = x$ و $r\ [x,s] = d\ [x,s]$ و برای هر $x \in X,\ s \in S$، داریم $G^x = G_x$. بنابراین $G \ = \cup_{x \in X} H_x$ یک کلاف گروهی با گروه‌های ایزومتری

$$H_x := G_x^x = \{[x,s] : s \in S\ ,\ x \leq ss^*\}$$

است. در اینجا $[x,s]$ مجموعهٔ تمام زوج‌های $(x,t\ )$ است که برای آنها یک $e \in E$ وجود دارد که $x(e) = ۱$، $e \leq ss^*\ tt^*$ و $et = es$.

قضیه ۲.۳. فرض کنیم S یک نیم‌گروه کلیفورد باشد و G_S و $G = G(X,S)$ به‌ترتیب تصویر همریخت گروه ماکسیمال و گروه‌وارهٔ جهانی آن باشد. در این صورت G اجتماع گروه‌های ایزوتروپی‌اش است که می‌تواند با زیرگروه‌های G_S یکی گرفته شود.

اثبات. قبلاً مشاهده کردیم که $G = \cup_{x\in X} H_x$. برای هر $x \in X$، نگاشت $\phi_x : H_x \to G_S$ را با ضابطهٔ $\phi_x([\,x\,,s\,]) = [s]$ تعریف می‌کنیم. این نگاشت خوش‌تعریف است، زیرا اگر $[x,s] = [x,t]$، آنگاه $e \in E$ چنان موجود است که $es = et$ و بنابراین $[t] = [s]$ در G_S است. همچنین داریم

$$\phi_x([x,s\,]\,[x,t\,]) = \phi_x\,([x,st\,]) = [st] = [s][t] = \phi_x\,([x,s\,])\,\phi_x\,([x,t\,]).$$

(در حالت کلی نگاشت ϕ_x یک‌به‌یک و پوشا نیست.) □

لم ۳.۳. برای هر $e \in E$، کلاس هم‌ارزی $[e]$ یک زیرنیم‌گروه از S است که شامل E است.

اثبات. اگر $f \in E$، آنگاه $(fe)\,f = (fe)\,e$ و $fe \in E$ پس $E \subseteq [e]$. همچنین اگر $s\,,\,t \in [e]$، آنگاه $f\,,g \in E$ وجود دارند که $gt = ge$ و $fs = fe$. چون $E \subseteq Z(S)$ و $(fg)\,st = (fs)\,(gt) = (fe)(ge) = (fg)e$ پس $st \in [e]$. □

قضیه ۴.۳. فرض کنیم S یک نیم‌گروه کلیفورد میانگین‌پذیر باشد و $S = \cup_{e\in E} H_e$. در این صورت برای هر $e_\circ \in E$ نیم‌گروه $T = \cup_{e\le e_\circ} H_e$ یک زیرنیم‌گروه کلیفورد میانگین‌پذیر از S است. همچنین داریم $H_e\,H_f \subseteq H_{ef}$ و $H_eH_{e_\circ} = H_e$.

اثبات. مجموعهٔ $T = \cup_{e\le e_\circ} H_e = \{\,s : \; ss^* \le e_\circ\}$ یک زیرنیم‌گروه از S است زیرا $s_۱s_۱{}^* \le e_\circ$ و $s_۲s_۲{}^* \le e_\circ$ نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}(s_۱s_۲)\,(s_۱s_۲)^*e_\circ &= s_۱(s_۲s_۲{}^*)\,s_۱{}^*\,e_\circ\\ &= s_۱s_۱^*(s_۲s_۲{}^*)e_\circ\\ &= s_۱s_۱^*(s_۲s_۲{}^*)\\ &= s_۱(s_۲s_۲{}^*)s_۱{}^*\\ &= (s_۱s_۲)\,(s_۱s_۲)^*\end{aligned}$$

پس $(s_۱s_۲)\,(s_۱s_۲)^* \le e_\circ$ یعنی $s_۱s_۲ \in T$ و از طرفی $s_۱{}^*(s_۱{}^*)^* = s_۱{}^*s_۱ = s_۱s_۱{}^* \le e_\circ$ پس $s_۱{}^* \in T$. با توجه به این که تصویر همریخت گروه ماکسیمال G_T با $A = \{\,[s] \in G_S : \; ss^* \le e_\circ\,\}$ یک‌ریخت است که یک زیرگروه از گروه میانگین‌پذیر G_S با همانی $[e_\circ]$ است، هر کلاس هم‌ارزی در A شامل عضوی از T است. نگاشت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\varphi : A \to G_T\,,\quad \varphi([s]) = [e_\circ s].$$

