Measure Algebras and Applications

# Some results on pseudo-duals of frames in Hilbert spaces

**Zeinab Javadi**[1]

1. Shahab Danesh University, Qom, Iran. Email: z.javadi@shdu.ac.ir

**Article Info**

**Article type:**
Research Article

**Article history:**
Received: 11 June 2023
Received in revised form:
25 July 2023
Accepted: 30 July 2023
Published Online:
30 September 2023

**Keywords:**
Hilbert space,
Frame,
Dual,
Pseudo-dual,
Approximate dual

**2020 Mathematics Subject Classification:**
42C15

**ABSTRACT**

In this paper, we obtain some results for pseudo-duals, approximate duals, and duals of continuous and discrete frames in Hilbert spaces. In particular, the ones constructed by bounded operators inserted between the synthesis and analysis operators of a frame are considered. We show that under some conditions, they are stable under the action of bounded operators and small perturbations.

**Cite this article:** Javadi, Z. (2023). Some results on pseudo-duals of frames in Hilbert spaces. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 63–73. http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9555.1009


**Publisher:** University of Qom
**DOI**: 10.22091/MAA.2023.9555.1009

## Extended Abstract

### Introduction

Frames for Hilbert spaces were introduced in [4]. Let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space and let $\mathbb{I}$ be a finite or countable index set. A family $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}} \subseteq \mathcal{H}$ is a *discrete frame* for $\mathcal{H}$, if there exist $0 < A_{\mathcal{F}} \leq B_{\mathcal{F}} < \infty$, such that

$$A_{\mathcal{F}}\|f\|^2 \leq \sum_{i\in\mathbb{I}} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq B_{\mathcal{F}}\|f\|^2,$$

for each $f \in \mathcal{H}$. The sequence $\mathcal{F}$ is called a *Bessel sequence* if only the second inequality is required.

Continuous frames were introduced in [1, 6]. Let $(\Omega, \mu)$ be a measure space and let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space. A weakly-measurable mapping $F : \Omega \to \mathcal{H}$ is called a *continuous frame* for $\mathcal{H}$ with respect to $(\Omega, \mu)$ if there exist two positive constants $A_F, B_F$ such that for each $f \in \mathcal{H}$, we have

$$A_F\|f\|^2 \leq \int_\Omega |\langle f, F(\omega)\rangle|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) \leq B_F\|f\|^2.$$

The positive numbers $A_F$ and $B_F$ are called the *lower and upper bounds* of the frame, respectively. The mapping $F$ is called *tight* if $A_F = B_F$ and if $A_F = B_F = 1$, it is called a *Parseval frame*. If only the second inequality is required, we say that $F$ is a *continuous Bessel mapping*. Suppose that $F : \Omega \to \mathcal{H}$ is a continuous Bessel mapping. Then the operator $T_F : L^2(\Omega, \mu) \to \mathcal{H}$ weakly defined by

$$\langle T_F\varphi, f\rangle = \int_\Omega \varphi(\omega)\langle F(\omega), f\rangle \mathrm{d}\mu(\omega), \quad \varphi \in L^2(\Omega, \mu), f \in \mathcal{H},$$

is well-defined and bounded with $\|T_F\| \leq \sqrt{B_F}$. Indeed, $\int_\Omega \varphi(\omega)F(\omega)\mathrm{d}\mu(\omega)$ is an element of $\mathcal{H}$ and $T_F$ can be written as $T_F(\varphi) = \int_\Omega \varphi(\omega)F(\omega)\mathrm{d}\mu(\omega)$. The operator $T_F$ is called the *synthesis operator* of $F$ and its adjoint which is given by

$$T_F^* : \mathcal{H} \to L^2(\Omega, \mu), (T_F^* f)(\omega) = \langle f, F(\omega)\rangle, \quad \omega \in \Omega, f \in \mathcal{H},$$

is the *analysis operator* of $F$. The operator $S_F = T_F T_F^*$ is a positive operator and if $F$ is a continuous frame, then $S_F$ is also an invertible operator and called the *frame operator* of $F$. In fact, for each $f, g \in \mathcal{H}$, we have

$$\langle S_F f, g\rangle = \int_\Omega \langle f, F(\omega)\rangle\langle F(\omega), g\rangle \mathrm{d}\mu(\omega).$$

