Measure Algebras and Applications

Some notes about Orlicz spaces related to a Banach function space

Alireza Bagheri Salec[1]

1. Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran. Email: r-bagheri@qom.ac.ir

Article Info	ABSTRACT

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 10 May 2023
Received in revised form:
1 August 2023
Accepted: 2 August 2023
Published Online:
30 September 2023

Keywords:
Orlicz spaces,
Function spaces,
Lebesgue spaces,
The space of almost everywhere bounded function

2020 Mathematics Subject Classification:
46E30, 47L10

In this paper, some results on Orlicz spaces associated with a functional Banach space are obtained.

Cite this article: Bagheri Salec, A. (2023). Some notes about Orlicz spaces related to a Banach function space. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 74–82. http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9422.1001

 Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/MAA.2023.9422.1001

Extended Abstract

Orlicz spaces, as a very important generalization of Lebesgue spaces, were proposed more than 100 years ago and were first introduced by Z. W. Birnbaum and W. Orlicz. After that, another generalization of Lebesgue spaces with symbols X^p instead of L^p was introduced in which X is a Banach function space. In this article, another generalization of Lebesgue spaces is investigated, which includes both previous generalizations. Although this generalization and preliminary studies of it were published in a scientific report in 1988, effective research on this generalization was done 15 years ago. Due to the fact that in this generalization a convex and Young function Φ is placed instead of function $|\cdot|^p$ and a Banach function space X is placed instead of space L^1, in this article, taking into account the conditions of the function Φ we will check properties of generalized Orlicz space X^Φ. More precisely, if we put

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_0 &= \{f : \Omega \to [-\infty, +\infty] : \text{f is } \mu - \text{measurable}\},\\
X^\Phi &= \{f \in \mathcal{M}_0 : \exists \alpha > 0, \Phi(\frac{|f|}{\alpha}) \in X\},\\
\mathcal{E}^\Phi &= \{f \in X^\Phi : \forall \alpha > 0, \Phi(\frac{|f|}{\alpha}) \in X\},\\
\mathcal{S}^\Phi &= \{f \in X^\Phi : f \text{ is a step function}\},\\
\mathcal{M}^\Phi &= \bar{\mathcal{S}^\Phi}^{\|\cdot\|_\Phi},
\end{aligned}$$

considering the conditions on the function Φ, we examine the relationship between the above spaces. Generalized Orlich spaces X^Φ associated with a functional Banach space like X, considering properties such as solidity of X, have important and well-known properties in Orlicz spaces and Lebesgue spaces. By using these properties, many results can be obtained in these spaces. Considering that an Orlicz space is generalized by X^Φ and by replacing the space L^1 with Banach function space X, we can reach new Banach spaces by placing different spaces in place X. Studying these spaces and examining their properties, such as conditions of being algebra, the existence of a bounded approximate identity element, spaceability, and many other cases can be done in the continuation of this research.

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۸۲-۷۴

نکاتی در مورد فضاهای اورلیش مرتبط با یک فضای باناخ تابعی

علیرضا باقری ثالث [۱]

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: r-bagheri@qom.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۲/۲۰
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۵/۱۰
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۵/۱۱
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
فضاهای اورلیش،
فضاهای تابعی،
فضاهای لبگ،
فضای توابع تقریباً همه‌جا کران‌دار

رده‌بندی ریاضی:
46E30, 47L10

چکیده

فضاهای اورلیش به‌عنوان تعمیم بسیار بااهمیتی از فضاهای لبگ، بیش از ۱۰۰ سال پیش مطرح و اولین بار توسط بیرباام و اورلیش معرفی شدند. در سال‌های بعد تعمیم دیگری از فضاهای لبگ با نماد X^p به‌جای L^p معرفی شد که در آن X یک فضای باناخ تابعی است. در این مقاله، تعمیم دیگری از فضاهای لبگ مورد بررسی قرار می‌گیرد که هر دو تعمیم قبلی را در بر می‌گیرد. هرچند این تعمیم و مطالعات مقدماتی از آن، در یک گزارش علمی در سال ۱۹۸۸ منتشر شده است، اما تحقیقات مؤثر روی این تعمیم در ۱۵ سال قبل انجام شده است. با توجه به اینکه در این تعمیم، یک تابع محدب و یانگ Φ به‌جای تابع $|\cdot|^p$ و یک فضای باناخ تابعی X به‌جای فضای L^1 قرار می‌گیرد، در این مقاله با در نظر گرفتن شرایط تابع Φ خواص فضای اورلیش تعمیم‌یافتهٔ X^Φ را بررسی می‌کنیم.