این نگاشت خوش‌تعریف است؛ زیرا اگر $[s_۲] = [s_۱]$، آنگاه برای یک $f \in E(S)$، داریم $fs_۱ = fs_۲$. بنابراین $e_\circ fs_۱ = e_\circ fs_۲$ و $f\,e_\circ s_۱ = fe_\circ s_۲$ لذا $[e_\circ s_۱] = [e_\circ s_۲]$. همچنین داریم:

$$\varphi([st]) = [e_\circ st] = [e_\circ se_\circ t] = [e_\circ s][e_\circ t] = \varphi([s])\varphi([t])$$

و اگر $[e_\circ t] = [e_\circ s]$، آنگاه $f \in E(S)$ وجود دارد به‌طوری‌که $fe_\circ s = fe_\circ t$ پس $[t] = [s]$، بنابراین φ یک‌ریختی است. اگر S میانگین‌پذیر باشد، آنگاه G_S و زیرگروه آن یعنی A نیز چنین است؛ بنابراین G_T میانگین‌پذیر است و لذا T نیز چنین است. □

قضیه ۵.۳. فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد و $S = \cup_{e\in E}\, H_e$. در این صورت، برای هر $e \in E$، داریم $H_e \cong H_{\overline{e}}$.

اثبات. جهت یادآوری $H_{\overline{e}} = \{\,[\overline{e},s] \;:\; \overline{e} \le s \quad \overline{e}(ss^*) = ۱\}$ و داریم:

$$[\overline{e},s]\,[\overline{e},t] = [\overline{e},st]\,,\; [\overline{e},e] = ۱,\;\; [\overline{e},s]^{-۱} = [\overline{e},s^*].$$

نگاشت زیر را در نظر می‌گیریم

$$\eta \;:\; H_e \to H_{\overline{e}},\;\; \eta(s) = [\overline{e},s].$$

برای اثبات خوش‌تعریفی آن، فرض کنیم $s,t \in H_e$ و $s=t$ در این صورت $es=et$ ، $ss^*tt^*=e$ و $\overline{e}(e)=۱$ بنابراین $[\overline{e},s]=[\overline{e},t]$ لذا $\eta(s)=\eta(t)$.

برای اثبات یک‌به‌یک بودن آن، فرض کنیم $\eta(s)=\eta(t)$، در این صورت $[\overline{e},s]=[\overline{e},t]$ پس یک $f\in E(S)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\overline{e}\,(f)=۱$ و $fs=ft$ بنابراین $ef=e$. از طرفی $s,t\in H_e$ پس داریم:

$$s=es=(ef)s=e(fs)=e(ft)=(ef)t=et=t.$$

برای اثبات پوشایی آن، فرض کنیم $[\overline{e},s]\in H_{\overline{e}}$، در این صورت $\overline{e}(ss^*)=۱$ پس $e\leq ss^*$ یا $ess^*=e$، یعنی $es(es)^*=e$ یا $es\in H_e$ و $\eta(es)=[\overline{e},es]=[\overline{e},s]$. همریختی η نیز واضح است. □

لم ۶.۳. فرض کنیم G یک گروهوارهٔ $r-$گسسته باشد. در این صورت، هر $r-$فیبر G^u گسسته و شماراست.

اثبات. اگر $y\in G^u$، آنگاه یک مجموعهٔ باز شامل y از G^{op} مانند U موجود است که چون r یک‌به‌یک است، پس داریم $U\cap G^u=\{y\}$. ازآنجایی‌که G^u در اصل دوم شمارایی صدق می‌کند و گسسته نیز هست، نتیجه می‌گیریم که G^u شماراست. □

لم ۷.۳. فرض کنیم $S=\cup_{e\in E}H_e$ یک نیم‌گروه کلیفورد باشد و برای هر $e\in E$ گروه H_e میانگین‌پذیر باشد، در این صورت دنباله‌ای از توابع روی زیرگروهوارهٔ $G(\overline{E},S)=\cup_{e\in E}H_{\overline{e}}$ مانند $\{\varphi_n\}$ وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(الف) تابع $\overline{e}\ \to\sum_{y\in H_{\overline{e}}}|\varphi_n\,(y)\,|$ کران‌دار است،

(ب) برای هر $e\ \in\ E$ و $n\in\mathbb{N}$ داریم $\sum_{y\in H_{\overline{e}}}\varphi_n\,(y)\ =۱$،

(ج) برای هر $y\ \in\ G(\overline{E},S)$ دنبالهٔ $\sum_{r(x)=r(y)}|\varphi_n\,(y^{-۱}x)-\varphi_n\,(x)\,|$ همگرا به صفر است.

