Measure Algebras and Applications

Diagonal measure and entropy of dynamical systems

Mehdi Rahimi[1]✉ , **Nahid Bidabadi**[2]

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran.
   Email: m.rahimi@qom.ac.ir
2. Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran. Email: n_bidabadi90@yahoo.com

Article Info	**ABSTRACT**

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 27 May 2023
Received in revised form:
27 July 2023
Accepted: 30 July 2023
Published Online:
30 September 2023

Keywords:
Metric entropy,
Information function,
Invariant measure,
Ergodic measure,
Diagonal measure

2020 Mathematics Subject Classification:
28D20, 37A35

In this paper, we first define the concept of diagonal measure corresponding to an invariant measure of a compact dynamical system and will investigate some of its properties. Finally, we show that, integrating a suitable function with respect to the diagonal measure results in the metric entropy of a compact dynamical system.

Cite this article: Rahimi, M., & Bidabadi, N. (2023). Diagonal measure and entropy of dynamical systems. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 53–62. http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9496.1005

Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/MAA.2023.9496.1005

Extended Abstract

Introduction

The concept of entropy of a dynamical system is introduced by Kolmogorov [6] and Sinai [15], in ergodic theory and dynamical systems. The topological versions of entropy are also defined by Adler [1]. Using some equivalent definitions by Dinabourg [5] and Bowen [2], the two previous versions of the concept of entropy are connected via the variational principle [5].

Shannon [14], McMillan [8] and Brieman [3] presented local approaches to entropy. The topological version of these local approaches is introduced by Brin and Katok [4]. Then, other approaches to the entropy of dynamical systems, with local nature, are introduced [11, 12].

This paper is also assisted by a new approach to the local entropy of dynamical systems. We first introduce the concept of diagonal measure corresponding to an invariant measure, and then we define the information function corresponding to a compact dynamical system.

Finally, we show that the introduced information function is a type of local entropy. More precisely, we prove that the integral of the introduced information function on the product space, with respect to the diagonal measure, results in the entropy of dynamical systems.

In Section 2, we present some required preliminaries. In Section 3, we define the diagonal measure and in Section 4, we introduce the information function and will prove our main theorem. Section 5 is a conclusion.

Conclusion

In this paper, the following definitions and results are given:

***Definition* 0.1.** *Let $f : X \to X$ be a continuous map on a compact metric space and μ be an f-invariant probability measure. Let also $\mu = \int_{E(X,f)} m \, d\tau(m)$ be the ergodic decomposition of μ. The diagonal measure of μ is defined as follows:*

$$\tilde{\mu} := \int_{E(X,f)} m \times m \, d\tau(m).$$

***Theorem* 0.2.** *For any f-invariant measure μ, the diagonal measure $\tilde{\mu}$ is absolutely continuous with respect to μ.*

***Definition* 0.3.** *The information function $I_f : X \times X \to [0, \infty]$ corresponding to a compact dynamical system (X, f) is defined by*

$$I_f(x, y) := \lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} j_n^*(x, y; \xi_k) \tag{0.1}$$

where $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ is an increasing sequence of measurable partitions of X such that $\lim_{k\to+\infty} \operatorname{diam}(\xi_k) \to 0$ and

$$j_n^*(x, y; \xi_k) := \begin{cases} -\frac{1}{n} \log j_n(x, y; \xi_k) & j_n(x, y; \xi_k) \neq 0 \\ 0 & j_n(x, y; \xi_k) = 0 \end{cases}$$

and

$$j_n(x, y; \xi_k) = \limsup_{l\to\infty} \frac{1}{l} \sum_{t=0}^{l-1} \chi_{\xi_k^n(x)}(f^t(y)).$$

The next theorem is the main result of this paper.

***Theorem* 0.4.** *Let (X, f) be a compact dynamical system. Then, for every f-invariant measure μ we have*

$$\int_{X\times X} I_f \, d\tilde{\mu} = h_\mu(f),$$

where $h_\mu(f)$ is the entropy of f with respect to μ.

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۶۲-۵۳

اندازه قطری و آنتروپی دستگاه‌های دینامیکی

مهدی رحیمی [۱] ✉ **، ناهید بیدآبادی** [۲]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: m.rahimi@qom.ac.ir
۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: n_bidabadi90@yahoo.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۳/۶
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۵/۵
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۵/۸
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
آنتروپی متریک،
تابع اطلاعات،
اندازهٔ پایا،
اندازهٔ ارگودیک،
اندازهٔ قطری

رده‌بندی ریاضی:
28D20, 37A35

چکیده

در این مقاله، ابتدا مفهوم اندازهٔ قطری متناظر با یک اندازهٔ پایا تحت یک دستگاه دینامیکی فشرده را تعریف کرده و به بررسی برخی از خواص آن می‌پردازیم. در نهایت، نشان می‌دهیم که انتگرال‌گیری از یک تابع مناسب، نسبت به اندازهٔ قطری، منجر به آنتروپی متریک یک دستگاه دینامیکی فشرده می‌شود.

