Measure Algebras and Applications

On Rado's theorem and its related problems

Mahmoud Mohammadzadeh Jafarabadi[1] , **Mohammad Akbari Tootkaboni**[2]

1. Department of Mathematics, University of Guilan, Rasht, Guilan, Iran.
   Email: mohammadzadeh.j.m@gmail.com
2. Corresponding Author, Department of Mathematics, University of Guilan, Rasht, Guilan, Iran.
   Email: tootkaboni@guilan.ac.ir

Article Info	**ABSTRACT**

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 15 May 2023
Received in revised form:
10 August 2023
Accepted: 13 August 2023
Published Online:
30 September 2023

Keywords:
Rado's theorem,
Partition regular,
Ramsey theory,
Stone-Čech compactification,
Upper density

2020 Mathematics Subject Classification:
20F05, 05C05

In this paper, we state Rado's theorem, Ramsey families, and their connections with ergodic theory and combinatorial problems. We discuss the historical development of these concepts since their inception to how some problems in the fields of combinatorics and number theory were formulated and solved, particularly through the lens of dynamical systems. We also address some open questions in this field.

Cite this article: Mohammadzadeh Jafarabadi, M., & Akbari Tootkaboni, M. (2023). On Rado's theorem and its related problems. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 83–96. http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9445.1002

Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/MAA.2023.9445.1002

Extended Abstract

Introduction

In Ramsey theory, Schur's theorem holds significant importance [19]. The simplicity of the problem, as well as its connection with various areas of mathematics, increases its significance. This theorem states that in any finite partition of natural numbers, there exist $a, b \in \mathbb{N}$ such that one of the cells contains $\{a, b, a+b\}$, in the other words, this structure is monochromatic.

In [22], Van der Waerden proved that in any finite partition of natural numbers, one of the cells contains arbitrarily long arithmetic progressions. In the other words, for any $k \in \mathbb{N}$, there exist $a, b \in \mathbb{N}$ such that the structure $\{a, a+b, a+2b, \ldots, a+kb\}$ is monochromatic. This proof provided an answer to a long-standing open question.

The theorems of Schur and Van der Waerden encouraged researchers to study monochromatic linear patterns. In 1943, Rado classified all linear structures in the set of natural numbers, leading to significant results in this field, which we will elaborate on in the following sections. Erdös and Turán, after the proof of Van der Waerden's theorem, posed the question of whether every subset of natural numbers with a positive upper density contains an arbitrarily long arithmetic progression? This question was answered by Szemerédi in 1974, but in 1977, Furstenberg provided another solution to this problem using dynamical systems, leading to the creation of a theory known as Ergodic-Ramsey theory, [10]; [11].

The general idea behind Erdös and Turán's solution to the open problem is as follows: a subset E of natural numbers contains an arithmetic progression of length k, i.e., $\{a, a+d, \ldots, a+kd\} \subset E$, for some a, b in natural numbers if and only if $a \in E \cap (E-d) \cap \ldots \cap (E-kd)$. Furthermore, it shows that if E has positive upper density, then

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \bar{d}(E \cap (E-n) \cap \cdots \cap (E-kn)) > 0. \tag{0.1}$$

Thus, E contains an arithmetic sequence of length $k+1$.

To establish the relation (0.1), Furstenberg introduced the notion of a correspondence between a measure-preserving dynamical system and a set with upper density. To delve further into this process, we need to familiarize ourselves with certain concepts.

Assume that $(X, \mathcal{B}, \mu)$ is a probability space, where $\mathcal{B}$ is a σ-algebra on the set X and $\mu : \mathcal{B} \to [0, 1]$ is a countably additive probability measure. A measurable map $T : X \to X$ is measure preserving if for every $B \in \mathcal{B}$, we have $\mu(T^{-1}B) = \mu(B)$, where $T^{-1}B := \{x \in X : Tx \in B\}$. A quadruple $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, where $(X, \mathcal{B}, \mu)$ is a measure space and T is a measure-preserving map, is called a measure-preserving system. A system $(X, \mathcal{B}, \mu, \{T_g\}_{g\in G})$, where G is a commutative semigroup, $T_g : X \to X$ is a function, and $(X, \mathcal{B}, \mu)$ is a probability space, is called a dynamical system over G.

In general, for a given semigroup G and $\{T_g\}_{g\in G}$ on the probability space $(X, \mathcal{B}, \mu)$ (i.e., for every $g, h \in G, T_{gh} = T_g T_h$), together with measure-preserving maps, $(X, \mathcal{B}, \mu, \{T_g\}_{g\in G})$ is called a measure-preserving system or a G-measure-preserving system. Let E be a subset of natural numbers. For the additive semigroup $\mathbb{N}$, $\{m \in \mathbb{N} : n+m \in E\}$ denoted by $E-n$ for any $n \in \mathbb{N}$.

Furstenberg's Corresponding Principle establishes a profound connection between measure-preserving systems and sets of integers. For any subset E of the natural numbers, the theorem asserts the existence of a measure-preserving system $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ and a set $A \in \mathcal{B}$ such that the measure of A matches the upper asymptotic density of E. Furthermore, the theorem establishes an intriguing relationship between the combinatorial structure of E and the dynamics of the measure-preserving system. Specifically, for any sequence of integers $n_1, n_2, \cdots, n_k$, the density of the intersection of translated sets $E - n_1, E - n_2, \cdots, E - n_k$ is bounded from below by the measure of a corresponding intersection of translated sets in A. This powerful principle finds its applications through various versions in the realm of multiple recurrence theory.

Suppose that $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ is a measure-preserving system and $A \in \mathcal{B}$ such that $\mu(A) > 0$. Then, for each $k \in \mathbb{N}$,

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu(A \cap T^{-n}A \cap \cdots \cap T^{-kn}A) > 0.$$

This fact is a generalization of the Poincaré Recurrence Theorem, which states there exists $n \in \mathbb{N}$ such that

$$\mu(A \cap T^{-n}A) > 0.$$

A stronger version of that can be stated as follows:

Suppose that $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ is a measure-preserving system and $A \in \mathcal{B}$. Then, for every $\epsilon > 0$, the set below is a syndetic set:

$$\{n \in \mathbb{N} \ : \ \mu(A \cap T^{-n}A) > \mu^2(A) - \epsilon\}. \tag{0.2}$$

As a consequence of the aforementioned content, one can refer to a density version of Van der Waerden's theorem, which was formulated and proven by Szemerédi. He established that every subset of natural numbers with a positive upper density contains an arbitrarily long arithmetic progression [21]. Our ability to discern the monochromaticity of an equation is quite limited. For example, the following question has remained unresolved: Is it true that for every finite coloring of the natural numbers, there exist $a, b \in \mathbb{N}$ such that the structure $\{a^2, b^2, a^2 + b^2\}$ is monochromatic?