A Bessel mapping $G$ such that $T_G T_F^*$ is equal to the identity operator on $\mathcal{H}$ is called a dual for $F$. A Bessel mapping $G$ is a pseudo-dual for $F$ if $T_G T_F^*$ is invertible. If the distance (with respect to the norm) between $T_G T_F^*$ and the identity operator on $\mathcal{H}$ is less than one, then $G$ is called an approximate dual of $F$. Let $F$ and $G$ be two Bessel mappings and let $Q \in B(L^2(\Omega, \mu))$. The function $G$ is said to be a *$Q$-pseudo-dual* (resp. *$Q$-dual*, *$Q$-approximate dual*) for $F$ if the operator $S_{G,Q,F}$ defined by $S_{G,Q,F} := T_G Q T_F^*$ is invertible (resp. $S_{G,Q,F} = Id_{\mathcal{H}}$, $\|S_{G,Q,F} - Id_{\mathcal{H}}\| < 1$). For more results about pseudo-duals and approximate duals of continuous frames, see [10].

## Conclusion

The main results of the paper are:

***Theorem* 0.1.** *Let $F, G$ be two Bessel mappings and let $T \in B(\mathcal{H})$. In this case, $TF : \Omega \to \mathcal{H}$ and $TG : \Omega \to \mathcal{H}$ defined by $TF(x) = T(F(x))$ and $TG(x) = T(G(x))$ are Bessel mappings. Moreover, if $TG$ is a Q-pseudo-dual of $TF$, then T is right-invertible.*

***Theorem* 0.2.** *Let $G$ be a Q-pseudo-dual of $F$ and $T \in B(\mathcal{H})$. If $T$ is invertible, then $TG$ is a Q-pseudo-dual of $TF$.*

***Theorem* 0.3.** *Let $F, G, M : \Omega \to \mathcal{H}$ be three Bessel mappings. Then $F - M : \Omega \to \mathcal{H}$ and $G - M : \Omega \to \mathcal{H}$ defined by $(F-M)(x) = F(x) - M(x)$ and $(G-M)(x) = G(x) - M(x)$ are Bessel mappings. Moreover, if $\|S_{G,Q,M}\| < 1$ and $G$ is a Q-dual of $F$, then $G$ is a Q-approximate dual of $F - M$. Also, if $\|S_{M,Q,F}\| < 1$ and $G$ is a Q-dual of $F$, then $G - M$ is a Q-approximate dual of $F$.*

**جبرهای اندازه و کاربردها**
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۷۳-۶۳

# برخی نتایج در مورد شبه‌دوگان‌های قاب‌ها در فضاهای هیلبرت

**زینب جوادی** [۱]

۱. دانشگاه شهاب دانش، قم، ایران. رایانامه: z.javadi@shdu.ac.ir

**اطلاعات مقاله**

**نوع مقاله:**
مقالهٔ پژوهشی

**تاریخ دریافت:** ۱۴۰۲/۳/۲۱
**تاریخ بازنگری:** ۱۴۰۲/۵/۳
**تاریخ پذیرش:** ۱۴۰۲/۵/۸
**تاریخ انتشار:** ۱۴۰۲/۷/۸

**کلمات کلیدی:**
فضای هیلبرت،
قاب،
دوگان،
شبه‌دوگان،
دوگان تقریبی

**رده‌بندی ریاضی:**
42C15

**چکیده**

در این مقاله، نتایجی در مورد شبه‌دوگان‌ها، دوگان‌های تقریبی و دوگان‌های قاب‌های پیوسته و قاب‌های گسسته در فضاهای هیلبرت به دست می‌آیند. به‌ویژه، شبه‌دوگان‌ها، دوگان‌های تقریبی و دوگان‌هایی که با قرار گرفتن یک عملگر کران‌دار بین عملگر ترکیب و تحلیل قاب ساخته می‌شوند، مورد توجه قرار می‌گیرند. نشان داده می‌شود که درصورت برقراری برخی از شرایط، آنها تحت عملگرهای کران‌دار و اختلال‌های کوچک پایا هستند.

**استناد:** جوادی، زینب. (۱۴۰۲). برخی نتایج در مورد شبه‌دوگان‌های قاب‌ها در فضاهای هیلبرت. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۷۳-۶۳.

http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9555.1009

**ناشر:** دانشگاه قم.

## ۱ مقدمه و پیش‌نیازها

مفهوم قاب‌ها در فضاهای هیلبرت برای اولین بار در سال ۱۹۵۲، توسط دافین [1] و شیفر [2] در [۴] معرفی شد و در سال ۱۹۸۶ توسط دوبچیز [3]، گراسمان [4] و میر [5] در [۳] مورد بازنگری قرار گرفت. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر و $I$ یک مجموعهٔ متناهی یا شمارای نامتناهی باشد. یک خانواده مانند $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ یک **قاب** (قاب گسسته) برای $\mathcal{H}$ است هرگاه $0 < A_{\mathcal{F}} \leq B_{\mathcal{F}} < \infty$ موجود باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$A_{\mathcal{F}}\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I}|\langle f, f_i\rangle|^2 \leq B_{\mathcal{F}}\|f\|^2,$$