استناد: رحیمی، مهدی.، بیدآبادی، ناهید. (۱۴۰۲). اندازه قطری و آنتروپی دستگاه‌های دینامیکی. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۶۲-۵۳.

http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9496.1005

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

مفهوم آنتروپی یک دستگاه دینامیکی، توسط کولموگوروف [۶] و سینای [۱۵] وارد نظریهٔ ارگودیک و دستگاه‌های دینامیکی شد. نسخهٔ توپولوژیک آنتروپی نیز توسط آدلر [۱] تعریف شد. به کمک تعاریف معادل ارائه‌شده توسط دینابورگ [۵] و بوون [۲]، دو نسخهٔ فوق از مفهوم آنتروپی، توسط اصل وردش به یکدیگر متصل شدند. شانون [۱۴]، مک میلان [۸] و بریمن [۳]، رویکردهای موضعی به مفهوم آنتروپی را ارائه نمودند. نسخهٔ توپولوژیک این رویکردهای موضعی، توسط برین و کاتوک [۴] معرفی شدند. پس از آن، رویکردهای دیگری نیز با سرشت موضعی، برای دستگاه‌های دینامیکی و تعمیم‌های آن ارائه شدند [۱۱، ۱۲]. این مقاله نیز اختصاص به معرفی یک رویکرد موضعی جدید به مفهوم آنتروپی دستگاه‌های دینامیکی دارد. در این مقاله، ابتدا مفهوم اندازهٔ قطری متناظر با یک اندازهٔ پایا را معرفی نموده و سپس به تعریف تابع اطلاعات متناظر با یک دستگاه دینامیکی فشرده می‌پردازیم. درنهایت نشان می‌دهیم که تابع اطلاعات تعریف‌شده در این مقاله، نوعی آنتروپی موضعی را مشخص می‌کند. به بیان دقیق‌تر، ثابت می‌کنیم که انتگرال تابع اطلاعات تعریف‌شده بر فضای حاصل‌ضربی، نسبت به اندازهٔ قطری، برابر آنتروپی دستگاه دینامیکی است.

در بخش دوم این مقاله، ابتدا به مفاهیم مقدماتی مورد نیاز می‌پردازیم. در بخش سوم اندازهٔ قطری را تعریف کرده و در بخش چهارم به معرفی تابع اطلاعات پرداخته و قضیهٔ اصلی مقاله را ثابت می‌کنیم. بخش پنجم نیز به نتیجه‌گیری اختصاص یافته است.

۲ مفاهیم مقدماتی

در این بخش مفاهیم مقدماتی و پیش‌نیازهای مورد استفاده در بخش بعدی این مقاله را از نظر می‌گذرانیم. در سرتاسر این مقاله، X یک فضای متریک فشرده و $f : X \to X$ یک تابع پیوسته است. تحت این شرایط، زوج (X, f) را یک دستگاه دینامیکی فشرده می‌نامیم. روشن است که X به‌طور طبیعی به σ -جبر بورل $\mathcal{B}_X$ مجهز است.

۱.۲ اندازه‌های پایا و تجزیهٔ ارگودیک

اندازهٔ بورل μ بر X را یک اندازهٔ احتمال نامیم، هرگاه $\mu(X) = ۱$. مجموعهٔ همهٔ اندازه‌های بورل احتمال بر X را با $M(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. اندازهٔ بورل احتمال μ را f -پایا نامیم هرگاه داشته باشیم:

$$\forall B \in \mathcal{B}_X \quad \mu(f^{-1}(B)) = \mu(B).$$

مجموعهٔ کلیهٔ اندازه‌های f -پایا را با نماد $M(X, f)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۲. اندازهٔ f -پایای μ را ارگودیک نامیم، هرگاه برای هر مجموعهٔ بورل B، رابطه $f^{-1}(B) = B$ نتیجه دهد $\mu(B) = ۰$ یا $\mu(B) = ۱$.

به عبارت دیگر، اندازهٔ f -پایای μ، ارگودیک است، هرگاه تنها مجموعه‌های پایا تحت f، مجموعه‌های پوچ یا از اندازهٔ کامل باشند. مجموعهٔ کلیهٔ اندازه‌های ارگودیک f را با $E(X, f)$ نمایش می‌دهیم.

قضیهٔ زیر وجود اندازه‌های پایا را برای دستگاه‌های دینامیکی فشرده، تضمین می‌کند.

قضیه ۳.۲. (کریلوف)[۱۶] اگر (X, f) یک دستگاه دینامیکی فشرده باشد، آنگاه $M(X, f) \neq \emptyset$.