In [16], Moreira investigated the monochromatic solutions of polynomial patterns in countable commutative semigroups, providing a novel classification in this domain. However, this classification does not encompass every polynomial structure. In fact, the following conjecture remains unsolved: For every finite coloring of the natural numbers, is it true that there exist $a, b \in \mathbb{N}$ such that the structure $\{a, b, a + b, ab\}$ is monochromatic?

In [12], Green and Sanders, by generalizing the works of Shkredov and Cilleruelo ([20], [6]), successfully provided an answer to the open problem in finite fields. Furthermore, a weaker version of this conjecture has been recently addressed by Moreira and Bergelson which state that, for every finite coloring of the natural numbers, there exist $a, b \in \mathbb{N}$ such that $\{a, a + b, ab\}$ is monochromatic. Szemerédi proved the famous conjecture of Erdös and Turán [8], and Furstenberg, by presenting a new proof of Szemerédi's theorem [10], initiated a deep and enduring interaction between the theories of Ramsey theory and ergodic theory.

In 1943, Rado introduced regular matrices and examined the monochromaticity of these equations in a special case. In [7], Deuber gave his well-known proof regarding Rado's conjecture on partition regular sets. He introduced structures called (m, p, c)-sets and, by iteratively applying Van der Waerden's theorem on arithmetic progressions, proved the theorem for them. In 1975, he generalized the notion of partition regularity to abelian groups. In 1994, Hindman, Deuber, and Bergelson expounded the theory of Rado for commutative rings, delving into the study of both homogeneous and inhomogeneous equations whose coefficient matrices belong to commutative rings. Among the important problems is the monochromaticity of $\{x, y, x+y, xy\}$, which Moreira proved a weak version of this in 2017. He definitively answered this question in a strong sense, employing dynamical systems and ergodic theory with the help of a new representation of a large class of non-linear patterns found in a cell of finite partition.

Before presenting the content, we proceed to define and review some classical results related to the Ramsey theorem. Let R be a countable commutative ring. For natural numbers m and k, consider functions

$$f_1, \ldots, f_k : R^m \to R.$$

The family $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ in R is called a Ramsey family if for every finite coloring $C_1, C_2, \ldots, C_r$ of R, and every $X \in R^m$, there exists a color C belong to $\{C_1, \ldots, C_r\}$ such that

$$\{f_1(X), f_2(X), \ldots, f_k(X)\} \subset C.$$

As you can observe, for any $a, b, k \in \mathbb{N}$, the structures $\{a, b, a+b\}$ and $\{a, a+b, \ldots, a+(k-1)b\}$ are Ramsey in $\mathbb{N}$, but the structures $\{a, a+1\}$ and $\{a, b, 3a-b\}$ are not. This is because if we color each element of the set of natural numbers with a color, then a and $a+1$ must have different colors, and if we color the set of natural numbers with 4 colors in a 5-color set if a and b have the same color, it can be shown that $3a-b$ has a different color [15]. In [5], it was proven that for every $p \in \mathbb{N}$, the family $\{x, y, x+y, x+2y, \ldots, x+py\}$ is Ramsey in $\mathbb{N}$. Additionally, Folkman proved that for every $m \in \mathbb{N}$, the following family is Ramsey:

$$\left\{\begin{array}{lllll}
x_0 & & & & \\
x_1 \quad , & x_1 + x_0 \quad , & & & \\
x_2 \quad , & x_2 + x_1 \quad , & x_2 + x_0 \quad , & x_2 + x_1 + x_0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
x_m \quad , & x_m + x_{m-1} \quad , & x_m + x_{m-2} \quad , & \cdots & , x_m + x_{m-1} + \cdots + x_0
\end{array}\right\}.$$

Just as the theorems of Schur and Van der Waerden were generalized, the generalization of Folkman's theorem is not far-fetched. In [7], Deuber proved that for every $m, p, c \in \mathbb{N}$, the following structure is Ramsey in $\mathbb{N}$:

$$\left\{\begin{array}{ccc}
cx_0 & & \\
ix_0 + cx_1 & , & i \in \{-p, \ldots, p\} \\
ix_0 + jx_1 + cx_2 & , & i, j \in \{-p, \ldots, p\} \\
\vdots & & \vdots \\
i_0x_0 + \cdots + i_{m-1}x_{m-1} + cx_m & , & i_0, \ldots, i_{m-1} \in \{-p, \ldots, p\}
\end{array}\right\}.$$

Suppose that $m \in \mathbb{N}$ and $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ is a finite family of linear functions $f : \mathbb{N}^{(m+1)} \to \mathbb{N}$. Then, this family is Ramsey if and only if there exist p and c in $\mathbb{N}$ such that the above structure contains $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$. To generalize this theorem, various methods can be employed. For instance, one can extend the Ramsey family to an infinite family of functions. Similar to a theorem called Hindman's theorem, which is translatable into the language of Ramsey families, significant results have also been obtained in this regard [13]. Furthermore, considering the potential parallels between the outcomes of linear functions and polynomial functions, the following classic question is raised:

"Suppose that for $k \in \mathbb{N}$, $f_1, f_2, \dots, f_k \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k]$. What is the necessary and sufficient condition for the family $\{f_1, \dots, f_k\}$ to be Ramsey in $\mathbb{N}$?"

Based on the aforementioned, all structures present in the Schur, Van der Waerden, and Deuber theorems are Ramsey families. Examining this subject when the structure involves addition and multiplication proves to be quite challenging. In 1977, Furstenberg and Sárközy presented a proof for the monochromaticity of the structure $\{a, a+b^2\}$ [10], [18]. Subsequently, Bergelson improved these results by proving the monochromaticity of the structure $\{a, b, a+b^2\}$ [3]. However, the significant breakthrough came with the extension to polynomial functions by Bergelson and Leibman in the Van der Waerden theorem, where they showed, that the structure

$$\{x_0, x_0 + p_1(x_1, \dots, x_m), \dots, x_0 + p_k(x_1, \dots, x_m)\}$$

with $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ such that $p_i(0) = 0$ is Ramsey [4].