چنانچه نامساوی سمت راست برقرار باشد $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ را یک **دنبالهٔ بسل** می‌نامیم. $A_{\mathcal{F}}$ و $B_{\mathcal{F}}$ را به ترتیب **کران پایین** و **کران بالای** قاب می‌نامیم (که یکتا نیستند). سوپریمم مجموعهٔ متشکل از تمام کران‌های پایین را کران پایین بهینه و اینفیمم مجموعهٔ متشکل از تمام کران‌های بالا را کران بالای بهینه می‌نامیم. یک قاب را **تنگ** می‌گوییم هرگاه $A_{\mathcal{F}} = B_{\mathcal{F}}$ و آن را **پارسوال** می‌نامیم هرگاه $A_{\mathcal{F}} = B_{\mathcal{F}} = 1$.

**تعریف ۱.۱.** فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل باشد. در این صورت

(۱) عملگر ترکیب $\mathcal{F}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_{\mathcal{F}} : \ell^2(I) \longrightarrow \mathcal{H}, \quad T_{\mathcal{F}}(\{c_i\}_{i\in I}) = \textstyle\sum_{i\in I} c_i f_i.$$

$T_{\mathcal{F}}$ خوش‌تعریف، خطی و کران‌دار است و به‌سادگی دیده می‌شود $\|T_{\mathcal{F}}\| \leq \sqrt{B_{\mathcal{F}}}$.

(۲) الحاقی عملگر $T_{\mathcal{F}}$، که به‌صورت زیر به دست می‌آید را عملگر تحلیل $\mathcal{F}$ می‌نامیم.

$$T^*_{\mathcal{F}} : \mathcal{H} \longrightarrow \ell^2(I), \quad T^*_{\mathcal{F}}(f) = \{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I}.$$

(۳) $S_{\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}T^*_{\mathcal{F}}$ عملگر بسل $\mathcal{F}$ نامیده می‌شود و به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم:

$$S_{\mathcal{F}}f = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle f_i.$$

عملگر $S_{\mathcal{F}}$، عملگری مثبت است. اگر $\mathcal{F}$ یک قاب باشد، آن‌گاه نامساوی عملگری

$$A_{\mathcal{F}} \cdot Id_{\mathcal{H}} \leq S_{\mathcal{F}} \leq B_{\mathcal{F}} \cdot Id_{\mathcal{H}}$$

برقرار است. اگر $\mathcal{F}$ یک قاب باشد، $S_{\mathcal{F}}$ را عملگر قاب $\mathcal{F}$ می‌نامیم که در این حالت، عملگری وارون‌پذیر است.

فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب گسسته در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. اگر $T$ یک عملگر کران‌دار و پوشا روی $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه $\{Tf_i\}_{i\in I}$ نیز یک قاب گسسته برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است. با توجه به مطالب فوق، اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب گسسته در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه $\{S^{-1}_{\mathcal{F}}f_i\}_{i\in I}$ نیز یک قاب با کران‌های $B^{-1}_{\mathcal{F}}$ و $A^{-1}_{\mathcal{F}}$ است. چنانچه قرار دهیم $\widetilde{f_i} := S^{-1}_{\mathcal{F}}f_i$، در این صورت هر $f \in \mathcal{H}$ را می‌توان به شکلی که در زیر بیان شده نمایش داد. فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم:

$$f = \sum_{i\in I}\langle f, \widetilde{f_i}\rangle f_i = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle \widetilde{f_i}.$$

فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت، قاب $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in I}$ در $\mathcal{H}$ را یک دوگان برای $\{f_i\}_{i\in I}$ گوییم هرگاه به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$f = \sum_{i\in I}\langle f, g_i\rangle f_i.$$

دوگان $\widetilde{\mathcal{F}} = \{S^{-1}_{\mathcal{F}}f_i\}_{i\in I}$ را دوگان کانونی (استاندارد) متناظر با قاب $\{f_i\}_{i\in I}$ می‌نامیم.