اثبات. به دلیل میانگین‌پذیری H_e دنباله‌ای از میانگین‌های متناهی، قضیه ۴.۲، مانند $\{g_n^e\}$ موجود است، به‌علاوه داریم $g_n^e\in\ l^۱(H_e)$، $g_n^e(h)\ \geq ۰$، $|\,g_n^e|=\ \sum_{h\in H_e}g_n^e(h)=۱$ و مجموعهٔ $\{\,h\in H_e\ :\ g_n^e(h)>۰\,\}$ متناهی است. برای $n\in\mathbb{N}$ تابع φ_n^e را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\varphi_n^e\ :\ H_{\overline{e}}\ \to\ [۰,\ +\infty],\quad \varphi_n^e\ \left(\,[\overline{e},s]\,\right):=\ g_n^e\,(es)\,.$$

جهت خوش‌تعریفی آن، فرض کنیم $[\overline{e}\,,s]\ =[\overline{e}\,,t]$ در این صورت عضوی مانند $f\ \in E$ وجود دارد به‌طوری‌که $\overline{e}(f)\ =۱$ و $fs=ft$، حال چون $e\leq\ f$ پس $es=et$.

اکنون φ_n را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\varphi_n\ :\ \bigcup_{e\in E}H_{\overline{e}}\to[۰,+\infty\,],\quad \varphi_n(y)\ =\varphi_n^e(y)\quad(y\ \in\ H_{\overline{e}}).$$

توجه کنیم که به دلیل جدا از هم بودن گروه‌های $H_{\overline{e}}$، برای هر $y\ \in\ \bigcup_{e\in E}\ H_{\overline{e}}$ یک $e\ \in\ E$ منحصربه‌فردی موجود است که $y\ \in\ H_{\overline{e}}$. اکنون باید شرایط لازم را برای $\{\varphi_n\}$ بررسی کنیم

$$\sum_{[\overline{e},s]\in H_{\overline{e}}}\varphi_n([\overline{e},s]=\sum_{[\overline{e},s]\in H_{\overline{e}}}\varphi_n^e([\overline{e},s]=\sum_{es\in H_e}g_n^e(es)=\sum_{h\in H_e}g_n^e\,(h)=۱.$$

اگر $y\ \in H_{\overline{e}}$، آنگاه $t\in S$ موجود است که $y=[\overline{e},t]$ و $[\overline{e},\ t^{-۱}\,]\ =y^{-۱}$.

اگر $r(x)=r(y)$، آنگاه $x\in H_{\overline{e}}$ و یک $s\in S$ موجود است که $x=[\overline{e},s]$ و داریم

$$\begin{aligned}\sum_{x\in H_{\overline{e}}}|\varphi_n\,(y^{-۱}x)-\varphi_n(x)| &= \sum_{[\overline{e},s]\in H_{\overline{e}}}|\varphi_n([\overline{e},t^{-۱}][\overline{e},s]-\varphi_n([\overline{e},s])| \\ &= \sum_{[\overline{e},s]\in H_{\overline{e}}}|\varphi_n(\left[\overline{e},t^{-۱}s\right]-\varphi_n([\overline{e},s])| \\ &= \sum_{e\leq ss^*}|g_n^e(et^{-۱}s)-g_n^e(es)| \\ &= |\,|tg_n^e-g_n^e|\,|\to ۰.\end{aligned}$$

□

برای اثبات نتیجهٔ بعدی لازم به ذکر است که چون $G = G(X, S)$ در اصل دوم شمارایی صدق می‌کند پس $X = G^{(\circ)}$ نیز شمارای دوم است و زیرمجموعهٔ شمارایی از E مانند $E_\circ$ موجود است به‌طوری‌که $\overline{E}_\circ := \{\overline{e} : e \in E_\circ\}$ در X چگال است.

دو قضیهٔ زیر در لم ۶.۳ از [۴] به روش دیگری اثبات شده‌اند.