Nowadays, the polynomial Van der Waerden theorem has been generalized in various directions, each of which represents a new example of polynomial Ramsey families ([1], [2], [9], [14]). However, a complete and accurate solution for the following conjecture is still not available.

" Is it true that for every finite coloring of the natural numbers, there exist $a, b \in \mathbb{N}$ such that the structure $\{a, b, a+b, ab\}$ is monochromatic? "

Conclusion

In today's research, the investigation of Ramsey families of nonlinear functions, whose simpler forms are polynomial expressions with two variables, holds a special priority.

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۹۶-۸۳

مقدمه‌ای بر قضیه رادو و مسائل مرتبط

محمود محمدزاده جعفرآبادی [۱] ، محمد اکبری توتکابنی [۲] ✉

۱. گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، گیلان، ایران. رایانامه: mohammadzadeh.j.m@gmail.com
۲. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، گیلان، ایران.
رایانامه: tootkaboni@guilan.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۲/۲۵
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۵/۱۹
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۵/۲۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
قضیهٔ رادو،
افراز منظم،
نظریهٔ رمزی،
فشرده‌سازی استون-چخ،
چگالی بالایی

رده‌بندی ریاضی:
20F05, 05C05

چکیده

در این مقاله، به بیان قضیهٔ رادو، خانواده‌های رمزی و ارتباط آنها با نظریهٔ ارگودیک و مسائل ترکیبیاتی می‌پردازیم، همچنین تاریخچهٔ پیدایش این مفاهیم از ابتدا تا چگونگی طرح و حل برخی از مسائل حوزهٔ ترکیبیات و نظریهٔ اعداد، به‌ویژه دیدگاه دستگاه‌های دینامیکی را ارائه کرده و برخی از مسائل باز در این زمینه را بیان می‌کنیم.

استناد: محمدزاده جعفرآبادی، محمود، اکبری توتکابنی، محمد. (۱۴۰۲). مقدمه‌ای بر قضیه رادو و مسائل مرتبط. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۹۶-۸۳.

http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9445.1002

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

در حوزهٔ نظریهٔ رمزی، [1] قضیه شور [2] اهمیت فراوانی دارد، [۱۹]. سادگی مسئله و نیز ارتباط آن با حوزه‌های متفاوتی از ریاضیات، بر اهمیت آن دوچندان می‌افزاید. این قضیه بیان می‌دارد که در هر افراز متناهی از اعداد طبیعی، یکی از حجره‌ها شامل یک زیرمجموعهٔ سه عضوی $\{a, b, a+b\}$ است.

قضیه ۱.۱. فرض کنید برای $r \in \mathbb{N}$، مجموعهٔ اعداد طبیعی به r رنگ، رنگ‌آمیزی شود، آنگاه $a, b \in \mathbb{N}$ موجودند به‌طوری‌که ساختار $\{a, b, a+b\}$ تک‌رنگ است.

در سال ۱۹۲۷، وان در واردن [3] نشان داد در هر افراز متناهی از اعداد طبیعی، یکی از حجره‌ها دارای تصاعدهای حسابی به طول دلخواه است. این اثبات پاسخی به یک سؤال باز بود که تا آن زمان حل‌نشده باقی مانده بود، [۲۲].

قضیه ۲.۱. فرض کنید برای $r \in \mathbb{N}$، مجموعهٔ اعداد طبیعی به r رنگ، رنگ‌آمیزی شود، آنگاه برای هر $k \in \mathbb{N}$، $a, b \in \mathbb{N}$ موجودند به‌طوری‌که ساختار $\{a, a+b, a+2b, \ldots, a+kb\}$ تک‌رنگ است.

قضایای شور و وان در واردن محققین را به بررسی الگوهای خطی تک‌رنگ ترغیب نمودند. رادو [4] در سال ۱۹۴۳ با طبقه‌بندی نمودن تمامی ساختارهای خطی در مجموعهٔ اعداد طبیعی به نتایج قابل توجهی در این زمینه دست یافت که در بخش‌های بعد به بیان آنها می‌پردازیم.

اردوش [5] و توران [6] بعد از اثبات قضیهٔ وان در واردن، مطرح کردند که آیا هر زیرمجموعه از اعداد طبیعی با چگالی بالایی مثبت، [7] دارای تصاعد حسابی با طول دلخواه هست؟ این سؤال توسط زمردی [8] در سال ۱۹۷۴ پاسخ داده شد، اما سال ۱۹۷۷ فرشتنبرگ [9] به کمک دستگاه‌های دینامیکی پاسخی دیگر به این مسئله داد که منجر به خلق رشته‌ای با عنوان تئوری ارگودیک-رمزی شد، [۱۰]؛[۱۱].

ایدهٔ کلی حل مسئلهٔ باز اردوش و توران که به قضیهٔ زمردی مشهور است به این شکل است که زیرمجموعهٔ E از اعداد طبیعی دارای تصاعد حسابی به طول k است، یعنی $\{a, a+d, \ldots, a+kd\} \subset E$ (برای a, b در اعداد طبیعی) اگر و فقط اگر $a \in E \cap (E-d) \cap \ldots \cap (E-kd)$ و در ادامه نشان می‌دهد که اگر E دارای چگالی مثبت باشد، آنگاه

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \bar{d}(E \cap (E-n) \cap \cdots \cap (E-kn)) > 0. \tag{1.1}$$

در نتیجه E شامل دنبالهٔ حسابی به طول $k+1$ است.

برای نشان دادن رابطه (۱.۱)، فرشتنبرگ اصل تناظری را بیان نمود که بین یک دستگاه دینامیکی حافظ اندازه و چگالی بالایی مجموعه تناظری را معرفی می‌نمود. برای آشنایی بیشتر با این روند، نیاز داریم تا با بعضی مفاهیم آشنا شویم.

فرض کنید $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک فضای احتمال باشد (به این معنی که $\mathcal{B}$ یک $\sigma-$جبر روی مجموعهٔ X و $\mu : \mathcal{B} \to [0, 1]$ یک اندازهٔ احتمال (جمعی شمارا) باشد. نگاشت اندازه‌پذیر $T : X \to X$ را حافظ اندازه نامند هرگاه به‌ازای هر $B \in \mathcal{B}$ داشته باشیم $\mu(T^{-1}B) = \mu(B)$ که $T^{-1}B := \{x \in X : Tx \in B\}$. به چهارتایی $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ که $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک فضای اندازه و T یک نگاشت انتقال حافظ اندازه باشد، دستگاه حافظ اندازه گویند. دستگاه $(X, \mathcal{B}, \mu, \{T_g\}_{g\in G})$ که G یک نیم‌گروه جابه‌جایی، $T_g : X \to X$ یک تابع است و $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک فضای اندازهٔ احتمال است را یک دستگاه دینامیک روی G می‌نامیم.