استناد: باقری ثالث، علیرضا. (۱۴۰۲). نکاتی در مورد فضاهای اورلیش مرتبط با یک فضای باناخ تابعی. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۸۲-۷۴.

http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9422.1001

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمات و تعاریف

در تمام این مقاله $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ را یک فضای اندازه در نظر می‌گیریم که در آن μ یک اندازهٔ نامنفی است. همچنین قرار می‌دهیم،

$$\mathcal{M}_\circ(\Omega) = \{f : \Omega \to [-\infty, +\infty] : \text{اندازه‌پذیر است} - \mu \text{ ،} f\}.$$

توابع $\mu-$ تقریباً همه‌جا برابر در $\mathcal{M}_\circ(\Omega)$ را همواره یکی در نظر می‌گیریم. برای هر $p \in [۱, \infty)$ فضای لبگ $L^p(\Omega)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L^p = L^p(\Omega) = \{f \in \mathcal{M}_\circ(\Omega) : \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{۱}{p}} < \infty\}.$$

در این صورت می‌دانیم فضای لبگ $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ یک فضای باناخ است. نظر به اهمیت فضاهای لبگ، تعمیم‌های مفیدی از آن مرتبط با فضاهای تابعی نیز ارائه شده‌اند.

فرض کنید $\|\cdot\|_X : \mathcal{M}_\circ(\Omega) \to [\circ, \infty]$ تابعی باشد که در خواص نرم به‌جز متناهی بودن صدق کند، و

$$X = \{f \in \mathcal{M}_\circ(\Omega) : \|f\|_X < \infty\}.$$

بنابراین X یک فضای خطی حقیقی نرمدار است که در خواص زیر صدق می‌کند:

۱- $\|f\|_X$ برای هر $f \in \mathcal{M}_\circ(\Omega)$ تعریف شده است و $\|f\|_X < \infty$ اگر و تنها اگر $f \in X$.

۲- $f = \circ, a.e.$ اگر و تنها اگر $\|f\|_X = \circ$.

اگر X در شرایط زیر نیز صدق کند، آنگاه یک فضای باناخ تابعی نامیده می‌شود،

۳- $\circ \le f \le g \ a.e. \Rightarrow \|f\|_X \le \|g\|_X$،

۴- $f_n \uparrow f \ a.e. \Rightarrow \|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$،

۵- $\mu(E) < \infty \Rightarrow \chi_E \in X$.

یادآوری می‌کنیم که برای هر $E \in \mathcal{A}$، χ_E تابع مشخصهٔ E است و هر ترکیب خطی از توابع مشخصه با اندازهٔ متناهی را یک تابع پله‌ای می‌نامیم.

با توجه به اینکه $f \in L^p(\Omega)$ اگر و تنها اگر $|f|^p \in L^۱(\Omega)$، یک تعمیم از فضاهای لبگ که آن را با $X^p(\Omega)$ نمایش می‌دهند به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X^p = X^p(\Omega) = \{f \in \mathcal{M}_\circ(\Omega) : |f|^p \in X\}.$$

همچنین اگر Φ تابعی یانگ باشد، یعنی $\Phi : \mathbb{R} \to [\circ, +\infty]$ تابعی محدب و زوج باشد که $\Phi(\circ) = \circ$ و $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = +\infty$، آنگاه فضای اورلیش $L^\Phi(\Omega)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$L^\Phi(\Omega) = \left\{f \in \mathcal{M}_\circ(\Omega) : \exists\alpha > \circ, \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) d\mu < \infty\right\}.$$

توجه نمایید توابع محدب صعودی هستند و اگر یک تابع محدب روی بازهٔ (a, b) حقیقی مقدار باشد، آنگاه روی این فاصله پیوسته است. برای خواص فضاهای اورلیش [۴] را ملاحظه فرمایید. حال با در نظر گرفتن فضای باناخ تابعی X و تابع یانگ Φ قرار می‌دهیم،

$$X^\Phi = X^\Phi(\Omega) = \left\{f \in \mathcal{M}_\circ(\Omega) : \exists\alpha > \circ, \Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) \in X\right\}.$$