[1] Duffin
[2] Schaefer
[3] Daubechies
[4] Grossmann
[5] Meyer

**قضیه ۲.۱.** فرض کنیم $\mathcal{F}=\{f_i\}_{i\in I}$ و $\mathcal{G}=\{g_i\}_{i\in I}$ دو دنبالهٔ بسل در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند. در این صورت، گزاره‌های زیر معادل هستند:

(۱) برای هر $f\in\mathcal{H}$ داریم $f=\sum_{i\in I}\langle f,g_i\rangle f_i$.

(۲) برای هر $f\in\mathcal{H}$ داریم $f=\sum_{i\in I}\langle f,f_i\rangle g_i$.

(۳) برای هر $f,g\in\mathcal{H}$ داریم $\langle f,g\rangle=\sum_{i\in I}\langle f,f_i\rangle\langle g_i,g\rangle$.

قاب‌های پیوسته در یک فضای هیلبرت، تعمیم قاب‌های گسسته هستند که در ادامه به معرفی آنها می‌پردازیم. تعریف قاب‌های پیوسته توسط کایزر [1] در [۶] و به‌طور مستقل توسط علی [2]، آنتوآین [3] و گازیوو [4] در [۱] صورت گرفت. گاباردو [5] و هان [6] در [۵] این قاب‌ها را «قاب‌های وابسته به فضاهای اندازه» نامیده‌اند. در سراسر این بخش، $\mathcal{H}$ را یک فضای هیلبرت مختلط جدایی‌پذیر و $(\Omega,\mu)$ را یک فضای اندازه با اندازهٔ مثبت در نظر می‌گیریم. نگاشت $F:\Omega\longrightarrow\mathcal{H}$ را یک **قاب پیوسته** برای $\mathcal{H}$ نسبت به $(\Omega,\mu)$ می‌نامیم، هرگاه

(۱) برای هر $f\in\mathcal{H}$، تابع $\omega\mapsto\langle f,F(\omega)\rangle$ روی $\Omega$ اندازه‌پذیر باشد یعنی $F$ به‌طور ضعیف اندازه‌پذیر باشد.

(۲) ثابت‌های $0<A_F\leq B_F<\infty$ چنان موجود باشند که برای هر $f\in\mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$A_F\|f\|^2\leq\int_\Omega|\langle f,F(\omega)\rangle|^2d\mu(\omega)\leq B_F\|f\|^2.$$

اعداد ثابت $A_F$ و $B_F$ کران‌های قاب پیوسته $F$ نام دارند. اگر $A_F=B_F$، آن‌گاه $F$ را یک قاب پیوستهٔ تنگ و اگر $A_F=B_F=1$، آن‌گاه آن را یک قاب پیوستهٔ پارسوال می‌نامیم. نگاشت $F$ را یک نگاشت بسل پیوسته از $\Omega$ به توی $\mathcal{H}$ گوییم هرگاه نامساوی سمت راست برقرار باشد. در این حالت $B_F$ را یک کران بسل می‌نامیم. (دقت کنیم که اگر $\mu$ اندازهٔ شمارشی باشد و $\Omega=\mathbb{N}$ ، آن‌گاه $F$ یک قاب گسسته خواهد بود).

**تعریف ۳.۱.** فرض کنیم $F:\Omega\to\mathcal{H}$ یک نگاشت بسل پیوسته باشد. در این صورت

(الف) عملگر $T_F:L^2(\Omega,\mu)\longrightarrow\mathcal{H}$ که به‌صورت

$$\langle T_Fg,f\rangle=\int_\Omega g(\omega)\langle F(\omega),f\rangle d\mu(\omega),\quad f\in\mathcal{H},g\in L^2(\Omega,\mu),$$

تعریف می‌شود را **عملگر ترکیب** $F$ می‌نامیم (به‌آسانی ثابت می‌شود که $T_F$ خوش‌تعریف، خطی و کران‌دار است و داریم $\|T_F\|\leq\sqrt{B_F}$).

(ب) عملگر $T_F^*:\mathcal{H}\longrightarrow L^2(\Omega,\mu)$ با ضابطهٔ $(T_F^*f)(\omega)=\langle f,F(\omega)\rangle$ را **عملگر تحلیل** $F$ می‌نامیم.

(پ) عملگر $S_F=T_FT_F^*$ را عملگر $F$ می‌نامیم.