قضیه ۸.۳. فرض کنیم $S = \bigcup_{e\in E} H_e$ یک نیم‌گروه کلیفورد باشد به‌طوری‌که برای هر $e \in E$ گروه H_e میانگین‌پذیر باشد، در این صورت $G = G(X, S)$ میانگین‌پذیر است.

اثبات. فرض کنیم $\overline{E}_\circ = \{\overline{e}_۱ , \overline{e}_۲ , \overline{e}_۳ , \ldots\}$ یک زیرمجموعهٔ شمارای چگال در X باشد. بنابر لم ۷.۳، دنباله‌ای مانند $\{\varphi_n\}$ در $G(E_\circ, S) = \bigcup_{i=۱}^{\infty} H_{\overline{e}}$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $[\overline{e}_i , s] \in H_{\overline{e}_i}$ داریم $\varphi_n([\overline{e}_i , s]) = \circ$ مگر به‌جز تعداد متناهی از $[\overline{e}_i , s]$ها.

اکنون $n \in \mathbb{N}$ را ثابت در نظر می‌گیریم، چون برای هر $i \in \mathbb{N}$، $H_{\overline{e}_i}$ گسسته است بنابراین $\bigcup_{i=۱}^{\infty} H_{\overline{e}_i}$ نیز گسسته است. می‌خواهیم φ_n را به یک تابع بورل $\Phi_n : G \to [\circ, ۱]$ توسیع دهیم به‌طوری‌که در شرایط قضیه ۲.۳ صدق کند. برای هر $i \in \mathbb{N}$ فرض قرار می‌دهیم $A_i = \{m \in \mathbb{N} : m < i , e_m < e_i\}$ و زیرمجموعه‌های باز فشرده هاوسدورف زیر را از X اختیار می‌کنیم

$$U_i = D_{e_i, e_{i_۱}, e_{i_۲}, \ldots, e_{i_k}} = \{x \in X : x(e_i) = ۱ , x(e_{i_۱}) = x(e_{i_۲}) = \ldots = x(e_{i_k}) = \circ\}$$

که در آن $A_i = \{i_۱, i_۲, \ldots, i_۳\}$، به‌وضوح $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ یک پوشش برای $\overline{E}_\circ$ است. چون هر U_i فشرده است و $\overline{E}_\circ$ در X چگال است، بنابراین $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ برای X نیز پوشش خواهد بود.

با توجه به $\overline{e}_i \in U_i$ و $U_i \nsubseteq U_j$ (برای $i < j$)، V_iها را به‌شکل زیر اختیار می‌کنیم

$$V_i = \bigcup_{[\overline{e}_i, s]\in H_{\overline{e}_i}} D(U_i, s)$$

در ضمن V_i مشابه U_i است و $H_{\overline{e}_i} \subseteq V_i$. برای هر $x \in X$ یک $i \in \mathbb{N}$ موجود است که $x \in U_i$، اکنون یک دنبالهٔ نزولی مانند $\{e_j\}$ انتخاب می‌کنیم که $\{\overline{e}_j\}$ به x همگرا باشد. فرض کنیم

$$\Phi_n([x, s]) := limsup_j \varphi_n([\overline{e}_j , s])$$

چون $۱ \leq \varphi_n([\overline{e}_j , s]) \leq \circ$، $\Phi_n([x, s]) \in [\circ, ۱]$ اگر $\overline{e}_j \longrightarrow x$ و $\overline{f}_j \longrightarrow x$ با شرط صعودی بودن یعنی $\overline{e}_i \leq \overline{e}_{i+۱}$ و $\overline{f}_i \leq \overline{f}_{i+۱}$ آنگاه داریم

$$limsup_j \varphi_n([\overline{e}_j , s]) = limsup_j \varphi_n([\overline{f}_j , s]).$$

(اگر چنین نباشد $b \in \mathbb{R}$ را بین دو تا حد اختیار می‌کنیم که داریم $\varphi_n^{-۱}((-\infty, b)) \cap \varphi_n^{-۱}((b, +\infty)) = \emptyset$ این نیز غیرممکن است زیرا $V_i \cap \varphi_n^{-۱}((-\infty, b))$ و $V_i \cap \varphi_n^{-۱}((b, +\infty))$ مجموعه‌های باز در $\bigcup_{i=۱}^{\infty} H_{\overline{e}_i}$ هستند که برای j های بزرگ شامل $[\overline{e}_j , s]$ و $[\overline{f}_j , s]$ هستند.)