این مجموعه یک فضای برداری است و با نرم لکزومبورگ زیر یک فضای باناخ تابعی است ([۳] قضیه ۲.۵)،

$$\|f\|_\Phi = \|f\|_{X,\Phi} = \inf\left\{\alpha > \circ : \left\|\Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right)\right\|_X \le ۱\right\}.$$

این فضا را فضای اورلیش تعمیم‌یافته مرتبط با فضای باناخ تابعی X می‌نامیم. با توجه به اینکه شرط $\int_\Omega \Phi(\frac{|f|}{\alpha})d\mu < \infty$ در تعریف فضاهای اورلیش به این معنا است که $\Phi(\frac{|f|}{\alpha}) \in L^۱(\Omega)$، فضاهای اورلیش مرتبط با فضای باناخ تابعی X تعمیم فضاهای اورلیش هستند، و در واقع داریم $L^\Phi(\Omega) = (L^۱(\Omega))^\Phi$. همچنین اگر قرار دهیم $\Phi_{(p)}(x) = |x|^p$ داریم، $X^p = X^{\Phi_{(p)}}$. بنابراین تعمیم ارائه‌شده بسیار گسترده‌تر از تعمیم‌های قبلی است.

در ادامه، همواره X یک فضای باناخ تابعی و Φ یک تابع یانگ است و

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{\Phi} &= \left\{ f \in X^{\Phi} : \forall \alpha > 0, \Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) \in X \right\},\\ \mathcal{S}^{\Phi} &= \{ f \in X^{\Phi} : \text{تابعی پله‌ای باشد } f \},\\ \mathcal{M}^{\Phi} &= \overline{\mathcal{S}^{\Phi}}^{\|\cdot\|_{\Phi}}.\end{aligned}$$

توجه نمایید که خواص (۱) و(۳) در تعریف فضاهای باناخ تابعی خاصیت زیر را برای فضای X به ارمغان می‌آورد،

$$[f \in \mathcal{M}_0(\Omega), f \in X, |f| \leq |g|] \Rightarrow [g \in X, \|f\|_X \leq \|g\|_X].$$

این خاصیت را خاصیت جامد بودن X می‌نامیم.

ملاحظه می‌کنیم که $\mathcal{E}^{\Phi}$ نیز یک فضای برداری است زیرا برای هر $f, g \in \mathcal{E}^{\Phi}$ و هر $\beta \in \mathbb{R}$، برای هر $\alpha > 0$ اگر t را عددی دلخواه در فاصله $(0, 1)$ در نظر بگیریم، چون X فضای برداری و Φ محدب است داریم،

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{|\beta f + g|}{\alpha}\right) &\leq \Phi\left(\frac{t|\beta||f|}{t\alpha} + \frac{(1-t)|g|}{(1-t)\alpha}\right)\\ &\leq t\Phi\left(\frac{|\beta||f|}{t\alpha}) + (1-t)\Phi(\frac{|g|}{(1-t)\alpha}\right)\\ &\in X.\end{aligned}$$

دو مرجع [۲] و [۳] در سال‌های اخیر مراجع مناسبی در مورد فضاهای اورلیش تعمیم‌یافته هستند. تحقیقات متنوعی در سال‌های اخیر در این زمینه انجام شده است. برای نمونه مراجع [۱] و [۵] را ببینید.

۲ نتایج اصلی

در این بخش با استفاده از تعاریف و نمادهای بخش قبل، نتایجی در مورد فضاهای اورلیش مرتبط با یک فضای باناخ تابعی بیان می‌کنیم. در ابتدا تعریف زیر را ارائه می‌نماییم. در این مقاله بیشتر تمرکز روی تابع یانگ Φ است و تأثیر خواص این تابع روی فضای اورلیش ساخته‌شده از آن بررسی می‌شود.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم X یک فضای باناخ تابعی باشد که برای هر دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در X که برای μ-تقریباً هر $x \in \Omega$ داشته باشیم، $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$، و تابع $f \in X$ موجود باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $|f_n| \leq |f|$ $\mu-$ تقریباً همه‌جا، آنگاه $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_X = 0$. در این صورت می‌گوییم X در خاصیت DCT صدق می‌کند.