فرض کنیم $F$ یک قاب پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به $(\Omega,\mu)$ باشد. در این صورت $T_F$ عملگری پوشا است. اگر $F$ یک قاب پیوسته برای $\mathcal{H}$ نسبت به $(\Omega,\mu)$ باشد، آن‌گاه عملگر $S_F$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود را **عملگر قاب** پیوسته می‌گوییم که یک عملگر مثبت و وارون‌پذیر است:

$$S_F:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}\quad S_F(f)=\int_\Omega\langle f,F(\omega)\rangle F(\omega)d\mu(\omega),\qquad f\in\mathcal{H}.$$

[1] G. Kaiser
[2] S. T. Ali
[3] J. P. Antoine
[4] J. P. Gazeau
[5] Gabardo
[6] Han

فرض کنیم $F$ و $G$ دو نگاشت بسل از $\Omega$ به توی $\mathcal{H}$ باشند. در این صورت زوج $(F,G)$ را یک زوج **دوگان** برای $\mathcal{H}$ می‌نامیم هرگاه برای هر $f,g\in\mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$\langle f,g\rangle=\int_\Omega\langle f,F(\omega)\rangle\langle G(\omega),g\rangle d\mu(\omega).$$

مشخص است که اگر نگاشت‌های $T_F$ و $T_G$ به‌ترتیب عملگرهای ترکیب برای نگاشت‌های بسل $F$ و $G$ باشند، آن‌گاه برای هر $f,g\in\mathcal{H}$ داریم:

$$\langle T_GT_F^*f,g\rangle=\langle T_F^*f,T_G^*g\rangle=\int_\Omega\langle f,F(\omega)\rangle\langle G(\omega),g\rangle d\mu(\omega).$$

بنابراین $(F,G)$ یک زوج دوگان برای $\mathcal{H}$ است اگر و تنها اگر $T_GT_F^*=Id_{\mathcal{H}}$. علاوه‌بر دوگان‌ها، دوگان‌های تقریبی [۲، ۷، ۱۱، ۱۲] و شبه‌دوگان‌ها [۱۰] هم در نظریهٔ قاب‌ها حائز اهمیت هستند. در ادامه، نتایج جدیدی در مورد این مفاهیم به دست می‌آوریم.

## ۲ نتایج اصلی

این بخش را با تعریف زیر، برگرفته از [۸، ۹] و [۱۰] آغاز می‌کنیم.

**تعریف ۱.۲.** فرض کنیم $F$ و $G$ دو نگاشت بسل پیوسته باشند و $Q\in B(L^2(\Omega,\mu))$.

(الف) تابع $G$ را یک $Q$- شبه‌دوگان $F$ می‌نامیم اگر عملگر $S_{G,Q,F}$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$S_{G,Q,F}:=T_GQT_F^*,$$

وارون‌پذیر باشد.

(ب) تابع $G$ را یک $Q$-دوگان تقریبی $F$ می‌نامیم اگر $\|S_{G,Q,F}-Id_{\mathcal{H}}\|<1$.

(پ) تابع $G$ را یک $Q$-دوگان $F$ می‌نامیم اگر $S_{G,Q,F}=Id_{\mathcal{H}}$.

از تعریف فوق، مشخص است که یک $Q$-دوگان $F$ یک $Q$-دوگان تقریبی $F$ و یک $Q$-دوگان تقریبی $F$ یک $Q$- شبه‌دوگان $F$ است.

**قضیه ۲.۲.** فرض کنیم $F$ و $G$ دو نگاشت بسل باشند و $T\in B(\mathcal{H})$. در این صورت نگاشت‌های $TF:\Omega\longrightarrow\mathcal{H}$ و $TG:\Omega\longrightarrow\mathcal{H}$ که به‌صورت $TF(x)=T(F(x))$ و $TG(x)=T(G(x))$ تعریف می‌شوند، نگاشت‌های بسل هستند. علاوه بر این، اگر $TG$ یک $Q$- شبه‌دوگان $TF$ باشد، آن‌گاه $T$ وارون‌پذیر راست است.

اثبات. چون به‌ازای هر $f\in\mathcal{H}$، نگاشت

$$x\mapsto\langle F(x),f\rangle$$

از $\Omega$ به $\mathbb{C}$ اندازه‌پذیر است، پس به‌ازای هر $f\in\mathcal{H}$، نگاشت

$$x\mapsto\langle TF(x),f\rangle=\langle F(x),T^*f\rangle$$

از $\Omega$ به $\mathbb{C}$ اندازه‌پذیر است. اینک، به‌ازای هر $f\in\mathcal{H}$، داریم:

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\langle f,TF(x)\rangle|^2d\mu(x)&=\int_\Omega|\langle T^*f,F(x)\rangle|^2d\mu(x)\\&\leqslant B_F\|T^*f\|^2\leqslant B_F\|T^*\|^2\|f\|^2\end{aligned}$$