جهت بورل بودن تابع Φ، برای هر $\alpha \in [\circ, ۱]$ داریم

$$\Phi_n^{-۱}((\alpha, +\infty)) = \bigcap_{k=۱}^{\infty} \overline{\left(\varphi_n^{-۱}\left(\left(\alpha - \frac{۱}{k}, +\infty\right)\right)\right)}$$

و برای بعضی از $\overline{e}_i$ داریم $\frac{۱}{۲}\Phi_n([x, s]) < \Phi_n([\overline{e}_i, s]) \leq \Phi_n([x, s])$ بنابراین Φ_n روی H_x، به‌جز تعداد متناهی از نقاط، صفر است. اگر برای $j = ۱, ۲, \ldots, m$ داشته باشیم $\Phi_n([x, s_j]) \neq \circ$، آنگاه برای هر $\varepsilon > \circ$ یک $i \in \mathbb{N}$ موجود است که

$$\Phi_n([\overline{e}_i, s_j]) \leq \Phi_n([x, s_j]) < \Phi_n([\overline{e}_i, s_j]) + \frac{\varepsilon}{m}$$

پس داریم:

$$۱ \leq \sum_{j=۱}^{\infty} \Phi_n([x, s_j]) < ۱ + \varepsilon$$

بنابراین

$$\sum_{j=۱}^{\infty} \Phi_n([x, s_j]) = ۱.$$

در نهایت برای بعضی از $i \in \mathbb{N}$ داریم

$$\Phi_n\left([\overline{e}_i, t^{-۱}s]\right) \leq \Phi_n([x, t^{-۱}s]) < \Phi_n([\overline{e}_i, t^{-۱}s]) + \frac{\varepsilon}{۴m}$$

و داریم

$$\Phi_n\left([\overline{e}_i, s]\right) \leq \Phi_n([x, s]) < \Phi_n([\overline{e}_i, s]) + \frac{\varepsilon}{۴m}$$

بنابراین

$$\left|\sum_{[x,s]\in H_x} |\Phi_n\left([x, t^{-۱}s]\right) - \Phi_n\left([x, s]\right)\right| - \sum_{[\overline{e}_i,s]\in H_{\overline{e}_i}} |\Phi_n\left([\overline{e}_i, t^{-۱}s]\right) - \Phi_n\left([\overline{e}_i, s]\right)|| < \frac{\varepsilon}{۴}$$

به عبارت دیگر

$$|f_n(x) - f_n(\overline{e}_i)| < \frac{\varepsilon}{۴} \Longrightarrow f_n(x) = \sum_{[x,s]\in H_x} |\Phi_n\left([x, t^{-۱}s]\right) - \Phi_n\left([x, s]\right)|$$

همچنین برای $m \leq n$ داریم:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(\overline{e}_i)| + |f_n(\overline{e}_i) - f_n(\overline{e}_j)| \\ &+ |f_n(\overline{e}_j) - f_m(\overline{e}_j)| + |f_m(\overline{e}_j) - f_m(x)|. \end{aligned}$$

چون f_n روی $G(E_\circ, S) = \bigcup H_{\overline{e}_i}$ پیوسته است، دنبالهٔ $\{\overline{e}_i\}$ همگراست و $\{f_n(\overline{e}_i)\}_i$ دنبالهٔ کشی است؛ یعنی برای i, j خیلی بزرگ داریم $|f_n(\overline{e}_i) - f_n(\overline{e}_j)| < \frac{\varepsilon}{۴}$ از طرفی بنابر لم ۷.۳، برای هر $\overline{e}_i$ داریم $f_n(\overline{e}_i) \longrightarrow \circ$. بنابراین $\{f_n(\overline{e}_j)\}_n$ نیز دنبالهٔ کشی است؛ یعنی برای n, m خیلی بزرگ داریم $|f_n(\overline{e}_j) - f_m(\overline{e}_j)| < \frac{\varepsilon}{۴}$ پس خواهیم داشت $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ و این بدان معنی است که $\{f_n(x)\}$ یک دنبالهٔ کشی است، پس همگرا است.
چون برای هر $\overline{e}_j$ داریم $f_n(\overline{e}_i) \longrightarrow \circ$ بنابراین $f_n(x) \longrightarrow \circ$ در نتیجه وقتی $n \longrightarrow +\infty$ داریم:

$$\sum_{[x,s]\in H_x} |\Phi_n\left([x, t^{-۱}][x, s]\right) - \Phi_n\left([x, s]\right)| \longrightarrow \circ.$$

□

قضیه ۹.۳. فرض کنیم $S = \bigcup_{e\in E} H_e$ یک نیم‌گروه کلیفورد باشد که G گروه‌وارهٔ جهانی آن میانگین‌پذیر باشد، در این صورت هر گروه H_e میانگین‌پذیر است.