به‌طور کلی برای نیم‌گروه مفروض G و عملگر $\{T_g\}_{g\in G}$ از G روی فضای احتمال $(X, \mathcal{B}, \mu)$ (به این معنی که برای هر $g, h \in G$، $T_{gh} = T_g T_h$)، به همراه نگاشت‌های انتقال حافظ اندازه، $(X, \mathcal{B}, \mu, \{T_g\}_{g\in G})$ را یک دستگاه حافظ اندازه یا یک G-دستگاه حافظ اندازه نامند.

فرض کنید $(\mathbb{N}, +)$ یک نیم‌گروه باشد و فرض کنید $E \subseteq \mathbb{N}$. در این صورت به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$E - n := \{x \in \mathbb{N} : n + x \in E\}.$$

---

[1] Ramsey theory
[2] Schure's theorem
[3] B. L. Van der Waerden
[4] R. Rado
[5] P. Erdös
[6] P. Turan
[7] $\bar{d}(A) = lim_{n\to\infty} \frac{|A\cap\{1,2,\ldots,n\}|}{n}$
[8] E. Szemerédi
[9] H. Fursteberg

قضیه ۳.۱. (اصل تناظر فرشتنبرگ). [1] برای هر $E \subset \mathbb{N}$، یک دستگاه حافظ اندازه $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ و $A \in \mathcal{B}$ که $\mu(A) = \bar{d}(E)$ موجودند به‌طوری‌که برای هر $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$، داریم:

$$\bar{d}(E \cap (E - n_1) \cap \cdots \cap (E - n_k)) \geq \mu(A \cap T^{-n_1} A \cdots \cap T^{-n_k} A).$$

نسخه‌های متعددی از اصل تناظر فرشتنبرگ و کاربردهای آن ارائه شده که با توجه به مطالب گفته‌شده در این بخش، قضیهٔ زمردی از قضیهٔ بازگشت چندگانهٔ (ضربی) زیر تبعیت می‌کند.

قضیه ۴.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ یک دستگاه حافظ اندازه و مجموعهٔ A از $\mathcal{B}$ موجود باشد به‌طوری‌که $\mu(A) > 0$. آنگاه برای هر $k \in \mathbb{N}$،

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu(A \cap T^{-n} A \cap \cdots \cap T^{-kn} A) > 0.$$

قضیه ۴.۱ تعمیمی از قضیهٔ کلاسیک بازگشتی منسوب به پوآنکاره [2] است.

قضیه ۵.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ یک دستگاه حافظ اندازه و $A \in \mathcal{B}$ موجود باشد به‌طوری‌که $\mu(A) > 0$. در این صورت یک n طبیعی وجود دارد که

$$\mu(A \cap T^{-n} A) > 0.$$

شکل قوی‌تری از آن به‌صورت زیر بیان می‌شود:

قضیه ۶.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ یک دستگاه حافظ اندازه باشد و $A \in \mathcal{B}$. آنگاه به‌ازای هر $\epsilon > 0$، مجموعهٔ زیر یک مجموعهٔ متصل است. (یعنی با تعداد متناهی انتقال به چپ، کل اعداد طبیعی را در بر می‌گیرد.)

$$\{n \in \mathbb{N} \ : \ \mu(A \cap T^{-n} A) > \mu^2(A) - \epsilon\}. \quad (۲.۱)$$

تعریف ۷.۱. فرض کنید G یک نیم‌گروه باشد. $R \subset G$ را یک مجموعهٔ بازگشتی می‌نامند هرگاه برای هر فضای احتمال حافظ عمل $(\Omega, \mu, (T_g)_{g \in G})$ و هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر $B \subset \Omega$ با اندازهٔ مثبت، عنصر غیرهمانی $g \in R$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\mu(B \cap T_g^{-1} B) > 0.$$

لم ۸.۱. فرض کنید R یک مجموعهٔ بازگشتی در نیم‌گروه G باشد. آنگاه برای هر افراز منظم متناهی $R = R_1 \cup \cdots \cup R_r$، یکی از R_iها (برای $1 \leq i \leq r$) مجموعهٔ بازگشتی است.

اثبات. به برهان خلف، فرض کنید هیچ‌کدام از R_iها، مجموعهٔ بازگشتی نباشند. آنگاه برای هر $i = 1, 2, \ldots, r$، $(\Omega_i, \mu_i, \{T_g\}_{g \in G}^{(i)})$ و $B_i \subset \Omega_i$ که $\mu_i(B_i) > 0$ موجود باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر $g \in R_i$،

$$\mu_i(B_i \cap (T_g^i)^{-1} B_i) = 0.$$

فرض کنید $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_r$، $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_r$، $B = B_1 \times \cdots \times B_r$ و برای هر $g \in G$،

$$T_g(\Omega_1, \ldots, \Omega_r) = (T_g^1 \Omega_1, \ldots, T_g^r \Omega_r).$$

آنگاه $\{T_g\}_{g \in G}$ یک عمل حافظ احتمال از G روی Ω است و $\mu(B) = \mu_1(B_1) \cdots \mu_r(B_r) > 0$. ازآنجایی‌که R یک مجموعهٔ بازگشتی است، عنصر $g \in R$ موجود است به‌طوری‌که

$$\mu(B \cap T_g^{-1} B) > 0.$$

[1] Furstenberg's Corresponding Principle
[2] Poincare's Recurrence Theorem

چون

$$\mu(B \cap T_g^{-1} B) = \prod_{i=1}^{r} \mu_i(B_i \cap (T_g^i)^{-1} B_i)$$

می‌توان گفت به‌ازای هر $1 \leq i \leq r$،

$$\mu_i(B_i \cap (T_g^i)^{-1} B_i) > 0.$$

یعنی $g \notin R_i$ که با فرض خلف در تناقض است پس $g \in R_1 \cup \cdots \cup R_r$. □

اکنون به‌عنوان پیامدی از قضایای فوق یک نسخهٔ چگالی از قضیهٔ وان در واردن (که توسط زمردی در [۲۱] اثبات شده است) را بیان می‌کنیم.

قضیه ۹.۱. فرض کنید $A \subset \mathbb{N}$ که $\bar{d}(A) > 0$. آنگاه A شامل تصاعد حسابی به طول دلخواه است.