قضیه ۲.۲. با نمادهای بخش قبل داریم:

۱-اگر $X \subseteq L^{\infty}$، آنگاه $X \subseteq \mathcal{E}^{\Phi}$.

۲- $\mathcal{M}^{\Phi} \subseteq \mathcal{E}^{\Phi}$.

۳- اگر X دارای خاصیت DCT باشد، آنگاه $\mathcal{E}^{\Phi} \subseteq \mathcal{M}^{\Phi}$.

اثبات. (۱) فرض کنید $X \subseteq L^{\infty}$ و $f \in X$. در این صورت اگر برای هر $\alpha > 0$ قرار دهیم $A_{\alpha} = \{x \in \Omega : \frac{|f(x)|}{\alpha} \leq 1\}$، آنگاه

$$\Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right)\chi_{A_{\alpha}} \leq \Phi(1)\frac{|f|}{\alpha} \in X.$$

بنابراین با توجه به جامد بودن X داریم

$$\Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right)\chi_{A_{\alpha}} \in X. \tag{۱.۲}$$

ازطرفی به‌وضوح داریم $\chi_{(X-A_\alpha)} \leq \frac{|f|}{\alpha}$. بنابراین طبق جامد بودن X داریم، $\chi_{(X-A_\alpha)} \in X$. همچنین چون $f \in L^\infty$ عدد $M > ۰$ موجود است که $|f| \leq M$، $\mu-$ تقریباً همه‌جا. بنابراین چون X یک فضای خطی است،

$$\Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right)\chi_{(X-A_\alpha)} \leq \Phi\left(\frac{M}{\alpha}\right)\chi_{(X-A_\alpha)} \in X.$$

بنابراین با توجه به جامد بودن X داریم،

$$\Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right)\chi_{(X-A_\alpha)} \in X. \tag{۲.۲}$$

بنابراین از (۱.۲) و (۲.۲) داریم $\Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) \in X$. چون α دلخواه انتخاب شده بود، داریم $f \in \mathcal{E}^\Phi$.

(۲) فرض کنیم $f \in \mathcal{M}^\Phi$. در این صورت داریم،

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists f_k \in \mathcal{S}^\Phi : \|f - f_k\|_\Phi < \frac{۱}{۲k}.$$

با توجه به (۱) داریم $۲kf_k \in \mathcal{E}^\Phi$ و در نتیجه $\Phi(۲kf_k) \in X$. از طرفی با توجه به اینکه $\|۲k(f-f_k)\|_\Phi < ۱$، طبق تعریف نرم لکزومبورگ داریم،

$$\exists ۰ < \alpha \leq ۱,\ \Phi\left(\frac{۲k(f-f_k)}{\alpha}\right) \in X.$$

در نتیجه طبق جامد بودن X داریم $\Phi(۲k(f-f_k)) \in X$. از اینجا با توجه به اینکه Φ محدب است،

$$\begin{aligned}\Phi(kf) &= \Phi\left(\frac{۱}{۲}۲k(f-f_k) + \frac{۱}{۲}۲kf_k\right)\\ &\leq \frac{۱}{۲}\Phi(۲k(f-f_k)) + \frac{۱}{۲}\Phi(۲kf_k)\\ &\in X.\end{aligned}$$

حال برای هر $\alpha > ۰$ اگر عدد طبیعی k را طوری در نظر بگیریم که $k > \frac{۱}{\alpha}$، آنگاه با توجه به صعودی بودن تابع محدب Φ رابطهٔ زیر برقرار است،

$$\Phi\left(\frac{f}{\alpha}\right) \leq \Phi(kf) \in X$$

بنابراین با استفادهٔ مجدد از جامد بودن X داریم $f \in \mathcal{E}^\Phi$.