پس $TF$ یک نگاشت بسل است. به‌طور مشابه، می‌توان نشان داد که $TG$ نیز یک نگاشت بسل است. اکنون فرض می‌کنیم $TG$ یک $Q$-شبه‌دوگان $TF$ باشد؛ بنابراین عملگر $S_{TG,Q,TF}$ وارون‌پذیر است. از طرفی برای هر $\varphi \in L^2(\Omega, \mu)$ و $f \in \mathcal{H}$ داریم:

$$\begin{aligned}\langle T_{TF}\varphi, f\rangle &= \int_\Omega \varphi(\omega)\langle TF(\omega), f\rangle d\mu(\omega)\\ &= \int_\Omega \varphi(\omega)\langle F(\omega), T^*f\rangle d\mu(\omega)\\ &= \langle T_F\varphi, T^*f\rangle = \langle TT_F\varphi, f\rangle,\end{aligned}$$

پس $T_{TF} = TT_F$. به‌طور مشابه داریم $T_{TG} = TT_G$. لذا

$$S_{TG,Q,TF}(f) = T_{TG}QT^*_{TF}(f) = T(T_GQT^*_F)T^*(f)$$

چون $S_{TG,Q,TF}$ وارون‌پذیر است، پس $T$ وارون‌پذیر راست است. □

**قضیه ۳.۲.** فرض کنیم نگاشت بسل $G$ یک $Q$- شبه‌دوگان برای نگاشت بسل $F$ باشد و $T \in B(\mathcal{H})$. اگر $T$ وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $TG$ یک $Q$- شبه‌دوگان برای $TF$ است.

اثبات. در برهان قضیه ۲.۲، تساوی زیر حاصل شد:

$$S_{TG,Q,TF} = T(T_GQT^*_F)T^*.$$

اکنون فرض کنیم $T$ وارون‌پذیر باشد، داریم:

$$((T^*)^{-1}S^{-1}_{G,Q,F}T^{-1})S_{TG,Q,TF} = (T^*)^{-1}S^{-1}_{G,Q,F}T^{-1}TT_GQT^*_FT^* = Id_{\mathcal{H}}.$$

به‌طور مشابه داریم

$$S_{TG,Q,TF}(T^*)^{-1}S^{-1}_{G,Q,F}T^{-1} = Id_{\mathcal{H}}.$$

پس $S_{TG,Q,TF}$ وارون‌پذیر است، لذا $TG$ یک $Q$- شبه‌دوگان برای $TF$ است. □

**نتیجه ۴.۲.** فرض کنیم نگاشت بسل $G$ یک $Q$- شبه‌دوگان برای نگاشت بسل $F$ باشد و اگر $T$ یک عملگر یکانی روی $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه $TG$ یک $Q$- شبه‌دوگان برای $TF$ است.

اثبات. با توجه به اینکه هر عملگر یکانی، وارون‌پذیر است، حکم از قضیه ۳.۲ به دست می‌آید. □

اگر اندازهٔ شمارشی در نظر بگیریم، احکام فوق برای قاب‌های گسسته نیز به دست می‌آیند:

**قضیه ۵.۲.** فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ و $\{g_i\}_{i\in I}$ دو دنبالهٔ بسل باشند و $T \in B(\mathcal{H})$. در این صورت، $\{Tf_i\}_{i\in I}$ و $\{Tg_i\}_{i\in I}$ دنباله‌های بسل هستند. علاوه‌بر این، اگر $\{Tg_i\}_{i\in I}$ یک $Q$- شبه‌دوگان $\{Tf_i\}_{i\in I}$ باشد، آن‌گاه $T$ وارون‌پذیر راست است.

**قضیه ۶.۲.** فرض کنیم دنبالهٔ بسل $\{g_i\}_{i\in I}$ یک $Q$- شبه‌دوگان برای $\{f_i\}_{i\in I}$ باشد و $T \in B(\mathcal{H})$. اگر $T$ وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $\{Tg_i\}_{i\in I}$ یک $Q$- شبه‌دوگان برای $\{Tf_i\}_{i\in I}$ است.

**نتیجه ۷.۲.** فرض کنیم دنبالهٔ بسل $\{g_i\}_{i\in I}$ یک $Q$- شبه‌دوگان برای دنبالهٔ بسل $\{f_i\}_{i\in I}$ باشد. اگر $T$ یک عملگر یکانی روی $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه $\{Tg_i\}_{i\in I}$ یک $Q$- شبه‌دوگان برای $\{Tf_i\}_{i\in I}$ است.