قضیه ۱۰.۱. فرض کنید برای $k \in \mathbb{N}$ چندجمله‌ای‌های $h_1, h_2, \cdots, h_k \in \mathbb{Z}[X]$ موجود باشند به‌طوری‌که برای $1 \leq i \leq k$، $h_i(0) = 0$. آنگاه برای هر رنگ‌آمیزی متناهی مجموعهٔ اعداد طبیعی، عناصر $a, b \in \mathbb{N}$ موجودند به‌طوری‌که ساختار $\{a, a + h_1(b), a + h_2(b), \dots, a + h_k(b)\}$ تک‌رنگ است.

به‌راحتی دیده می‌شود که قضیه ۲.۱، حالت خاصی از قضیه ۱۰.۱ است. بااین‌حال، توانایی ما در تشخیص تک‌رنگ بودن یک معادله، خیلی محدود است. به‌عنوان مثال، پرسش زیر تاکنون حل‌نشده باقی مانده است.

مسأله ۱۱.۱. آیا برای هر رنگ‌آمیزی متناهی مجموعهٔ اعداد طبیعی، $a, b \in \mathbb{N}$ موجودند به‌طوری‌که ساختار $\{a^2, b^2, a^2 + b^2\}$ تک‌رنگ باشد؟

در سال ۲۰۱۶، موریرا [1] توانست با بررسی طبقه‌بندی نوینی از الگوهای چندجمله‌ای دارای جواب تک‌رنگ از رنگ‌آمیزی مجموعهٔ اعداد طبیعی واقع در نیم‌گروه‌های جابه‌جایی شمارا، به قضیه‌های ۲.۱ و ۱۰.۱ عمومیت دهد؛ ولی با وجود برقراری اتحاد بین چندجمله‌ای‌های وان در واردن و ساختار شور، این طبقه‌بندی نوین شامل هر ساختار چندجمله‌ای نمی‌شود [۱۶]. درواقع حدس زیر هنوز حل‌نشده است.

مسأله ۱۲.۱. برای هر رنگ‌آمیزی متناهی مجموعهٔ اعداد طبیعی، $a, b \in \mathbb{N}$ موجودند به‌طوری‌که ساختار $\{a, b, a + b, ab\}$ تک‌رنگ است.

گرین [2] و سندرز [3] با تعمیم کارهای اشکریدوف [4] [۲۰] و سیروئلو [5] [۶]، موفق به ارائهٔ پاسخی برای حدس ۱۲.۱ در میدان‌های متناهی شدند [۱۲]. در ادامه به ارائهٔ حالت ضعیف‌تری از حدس ۱۲.۱ می‌پردازیم که اخیراً توسط موریرا و برگلسون [6] حل شده است:

قضیه ۱۳.۱. برای هر رنگ‌آمیزی متناهی مجموعهٔ اعداد طبیعی، $a, b \in \mathbb{N}$ موجودند به‌طوری‌که ساختار $\{a, a + b, ab\}$ تک‌رنگ است.

زمردی، حدس معروف اردوش و توران [۸] را اثبات کرد [۲۱] و فرشتنبرگ با ارائهٔ اثباتی جدید از قضیهٔ زمردی [۱۰] آغازگر تعاملی طولانی و عمیق بین نظریهٔ رمزی و نظریهٔ ارگودیک شد.

در سال ۱۹۴۳، رادو ماتریس‌های منظم را معرفی نمود و در حالتی خاص تک‌رنگ بودن این معادلات را مورد بررسی قرار داد. دابر [7] در سال ۱۹۷۳ اثبات معروف خود حول حدس رادو مربوط به مجموعه‌های افراز منظم را بیان کرد. او در اثباتش ساختارهایی به نام (m, p, c)-مجموعه را معرفی و با تکرار کاربردهای قضیهٔ وان در واردن در تصاعد حسابی، قضیهٔ افراز را برای آن‌ها اثبات نمود. وی در سال ۱۹۷۵ مفهوم افراز منظم را به گروه‌های آبلی تعمیم داد. تقریباً ۱۲ سال بعد، یعنی در سال ۱۹۸۷، با همکاری هایندمن [8] نشان داد که (m, p, c)-مجموعه‌ها شامل جواب‌هایی برای هر دستگاه معادلات خطی همگن افراز منظم هستند. در سال ۱۹۹۴، هایندمن، دابر و

[1] J. Moreira
[2] B. Green
[3] T. Sanders
[4] Ilya D. Shkredov
[5] J. Cilleruelo
[6] V. Bergelson
[7] W. Deuber
[8] N. Hindman

برگلسون نظریهٔ رادو را برای حلقه‌های جابه‌جایی بیان و طی آن به بررسی معادلات همگن و غیرهمگنی که ماتریس ضرایبشان از حلقه‌های جابه‌جایی بود، پرداختند. از جمله مسائل مهمی که در این حوزه مطرح می‌شود، تک‌رنگ بودن $\{x, y, x+y, xy\}$ است که موریرا در سال ۲۰۱۷ شکل ضعیفی از آن را حل نمود و به‌طور قطعی در یک مفهوم قوی و با نمایش کلاس بزرگ جدیدی از الگوهای غیرخطی که در یک حجره از افراز متناهی یافت می‌شود، با کمک دستگاه دینامیکی و نظریهٔ ارگودیک به این سؤال پاسخ داد.

قبل از ارائهٔ مطالب، به بیان تعاریف و مرور تعدادی از نتایج کلاسیک مربوط به قضیهٔ رمزی می‌پردازیم.

تعریف ۱۴.۱. فرض کنید R یک حلقهٔ جابه‌جایی شمارا باشد که برای m و k طبیعی، توابع

$$f_1, \ldots, f_k : R^m \to R$$

را داشته باشیم. به $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ در R، خانوادهٔ رمزی گویند هرگاه برای هر رنگ‌آمیزی متناهی R به‌صورت

$$R = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r,$$

$X \in R^m$ و رنگ C از $\{C_1, \ldots, C_r\}$ موجود باشند به‌طوری‌که

$$\{f_1(X), f_2(X), \ldots, f_k(X)\} \subset C.$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، برای هر $a, b, k \in \mathbb{N}$ ، قضیه‌های ۱.۱ و ۲.۱ به استناد تعریف ۱۴.۱، ساختارهای $\{a, b, a+b\}$ و $\{a, a+b, \ldots, a+(k-1)b\}$ در $\mathbb{N}$ رمزی هستند، ولی ساختارهای $\{a, a+1\}$ و $\{a, b, 3a-b\}$ چنین نیستند. زیرا اگر هر عضو از مجموعهٔ اعداد طبیعی را یک رنگ در نظر بگیرید، آنگاه a و $a+1$ باید رنگ‌های متفاوتی داشته باشند و اگر مجموعهٔ اعداد طبیعی را با ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم، در یک مجموعهٔ ۵حالته، چنانچه a و b یک‌رنگ باشند، می‌توان نشان داد که $3a-b$ دارای رنگ متفاوتی است [۱۵].