(۳) فرض کنید X دارای خاصیت DCT باشد و $f \in \mathcal{E}^\Phi$. در این صورت برای هر $\alpha > ۰$ داریم $\Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) \in X$. چون $f \in \mathcal{M}^\Phi_\circ$، دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=۱}^\infty$ از توابع پله‌ای چنان موجود است که $|s_۱| \leq |s_۲| \leq \ldots \leq |f|$، در نتیجه با توجه به جامد بودن X داریم، $\{s_n\}_{n=۱}^\infty \subseteq X^\Phi$ و در نتیجه $\{s_n\}_{n=۱}^\infty \subseteq \mathcal{S}^\Phi$. حال توجه می‌کنیم که

$$۰ \leq \Phi\left(\frac{|s_n - f|}{\alpha}\right) \leq \Phi\left(\frac{|۲f|}{\alpha}\right) \in X,$$

و

$$\lim_{n\to\infty}\Phi\left(\frac{|s_n - f|}{\alpha}\right) = ۰.$$ ، $\mu-$ تقریباً همه‌جا

از اینجا با توجه به اینکه X در خاصیت DCT صدق می‌کند، داریم

$$\forall \alpha > ۰,\ \lim_{n\to\infty}\left\|\Phi\left(\frac{|s_n - f|}{\alpha}\right)\right\|_X = ۰.$$

بنابراین دنبالهٔ $N_۱ \leq N_۲ \leq \ldots$ در اعداد طبیعی چنان موجود است که

$$\forall n \geq N_k,\ \left\|\Phi\left(\frac{|s_n - f|}{\frac{۱}{k}}\right)\right\|_X \leq ۱.$$

بنابراین زیردنبالهٔ $\{s_{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ از $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای این خاصیت است که،

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \|s_{N_k} - f\|_\Phi \leq \frac{1}{k}.$$

این نشان می‌دهد $f \xrightarrow{\|\cdot\|_\Phi} s_{N_k}$ و در نتیجه داریم $f \in \mathcal{M}^\Phi(\Omega)$. □

با توجه به تعاریف ارائه‌شده در بخش قبل ملاحظه می‌کنیم که عناصر فضای باناخ تابعی X می‌توانند مقادیر $\pm\infty$ را نیز داشته باشند. همچنین مقادیر تابع یانگ Φ نیز می‌توانند $+\infty$ شوند. در ادامه، فرض می‌کنیم توابع عضو X، $\mu-$ تقریباً همه‌جا حقیقی مقدار باشند، یعنی

$$f \in X \Rightarrow \mu(\{x \in X : f(x) = \pm\infty\}) = 0.$$

لم ۳.۲. فرض کنید $\Phi(x) = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.
(۱) اگر $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{A}$، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} \in X^\Phi \Rightarrow \chi_{E_1}, \chi_{E_2}, \ldots, \chi_{E_n} \in X.$$

(۲) $S^\Phi \subseteq \mathcal{E}^\Phi$.

اثبات. (۱) فرض کنیم $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$. بدون از دست رفتن کلیت قضیه، می‌توانیم فرض کنیم مجموعه‌های $E_1, E_2, \ldots, E_n$ دوبه‌دو جدا از هم هستند. زیرا برای نمونه $\chi_{E_1 \cup E_2} = \chi_{(E_1 - E_2) \cup (E_1 \cap E_2) \cup (E_2 - E_1)}$. اگر $f \in X^\Phi$، آنگاه

$$\exists \alpha > 0, \Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) = \Phi\left(\frac{|\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}|}{\alpha}\right) \in X.$$

بنابراین،

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi\left(\frac{|a_i|}{\alpha}\right) \chi_{E_i} \in X.$$

در نتیجه با توجه به جامد بودن X برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ داریم، $\Phi\left(\frac{|a_i|}{\alpha}\right) \chi_{E_i} \in X$. از اینجا و با استفادهٔ مجدد از جامد بودن و نیز شرط $x = 0 \iff \Phi(x) = 0$ داریم، $\chi_{E_1}, \chi_{E_2}, \ldots, \chi_{E_n} \in X$.
(۲) با توجه به (۱) واضح است. □

گزاره ۴.۲. (۱) $\exists x_1 : \Phi(x_1) = +\infty \Rightarrow X^\Phi \subseteq L^\infty$.
(۲) $\exists x_0, \forall 0 \leq x < x_0, \Phi(x) = 0 \Rightarrow L^\infty \subseteq X^\Phi$.
(۳) $\exists x_0, x_1 : \Phi([0, x_0]) = \{0\} \wedge \Phi(x_1) = +\infty \Rightarrow X^\Phi = L^\infty$.