اثبات. دنبالهٔ $\{\Phi_n\}$ مطرح‌شده در قضیهٔ قبل را در نظر گرفته و $e \in E$ را ثابت اختیار می‌کنیم، حال تابع زیر را تعریف می‌کنیم

$$g_n : H_e \longrightarrow [\circ, +\infty]; \; g_n(h) = |\Phi_n([\overline{e}_i, h])|, \quad (h \in H_e).$$

برای هر $[\overline{e}, s] \in H_{\overline{e}}$ یک $h \in H_e$ منحصربه‌فرد موجود است به‌طوری‌که $[\overline{e}, s] = [\overline{e}, h]$ و داشته باشیم

$$\sum_{h\in H_e} g_n(h) = \sum_{[\overline{e},s]\in H_{\overline{e}}} |\Phi_n([\overline{e}, s])| = ۱.$$

همچنین برای هر $t \in H_e$ داریم:

$$\begin{aligned} ||tg_n - g_n|| &= \sum_{[\overline{e},s]\in H_{\overline{e}}} \left| |\Phi_n\left([\overline{e}, t^{-۱}s]\right)| - |\Phi_n([\overline{e}, s])| \right| \\ &\leq \sum_{[\overline{e},s]\in H_{\overline{e}}} |\Phi_n\left([\overline{e}, t^{-۱}s]\right) - \Phi_n([\overline{e}, s])| \to \circ. \end{aligned}$$

□

در انتها، مثالی از یک نیم‌گروه کلیفورد میانگین‌پذیر می‌آوریم که یک زیرگروه ماکسیمال میانگین‌ناپذیر دارد؛ یعنی گروه‌وارهٔ جهانی آن میانگین‌ناپذیر است.

مثال ۱۰.۳. فرض کنیم $\mathbb{F}_۲$ گروه آزاد با دو مولد باشد، قرار می‌دهیم $S=\mathbb{F}_۲\cup\{۰\}$. در این صورت S یک نیم‌گروه کلیفورد میانگین‌پذیر است، زیرا میانگین

$$\mu\,:\,l^{\infty}(S)\longrightarrow\mathbb{C}\,,\qquad\mu(f)\,=f(۰)$$

پایا است، در این حالت داریم $E(S)\;=\{\,e_G\,,\,۰\,\}$ که به دلیل میانگین‌ناپذیر بودن $\mathbb{F}_۲$، گروه‌وارهٔ جهانی $G=\mathbb{F}_۲\cup\{۱\}$ نیز میانگین‌ناپذیر است.

References

[1] Berglund, J.F., Junghenn, D., & Milnes, P. (1989). Analysis on Semigroups, Function Spaces. *Wiley-Interscience and Canadian Mathematics Series of Monographs and Texts*, Vol. 10, *John Wiley, Sons*.

[2] Day, M.M. (1957). Amenable semigroups. *Illinois J. Math*, 1, 509–544. DOI: https://doi.org/10.1215/ijm/1255380675.

[3] Exel, R., & Starling, C. Amenable actions of inverse semigroup. *arXiv: 1411.2506v2 [math.OA]*. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1411.2506.

[4] Lalone, S.M., & Milan, D. (2017). Amenability and uniqueness for groupoids associated with inverse semigroups. *Semigroup Forum*, 95, 321–344. DOI: https://doi.org/10.1007/s00233-016-9839-0.

[5] Paterson, L.T. (1999). Groupoids, Inverse Semigroups, and their Operator Algebras. *Birkhaüser, New York*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1774-9.

[6] Renault, J. (1980). A groupoid approach to C^*-algebras. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 793, *Springer, Berlin*. DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0091072.

[7] Runde, V. (2002). Lectures on Amenability, Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1774, *Springer, Berlin*. DOI: https://doi.org/10.1007/b82937.

[8] Sakai, K. (1994). On inner amenability of Clifford semigroups. *Proc. Japan Acad, Ser. A Math. Sci*, 70, 123–127. DOI: https://doi.org/10.3792/pjaa.70.123.