قضیه ۱۵.۱. برای هر $p \in \mathbb{N}$، خانوادهٔ $\{x, y, x+y, x+2y, \ldots, x+py\}$ در $\mathbb{N}$، رمزی است [۵].

تعریف ۱۶.۱. برای دنبالهٔ متناهی $\{x_n\}_{n=1}^{m}$ از اعداد طبیعی، مجموعهٔ جمع‌های متناهی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$FS(\{x_n\}_{n=1}^{m}) = \{\sum_{n\in F} x_n \ : \ F \in \mathcal{P}_f(\{1, 2, \ldots, m\})\}$$

و برای دنبالهٔ نامتناهی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد طبیعی تعریف می‌کنیم:

$$FS(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{\sum_{n\in F} x_n \ : \ F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}.$$

قضیه ۱۷.۱. (فالکمن[1]: برای هر $m \in \mathbb{N}$، خانوادهٔ زیر رمزی است:

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_0 & & & & \\ x_1 \quad , & x_1 + x_0 \quad , & & & \\ x_2 \quad , & x_2 + x_1 \quad , & x_2 + x_{-0} \quad , & x_2 + x_1 + x_0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_m \quad , & x_m + x_{m-1} \quad , & x_m + x_{m-2} \quad , & \cdots & x_m + x_{m-1} + \cdots + x_0 \end{array}\right\}.$$

به این معنا که با مفروض بودن رنگ‌آمیزی متناهی از مجموعهٔ اعداد طبیعی برای هر $m \in \mathbb{N}$، زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\mathbb{N}$ با کاردینال m موجود است به‌طوری‌که جمع متناهی‌اش، تک‌رنگ شود.

همان‌طور که قضیه‌های شور و وان در واردن توسط برائر تعمیم یافتند، تعمیم قضیهٔ فالکمن نیز دور از ذهن نیست.

[1] Folkman

قضیه ۱.۱۸. (دابر): برای هر $m, p, c \in \mathbb{N}$، ساختار زیر در $\mathbb{N}$ رمزی است [۷].

$$\left\{\begin{array}{ccc} cx_0 & & \\ ix_0 + cx_1 & , & i \in \{-p, \dots, p\} \\ ix_0 + jx_1 + cx_2 & , & i, j \in \{-p, \dots, p\} \\ \vdots & & \vdots \\ i_0x_0 + \dots + i_{m-1}x_{m-1} + cx_m & , & i_0, \cdots i_{m-1} \in \{-p, \dots, p\} \end{array}\right\}.$$

کاملاً واضح است که قضیه ۱.۱۸ ، قضیه‌های کلاسیک قبل را به‌عنوان حالت خاص شامل شده و برای هر خانوادهٔ رمزی خطی متناهی در $\mathbb{N}$ اعمال می‌شود:

قضیه ۱.۱۹. فرض کنید $m \in \mathbb{N}$ و $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ خانواده‌ای متناهی از توابع خطی (همومورفیسم‌های نیم‌گروه) $f : \mathbb{N}^{(m+1)} \to \mathbb{N}$ باشد. آنگاه این خانواده، رمزی است اگر و فقط اگر p و c در $\mathbb{N}$ موجود باشند به‌طوری‌که ساختار موجود در قضیه ۱.۱۸ ، شامل $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ باشد.

برای تعمیم قضیه ۱.۱۹ روش‌های متفاوتی وجود دارد. به‌عنوان مثال می‌توان به گسترش خانوادهٔ رمزی به خانواده‌ای نامتناهی از توابع اشاره کرد. فعالیتی مانند قضیه‌ای به نام هایندمن که قابل بازنویسی به زبان خانوادهٔ رمزی است و نتایج قابل توجهی نیز دراین‌باره به دست آمد [۱۳]. همچنین می‌توان دامنهٔ قضیه ۱.۱۹ را به سایر نیم‌گروه‌های جابه‌جایی نیز تعمیم داد. در ادامه با توجه به محتمل بودن تشابه نتایج حاصل از خطی بودن توابع با زمانی که توابع چندجمله‌ای هستند، سؤال کلاسیک زیر مطرح می‌شود:
”فرض کنید برای k طبیعی، $f_1, f_2, \dots, f_k \in \mathbb{Z}[x_1, \dots x_k]$. آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه خانوادهٔ $\{f_1, \dots f_k\}$ در $\mathbb{N}$ رمزی باشد، چیست؟ “
با توجه به آنچه گفته شد، همهٔ ساختارهای موجود در قضیه‌های شور، وان در واردن و دابر، خانوادهٔ رمزی هستند. بررسی این مبحث در حالتی که ساختار شامل ترکیب جمع و ضرب باشد، کاری بسیار دشوار است. فرشتنبرگ و سارکوزی در سال ۱۹۷۷ اثباتی برای تک‌رنگ بودن ساختار $\{a, a+b^2\}$ ، ارائه دادند [۱۰]، [۱۸] و بعد از آن برگلسون با اثبات تک‌رنگ بودن ساختار $\{a, b, a+b^2\}$ ، نتایج این قضیه را بهبود بخشید، [۳] اما پیشرفت بزرگ بعدی دررابطه‌با حدس ۱.۱۲ ، توسعهٔ چندجمله‌ای برگلسون و لیبمن در قضیهٔ وان در واردن بود [۴] که به زبان خانوادهٔ رمزی، نشان دادند ساختار

$$\{x_0, x_0 + p_1(x_1, \dots, x_m), \dots, x_0 + p_k(x_1, \dots, x_m)\}$$

که $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{Z}[x_1, \dots x_m]$، $p_i(0) = 0$ رمزی است.
امروزه قضیهٔ چندجمله‌ای وان در واردن در جهات مختلفی تعمیم یافته که هرکدام به‌نوعی بیانگر مثال جدیدی از خانواده‌های چندجمله‌ای‌های رمزی است ([۱]، [۲]، [۹] ، [۱۴]) ولی هنوز یک راه‌حل کامل و صحیح برای حدس ۱.۱۲ ، در اختیار نیست.