**قضیه ۸.۲.** فرض کنیم $F, G, M : \Omega \to \mathcal{H}$ سه نگاشت بسل باشند. در این صورت، $F - M : \Omega \to \mathcal{H}$ و $G - M : \Omega \to \mathcal{H}$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند، نگاشت‌های بسل هستند

$$F - M(x) = F(x) - M(x), \quad G - M(x) = G(x) - M(x).$$

علاوه‌بر این، اگر $\|S_{G,Q,M}\| < 1$ و $G$ یک $Q$-دوگان $F$ باشد، آن‌گاه $G$ یک $Q$-دوگان تقریبی $F - M$ است. همچنین اگر $\|S_{M,Q,F}\| < 1$ و $G$ یک $Q$-دوگان $F$ باشد، آن‌گاه $G - M$ یک $Q$-دوگان تقریبی $F$ است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $F-M$ یک نگاشت بسل است. فرض کنیم $f \in \mathcal{H}$ و $x \in \Omega$. داریم:

$$\langle f, F(x)-M(x)\rangle = \langle f, F(x)\rangle - \langle f, M(x)\rangle$$

چون نگاشت‌های $x \mapsto \langle f, F(x)\rangle$ و $x \mapsto \langle f, M(x)\rangle$ اندازه‌پذیر هستند، نگاشت $x \mapsto \langle f, F(x)-M(x)\rangle$ نیز اندازه‌پذیر است. همچنین

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\langle f, F(x)-M(x)\rangle|^۲ d\mu(x) &= \int_\Omega |\langle f, F(x)\rangle - \langle f, M(x)\rangle|^۲ d\mu(x)\\
&\leqslant \int_\Omega (|\langle f, F(x)\rangle| + |\langle f, M(x)\rangle|)^۲ d\mu(x)\\
&= \int_\Omega |\langle f, F(x)\rangle|^۲ d\mu(x) + \int_\Omega |\langle f, M(x)\rangle|^۲ d\mu(x)\\
&\quad + ۲\int_\Omega |\langle f, F(x)\rangle||\langle f, M(x)\rangle| d\mu(x)\\
&\leqslant \int_\Omega |\langle f, F(x)\rangle|^۲ d\mu(x) + \int_\Omega |\langle f, M(x)\rangle|^۲ d\mu(x)\\
&\quad + ۲\left(\int_\Omega |\langle f, F(x)\rangle|^۲ d\mu(x)\right)^{\frac{۱}{۲}} \left(\int_\Omega |\langle f, M(x)\rangle|^۲ d\mu(x)\right)^{\frac{۱}{۲}}\\
&\leqslant B_F\|f\|^۲ + B_M\|f\|^۲ + ۲\sqrt{B_F B_M}\|f\|^۲\\
&= (\sqrt{B_F} + \sqrt{B_M})^۲\|f\|^۲,
\end{aligned}$$

پس $F-M$ یک نگاشت بسل است. به‌طور مشابه، ثابت می‌شود که $G-M$ نیز یک نگاشت بسل است. حال، فرض می‌کنیم $G$ یک $Q$-دوگان $F$ باشد و $\|S_{G,Q,M}\| < ۱$. به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ و $x \in \Omega$ داریم:

$$\begin{aligned}
(T^*_{F-M}f)(x) = \langle f, (F-M)(x)\rangle &= \langle f, F(x)\rangle - \langle f, M(x)\rangle\\
&= (T^*_F f)(x) - (T^*_M f)(x)\\
&= ((T^*_F - T^*_M)f)x
\end{aligned}$$

پس $T^*_{F-M} = T^*_F - T^*_M$. لذا

$$\begin{aligned}
S_{G,Q,F-M} = T_G Q T^*_{F-M} &= T_G Q(T^*_F - T^*_M)\\
&= T_G Q T^*_F - T_G Q T^*_M\\
&= Id_{\mathcal{H}} - S_{G,Q,M}
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\|Id_{\mathcal{H}} - S_{G,Q,F-M}\| = \|S_{G,Q,M}\| < ۱$$

و این یعنی $G$ یک $Q$-دوگان تقریبی $F-M$ است. اینک فرض کنیم $G$ یک $Q$-دوگان $F$ باشد و $\|S_{M,Q,F}\| < ۱$. برای هر $\varphi \in L^۲(\Omega, \mu)$ و $f \in \mathcal{H}$ داریم:

$$\begin{aligned}
\langle T_{G-M}\varphi, f\rangle &= \int_\Omega \varphi(x)\langle (G-M)(x), f\rangle d\mu(x)\\
&= \int_\Omega \varphi(x)\langle G(x), f\rangle d\mu(x) - \int_\Omega \varphi(x)\langle M(x), f\rangle d\mu(x)\\
&= \langle T_G\varphi, f\rangle - \langle T_M\varphi, f\rangle\\
&= \langle (T_G - T_M)\varphi, f\rangle
\end{aligned}$$