اثبات. (۱) با توجه به اینکه عناصر X تقریباً همه‌جا حقیقی در نظر گرفته شده‌اند،

$$\begin{aligned} f \in X^\Phi &\Longrightarrow \exists \alpha > 0, \Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) \in X \\ &\Longrightarrow \mu(\{x \in \Omega : \Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) = +\infty\}) = 0 \\ &\Longrightarrow \mu(\{x \in \Omega : \Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) \geq x_0\}) = 0) \\ &\Longrightarrow |f| \leq \alpha \Phi^{-1}(x_0), \mu - a.e. \\ &\Longrightarrow f \in L^\infty. \end{aligned}$$

(۲) فرض کنیم Φ روی بازهٔ $[\circ, x_{۱})$ برابر صفر باشد. در این صورت داریم،

$$\begin{aligned} f \in L^{\infty} &\Longrightarrow \exists k > \circ, |f| < k, \mu - a.e. \\ &\Longrightarrow \exists \alpha (= \frac{k}{x_{۱}}) > \circ, \frac{|f|}{\alpha} < x_{۱} \\ &\Longrightarrow \exists \alpha > \circ, \Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) (= \circ) \in X \\ &\Longrightarrow f \in X^{\Phi}. \end{aligned}$$

(۳) از (۱) و (۲) به‌راحتی به دست می‌آید. □

قضیه ۵.۲. فرض کنیم $\mu(\Omega) < \infty$ ، $x_{\circ} \in (\circ, \infty)$ و Φ تابعی پیوسته و محدب روی $(\circ, x_{۱})$ باشد. اگر

$$\Phi(x) := \begin{cases} \circ, & x = \circ \\ \Phi_{۱}(x), & \circ < x < x_{\circ} \\ +\infty, & x \geq x_{\circ} \end{cases},$$

آنگاه،

(۱) $X^{\Phi} = L^{\infty}$.

(۲) $\mathcal{M}^{\Phi} = L^{\infty}$.

اثبات. (۱) با توجه به قسمت (۱) گزاره ۴.۲ داریم، $X^{\Phi} \subseteq L^{\infty}$. ازطرفی اگر $f \in L^{\infty}$، آنگاه

$$\forall \circ < \epsilon < x_{\circ}, \exists k > \circ, \frac{|f|}{k} < x_{\circ} - \epsilon, \ \mu - a.e.$$

بنابراین

$$\frac{|f|}{k} < (x_{\circ} - \epsilon)\chi_{\Omega}, \ \mu - a.e. \tag{۳.۲}$$

بنابراین اگر $\circ < \epsilon < x_{\circ}$ را طوری انتخاب کنیم که، $x_{\circ} - \epsilon < ۱$، آنگاه با توجه به نامساوی (۳.۲) به‌ازای یک $k_{\circ} > \circ$ داریم، $\frac{|f|}{k_{\circ}} < \chi_{\Omega}$، $\mu-$ تقریباً همه‌جا. بنابراین،

$$\Phi\left(\frac{|f|}{k_{\circ}}\right) \leq \Phi(\chi_{\Omega}). \tag{۴.۲}$$

حال با فرض $X \ni \chi_{\Omega} = ۱$ ملاحظه می‌کنیم که برای هر $\alpha > \circ$ داریم، $\alpha \in X$. با توجه به این موضوع، جامد بودن X و رابطه (۴.۲) داریم، $\Phi\left(\frac{|f|}{k_{\circ}}\right) \in X$. بنابراین $f \in X^{\Phi}$ و در نتیجه $L^{\infty} \subseteq X^{\Phi}$ و حکم (۱) ثابت شده است.