۲ افراز منظم و ماتریس‌های افراز منظم

تعاریف و قضیه‌های بیان‌شده در این بخش، حاصل مطالعهٔ کتاب فشرده‌سازی استون–چخ [۱۳] است. بسیاری از نتایج کلاسیک قضیهٔ رمزی، معمولاً به‌صورت زیر بیان می‌شود.
فرض کنید برای u, v طبیعی، A یک ماتریس $u \times v$ با درایه‌های نامنفی باشد. آیا می‌توان گفت زمانی که $\mathbb{N}$ را به تعداد متناهی رنگ، افراز و رنگ‌آمیزی می‌کنیم، بردار $\overrightarrow{x} \in \mathbb{N}^v$ موجود است به‌طوری‌که جواب‌های $A\overrightarrow{x}$ تک‌رنگ باشد؟

در جهت شفافیت موضوع به قضیهٔ وان در واردن توجه کنید. ساختار حسابی $\{a, a+d, a+2d, a+3d\}$ معادل عبارت زیر است:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}.$$

تعریف ۱.۲. فرض کنید $(S,+)$ یک نیم‌گروه با عضو همانی صفر باشد. برای u و v طبیعی، A را یک ماتریس $u \times v$ با درایه‌هایی از ω در نظر بگیرید. A یک تصویر افراز منظم روی S است اگر و فقط اگر برای $r \in \mathbb{N}$، مجموعهٔ S را به $E_1, E_2, \ldots, E_r$ افراز کنیم، $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ و $\overrightarrow{x} \in (S\backslash\{0\})^v$ موجود باشند به‌طوری‌که $A\overrightarrow{x} \in E_i^u$.

تعریف ۲.۲. فرض کنید برای u و v طبیعی، C یک ماتریس $u \times v$ با درایه‌هایی از $\mathbb{Z}$ باشد. آنگاه C^+ و C^- ماتریس‌های $u \times v$ با درایه‌هایی از ω هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$C^+_{i,j} := (|C_{i,j}| + C_{i,j})/2 \ \text{ و } \ C^-_{i,j} := (|C_{i,j}| - C_{i,j})/2.$$

تعریف ۳.۲. فرض کنید $(S,+)$ یک نیم‌گروه با عضو همانی صفر باشد. برای u و v طبیعی، C را ماتریس $u \times v$ با درایه‌هایی از $\mathbb{Z}$ در نظر بگیرید. آنگاه C یک ماتریس هسته افراز منظم روی S است اگر و فقط اگر هرگاه برای $r \in \mathbb{N}$ و مجموعهٔ $S = \bigcup_{i=1}^r D_i$، $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ و $\overrightarrow{x} \in D_i^v$ موجود باشند به‌طوری‌که $C^+\overrightarrow{x} = C^-\overrightarrow{x}$.

در ادامه به بیان شرایطی می‌پردازیم که ضامن هسته افراز منظم بودن روی اکثر نیم‌گروه‌هاست.

تعریف ۴.۲. فرض کنید برای u و v طبیعی، C یک ماتریس $u \times v$ با درایه‌های گویا باشد که ستون‌های آن را با $c_1, c_2, \ldots, c_v$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید $R = \mathbb{Z}$ یا $R = \mathbb{Q}$ ، در این صورت C در شرایط ستونی روی R صدق می‌کند اگر و فقط اگر $m \in \mathbb{N}$ و $I_1, I_2, \ldots, I_m$ موجود باشند به‌طوری‌که

۱. مجموعهٔ $\{I_1, I_2, \ldots, I_m\}$ یک افراز از $\{1, 2, \ldots, v\}$ باشد.

۲. $\sum_{i\in I_1} \overrightarrow{c_i} = \overrightarrow{0}$.

۳. اگر $m > 1$ و $t \in \{2, 3, \ldots, m\}$ می‌توانیم J_t را به‌صورت اجتماع I_1 تا I_{t-1} در نظر بگیریم. آنگاه $\{\delta_{t,i}\}_{i\in J_t}$ در R موجود است به‌طوری‌که

$$\sum_{i\in I_t} \overrightarrow{c_i} = \sum_{i\in J_t} \delta_{t,i} \cdot \overrightarrow{c_i}.$$

قضیه ۵.۲. فرض کنید برای u و v طبیعی، C یک ماتریس $u \times v$ با درایه‌های گویا باشد. آنگاه عبارات زیر با یکدیگر معادل هستند:

۱. ماتریس C یک هسته افراز منظم روی $(\mathbb{N}, +)$ است.

۲. ماتریس C یک هسته افراز منظم روی $(\mathbb{N}, .)$ است.

۳. ماتریس C در شرایط ستونی روی $\mathbb{Q}$ صدق می‌کند.

تعریف ۶.۲. فرض کنید R یک حلقهٔ جابه‌جایی باشد و C به‌ازای u و v طبیعی، یک ماتریس $u \times v$ روی R باشد. آنگاه ماتریس C در شرایط ستونی روی R صدق می‌کند اگر و فقط اگر برای ستون‌های $c_1, c_2, \cdots, c_v$ از ماتریس C، برای یک $m \in \mathbb{N}$ و $k_1, k_2, \cdots, k_m$ در $\mathbb{N}$ موجود باشد به‌طوری‌که $1 < k_1 < \ldots < k_m = v$ و $d_1, \ldots, d_m \in R\backslash\{0\}$ به‌طوری‌که

۱. $d_1. \sum_{i=1}^{k_1} c_i = 0$.

۲. اگر $m > 1$ و $t \in \{2, 3, , m\}$، آنگاه $\alpha_{1,t}, \alpha_{2,t}, \ldots, \alpha_{k_{t-1},t} \in R$ موجود است به‌طوری‌که

$$\sum_{i=1}^{k_{t-1}} \alpha_{I,t}.c_i + d_t. \sum_{i=k_{t-1}+1}^{k_t} c_i = 0.$$

۳. اگر $m > 1$، آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $R.d_1. \prod_{t=2}^m d_t^n$ نامتناهی است.

مشاهده می‌شود که اگر R متناهی باشد و C در شرایط ستونی روی R صدق می‌کند طبق تعریف باید $m = 1$.