پس $T_{G-M} = T_G - T_M$. بنابراین

$$\begin{aligned} S_{G-M,Q,F} = T_{G-M}QT_F^* &= (T_G - T_M)QT_F^* \\ &= T_G QT_F^* - T_M QT_F^* \\ &= Id_{\mathcal{H}} - S_{M,Q,F}. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\|Id_{\mathcal{H}} - S_{G-M,Q,F}\| = \|S_{M,Q,F}\| < ۱$$

و این نامساوی، بدین معنی است که $G - M$ یک $Q$-دوگان تقریبی $F$ است. □

**نتیجه ۹.۲.** فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$، $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in I}$ و $\mathcal{Z} = \{h_i\}_{i\in I}$ سه دنبالهٔ بسل در یک فضای هیلبرت باشند. در این صورت، $\mathcal{F} - \mathcal{Z} := \{f_i - h_i\}_{i\in I}$ و $\mathcal{G} - \mathcal{Z} := \{g_i - h_i\}_{i\in I}$ دنباله‌های بسل هستند. علاوه‌بر این، اگر $\|S_{\mathcal{G},Q,\mathcal{Z}}\| < ۱$ و $\mathcal{G}$ یک $Q$-دوگان $\mathcal{F}$ باشد، آن‌گاه $\mathcal{G}$ یک $Q$-دوگان تقریبی $\mathcal{F} - \mathcal{Z}$ است. همچنین اگر $\|S_{\mathcal{Z},Q,\mathcal{F}}\| < ۱$ و $\mathcal{G}$ یک $Q$-دوگان $\mathcal{F}$ باشد، آن‌گاه $\mathcal{G} - \mathcal{Z}$ یک $Q$-دوگان تقریبی $\mathcal{F}$ است.

## References


[1] Ali, S.T., Antoine, J.P., & Gazeau, J.P. (1993). Continuous frames in Hilbert spaces. *Ann. Physics*, 222, 1–37. DOI: https://doi.org/10.1006/aphy.1993.1016.

[2] Christensen, O., & Laugesen, R.S. (2011). Approximate dual frames in Hilbert spaces and applications to Gabor frames. *Sampl Theory Signal Image Process*, 9, 77–90. DOI: https://doi.org/10.1007/BF03549525.

[3] Daubechies, I., Grossmann, A., & Meyer, Y. (1986). Painless nonorthogonal expansions. *J. Math. Phys*, 27, 1271–1283. DOI: https://doi.org/10.1063/1.527388.

[4] Duffin, R.J., & Schaeffer, A.C. (1952). A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc*, 72, 341–366. DOI: https://doi.org/10.2307/1990760.

[5] Gabardo, J.P., & Han, D. (2003). Frame associated with measurable spaces. *Adv. Comp. Math*, 18, 127–147. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1021312429186.

[6] Kaiser, G. (1994). A Friendly Guide to Wavelets. *Birkhauser, Boston*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8111-1.

[7] Khosravi, A., & Mirzaee Azandaryani, M. (2014). Approximate duality of g-frames in Hilbert spaces. *Acta. Math. Sci*, 34, 639–652. DOI: https://doi.org/10.1016/S0252-9602(14)60036-9.

[8] Mirzaee Azandaryani, M. (2017). On the approximate duality of g-frames and fusion frames. *U. P. B. Sci. Bull. Ser A*, 79, 83–94.

[9] Mirzaee Azandaryani, M. (2020). An operator theory approach to the approximate duality of Hilbert space frames. *J. Math. Anal. Appl*, 489, 1–13 (124177). DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124177.

[10] Mirzaee Azandaryani, M., & Javadi, Z. (2022). Pseudo-duals of continuous frames in Hilbert spaces. *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl*, 13, 1–16. DOI: https://doi.org/10.1007/s11868-022-00486-3.

[11] Rahimi, A., Darvishi, Z., & Daraby, B. (2019). Dual pair and approximate dual for continuous frames in Hilbert spaces. *Math. Rep*, 21, 173–191.

[12] Yousefzadeheyni, A., & Abdollahpour, M.R. (2020). Some properties of approximately dual continuous g-frames in Hilbert spaces. *U. P. B. Sci. Bull. Ser A*, 82, 183–194.