(۲) با توجه به اینکه طبق فرض قضیه $X \ni \chi_{\Omega} = ۱$ و نیز رابطهٔ $\Phi(\circ) = \circ$ ایجاب می‌کند که $\Phi^{-۱}\left(\frac{۱}{\|۱\|_X}\right) \neq \circ$، برای هر $\circ \neq f \in L^{\infty}$ داریم،

$$\begin{aligned} |f| \leq \|f\|_{\infty}, \ \mu - a.e. &\Longrightarrow \frac{|f|}{\|f\|_{\infty}} \leq ۱, \ \mu - a.e. \\ &\Longrightarrow \frac{|f|}{\|f\|_{\infty} / \Phi^{-۱}\left(\frac{۱}{\|۱\|_X}\right)} \leq \Phi^{-۱}\left(\frac{۱}{\|۱\|_X}\right), \ \mu - a.e. \\ &\Longrightarrow \Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_{\infty} / \Phi^{-۱}\left(\frac{۱}{\|۱\|_X}\right)}\right) \leq \Phi\left(\Phi^{-۱}\left(\frac{۱}{\|۱\|_X}\right)\right) \leq \frac{۱}{\|۱\|_X}. \end{aligned}$$

اِین رابطه با توجه به جامد بودن X نشان می‌دهد که اگر قرار دهیم، $\alpha = \frac{\|f\|_\infty}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\|1\|_X}\right)}$، آنگاه $\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right)\right\|_X \leq 1$ و در نتیجه با توجه به تعریف نرم لگزومبورگ داریم،

$$\|f\|_\Phi \leq \frac{1}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\|1\|_X}\right)} \cdot \|f\|_\infty. \tag{۵.۲}$$

از رابطه (۵.۲) و قضیهٔ گراف بسته نتیجه می‌شود که دو نرم $\|\cdot\|_\infty$ و $\|\cdot\|_\Phi$ روی فضای $X^\Phi(= L^\infty)$ معادل هستند. از طرفی شرط $\chi_\Omega \in X$ باعث می‌شود که $\mathcal{S}^\Phi$ برابر کل فضای توابع پله‌ای در فضای $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ باشد. حال، چون مجموعهٔ توابع پله‌ای در فضای $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ چگال هستند، داریم

$$\mathcal{M}^\Phi = \overline{\mathcal{S}^\Phi}^{\|\cdot\|_{Phi}} = \overline{\mathcal{S}^\Phi}^{\|\cdot\|_\infty} = L^\infty.$$

□

۳ نتیجه‌گیری

فضاهای اورلیش تعمیم‌یافتهٔ X^Φ مرتبط با فضای باناخ تابعی X، با در نظر گرفتن مفروضاتی مانند جامد بودن روِی X خواصِی بااهمیت و شناخته‌شده در فضاهای اورلیش و فضاهای لبگ را خواهند داشت. با استفاده از این خواص، نتایج بسیاری را می‌توان در این فضاها به دست آورد. مطالعه روی این فضاها و بررسی خواص آنها مانند شرایط جبر بودن، وجود عنصر همانی تقریبی کران‌دار، فضاپذیر بودن و موارد بسیار دیگر در ادامهٔ این تحقیقات قابل انجام هستند ([۱] و [۵] را ببینید). با توجه به اینکه فضای اورلیش تعمیم‌یافتهٔ X^Φ با جایگزین نمودن فضای L^1 با فضای باناخ تابعی X به دست می‌آید، با قرار دادن فضاهای مختلف به‌جای X می‌توان به فضاهای باناخ جدیدی دست یافت.

References

[1] Bagheri Salec, A., Ivković, S., & Tabatabaie, S.M. (2022). Spaceability on some classes of Banach spaces. *Mathematical Inequalities and Applications*, 25(3), 659–672. DOI: https://doi.org/10.7153/mia-2022-25-41.

[2] Campo, R.del., Fernández, A., Mayoral, F., & Naranjo, F. (2020). Orlicz spaces associated to a quasi-Banach function space. Applications to vector measures and interpolation. *Collect. Math*. DOI: https://doi.org/10.1007/s13348-020-00295-1.

[3] Jain, P., Persson, L.E., & Upreti, P. (2007). Inequalities and properties of some generalized Orlicz classes and spaces. *Acta Math. Hungar*, 117, 161–174. DOI: https://doi.org/10.1007/s10474-007-6083-9.

[4] Rao, M.M., & Ren, Z.D. (1991). Theory of Orlicz Spaces. *Marcel Dekker, New York*.

[5] Tabatabaie, S.M., & Bagheri Salec, A.R. (2023). On The Inclusions Of X^Φ Spaces. *Mathematica Bohemica*, 148, 65–72. DOI: https://doi.org/https://doi.org/10.21136/MB.2022.0064-21.