تعریف ۷.۲. فرض کنید برای $u, v \in \mathbb{N}$، $A_{u\times v}$ ماتریسی روی $\mathbb{Z}$ باشد. آنگاه، $A_{u\times v}$ یک افراز منظم روی $\mathbb{N}$ است اگر و فقط اگر در شرایط ستونی روی $\mathbb{Z}$ صدق کند.

رادو با تکیه بر قضیه‌ها و مفاهیمی که گفته شد، توانست در سال ۱۹۴۳، نتایج قوی‌تری را بیان و اثبات نماید [۱۷]:

قضیه ۸.۲. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از مجموعهٔ اعداد مختلط و برای $u, v \in \mathbb{N}$، $A_{u\times v}$ ماتریسی روی R باشد. آنگاه، $A_{u\times v}$ یک افراز منظم روی $R \setminus \{0\}$ است اگر و فقط اگر $A_{u\times v}$ در شرایط ستونی روی R صدق کند.

هایندمن با اثبات متغیر بودن قضیهٔ فوق برای فضاهای برداری روی میدان‌های متناهی، سرانجام آن را برای هر حلقهٔ جابه‌جایی (موسوم به حلقهٔ رادو) به اثبات رساند.

قضیه ۹.۲. فرض کنید R یک حلقهٔ جابه‌جایی باشد و برای هر $u, v \in \mathbb{N}$، C یک ماتریس $u \times v$ روی R باشد که در شرایط ستونی روی R نیز صدق کند. آنگاه C یک افراز منظم روی $R\setminus\{0\}$ است.

تعریف ۱۰.۲. فرض کنید R یک حلقهٔ جابه‌جایی باشد. فرض کنید برای $u, v \in \mathbb{N}$، C یک ماتریس $u \times v$ روی R باشد که افراز منظم روی $R\setminus\{0\}$ است و در شرایط ستونی صدق می‌کند. آنگاه R یک حلقهٔ رادو نامیده می‌شود.

قضیه ۱۱.۲. عبارات زیر همواره برقرار هستند:

۱. هر حلقهٔ جابه‌جایی متناهی، یک حلقهٔ رادو است.

۲. هر جمع مستقیم از تعداد نامتناهی حلقه‌های جابه‌جایی بدیهی، یک حلقهٔ رادو است.

۳. هر جمع مستقیم از حلقه‌های رادو، حلقهٔ رادو است.

امروزه در این تحقیقات، بررسی خانواده‌های رمزی از توابع غیرخطی که ساده‌ترین شکل آن‌ها چندجمله‌ای‌هایی با دو متغیر هستند، از اولویت خاصی برخوردارند.

References

[1] Beiglböck, M., Bergelson, V., Hindman, N., & Strauss, D. (2006). Multiplicative structures in additively large sets. *J. Combin. Theory Ser. A*, 113, 1219–1242. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcta.2005.11.003.

[2] Beiglböck, M., Bergelson, V., Hindman, N., & Strauss, D. (2008). Some new results in multiplicative and additive Ramsey theory. *Trans. Amer. Math. Soc*, 360, 819–847. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-07-04370-X.

[3] Bergelson, V. (1987). Ergodic Ramsey theory. *Logic and combinatorics*, 65, 63–87.

[4] Bergelson, V., & Leibman, A. (1996). Polynomial extension of van der Wearden's and Szemeredi's theorem. *J. Amer. Math. Soc*, 9, 725–753.

[5] Brauer, A. (1928). Ubre Sequenzen von Potenzresten. *Sitzungsberichte de Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physicalish-Mathematische Klasse*, 9–16.

[6] Cilleruelo, J. (2012). Combinatorial problems in finite fields and Sidon sets. *Combinatorica*, 32, 497–511. DOI: https://doi.org/10.1007/s00493-012-2819-4.

[7] Deuber, W. (1973). Partitionen und lineare Gleichungssysteme. *In Math. Z*, 133, 109–123. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01237897.

[8] Erdös, P., & Turan, P. (1936). On some sequences of integers. *J. London Math. Soc*, 11, 261–264. DOI: https://doi.org/10.1112/jlms/s1-11.4.261.

[9] Frantzikinakis, N., & Host, B. (2017). Higher order Fourier analysis of multiplicative functions and applications. *J. Amer. Math. Soc*, 30, 67–157. DOI: https://doi.org/10.1090/jams/857.

[10] Furstenberg, H. (1977). Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions. *J. d'Analyse math*, 31, 204–256. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02813304.

[11] Furstenberg, H., Katznelson, Y., & Orstein, D. (1979). The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem. *Bull. Amer. Math. Soc*, 7, 427–552. DOI: https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1982-15052-2.

[12] Green, B., & Sanders, T. (2016). Monochoromatic sums and products. *Dis. Anal*. DOI: https://doi.org/10.19086/da.613.

[13] Hindman, N., & Strauss, D. (2012). Algebra in Stone-$\check{C}$ech compactification. Theory and application. *De Gruyter Expositions in Mathematics, 27. Walter de Gruyter Co., Berlin*. DOI: https://doi.org/10.1515/9783110258356.

[14] McCutcheon, R. (2010). A variant of density Hales-Jewett theorem. *Bull. Lond. Math. Soc*, 42, 974–980. DOI: https://doi.org/10.1112/blms/bdq051.

[15] Moreira, J. (2016). Partition Regular Polynomial Patterns in Commutative Semigroups. *Ohio State University*.

[16] Moreira, J. (2017). Monochromatic sums and products in $\mathbb{N}$. *Annals of Math*, 185, 1069–1090. DOI: https://doi.org/10.4007/annals.2017.185.3.10.

[17] Rado, R. (1943). Note on combinatorial analysis. *Proc. London Math. Soc*, 48, 122–160.

[18] Sárközy, A. (1978). On difference sets of sequences of integers. I. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 31, 125–149. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01901984.

[19] Schur, I. (1916). Uber die Kongruenz $x^m + y^m = z^m (\bmod p)$. *Jahresbericht der Deutschen Math.Verein*, 25, 114–117.

[20] Shkredov, I.D. (2010). On monochromatic solutions of some nonlinear equations in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. *Math Notes*, 88, 603–611. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434610090336.

[21] Szemerédi, E. (1975). On the sets of integers containing no k elements in arithmetic progressions. *Acta. Arith*, 27, 299–345. DOI: https://doi.org/10.4064/AA-27-1-199-245.

[22] Van der Waerden, B.L. (1927). Beweis einer Baudetsvhen Vermutung. *Nieuw. Arch. Wisk*, 15, 212–216.