بر فضای $M(X)$، توپولوژی ضعیف-ستاره به‌عنوان کوچک‌ترین (ضعیف‌ترین) توپولوژی که نسبت به آن کلیهٔ توابع $\mu \longmapsto \int_X \phi d\mu$ $(\phi \in C(X))$ پیوسته‌اند، تعریف می‌شود. توجه کنید که تحت این توپولوژی، همگرایی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mu_n \to \mu \iff \forall \phi \in C(X) \quad : \quad \int \phi \, d\mu_n \to \int \phi \, d\mu.$$

قضیهٔ بعدی، مهم‌ترین خواص توپولوژی ضعیف-ستاره بر $M(X)$ را بیان می‌دارد [۱۶].

قضیه ۴.۲.
۱. $M(X)$ نسبت به توپولوژی ضعیف- ستاره، فشرده است.

۲. $M(X, f)$ یک زیرمجموعهٔ ناتهی، محدب و فشرده از $M(X)$ است.

۳. مجموعهٔ نقاط گوشه‌ای $M(X,f)$ برابر $E(X,f)$ است.

با توجه به قضیهٔ قبل، اگر $E(X,f)$ متناهی باشد، آنگاه هر عضو $M(X,f)$ را می‌توان به‌صورت ترکیب محدب از اعضای $E(X,f)$ نمایش داد. به عبارت دیگر، اگر $E(X,f)=\{\mu_۱,\mu_۲,\cdots,\mu_k\}$، آنگاه، برای هر $\mu\in M(X,f)$، اعداد $۰\leq\lambda_۱,\cdots,\lambda_n\leq ۱$ موجودند به‌گونه‌ای که $\sum_{i=۱}^k\lambda_i=۱$ و $\mu=\sum_{i=۱}^k\lambda_i\mu_i$. به‌طور مثال اگر $X\subseteq\mathbb{R}^۲$ دایرهٔ واحد به مرکز $(۰,۱)$ بوده، $N=(۰,۲)$ و $S=(۰,۰)$، نگاشت شمال-جنوب $f:X\to X$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases}\phi^{-۱}(\frac{۱}{۲}\phi(x)) & x\in X-\{N\}\\ N & x=N\end{cases}$$

که در آن، برای $x\in X-\{N\}$، $\phi(x)$ محل برخورد خط واصل N و x با محور طول‌ها است. در این صورت، به‌سادگی دیده می‌شود که $E(X,f)=\{\delta_N,\delta_S\}$ که در آن δ_x اندازهٔ دیراک متمرکز بر x است. در نتیجه

$$M(X,f)=\{\lambda\delta_N+(۱-\lambda)\delta_S\ :\ \lambda\in[۰,۱]\}.$$

قضیهٔ زیر تعمیم مطلب فوق برای حالتی است که $E(X,f)$ نامتناهی است.

قضیه ۵.۲. فرض کنید (X,f) یک دستگاه دینامیکی فشرده باشد. برای هر $\mu\in M(X,f)$، اندازهٔ احتمال یکتای $\tau=\tau_\mu$ بر زیرمجموعه‌های بورل $M(X,f)$ موجود است به‌گونه‌ای که $\tau(E(X,f))=۱$ و برای هر $\phi\in C(X)$:

$$\int_X\phi\,d\mu=\int_{E(X,f)}\left(\int_X\phi\,dm\right)d\tau(m).$$

تحت شرایط فوق می‌نویسیم $\mu=\int_{E(X,f)}m\,d\tau(m)$ و آن را تجزیهٔ ارگودیک μ می‌نامیم.

۲.۲ آنتروپی متریک

مفهوم آنتروپی یک دستگاه دینامیکی نخستین بار توسط کولموگروف [۶] و سینای [۱۵] معرفی شد. این تعریف بر اساس تعریف آنتروپی در نظریهٔ اطلاعات است که توسط یک مهندس آمریکایی به نام کلود شانون [۱۴] ارائه شد. فرض کنید $\xi=\{A_۱,\cdots,A_k\}$ افرازی بورل از فضای X باشد. به‌علاوه، فرض کنید $\mu\in M(X,f)$. آنتروپی افراز ξ نسبت به μ عبارت است از

$$H_\mu(\xi)=-\sum_{i=۱}^k\mu(A_i)\log\mu(A_i).$$

توجه کنید که در اینجا لگاریتم در مبنای عدد نپر است. سپس آنتروپی دستگاه دینامیکی f نسبت به افراز ξ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h_\mu(f,\xi):=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}H_\mu(\bigvee_{i=۰}^{n-۱}f^{-i}\xi)$$

که در آن

$$f^{-i}\xi=\{f^{-i}(A_۱),\cdots,f^{-i}(A_k)\}$$

و

$$\bigvee_{i=۰}^{n-۱}f^{-i}\xi=\{C=\bigcap_{l=۰}^{k-۱}T^{-l}(A_{i_l})\ :\ A_{i_j}\in\xi\ \ ,j=۱,۲,\cdots,l\}$$

در نهایت، آنتروپی(متریک) f نسبت به μ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$h_\mu(f)=\sup_\xi h_\mu(f,\xi),$$

که در آن سوپریمم بر کلیهٔ افرازهای اندازه‌پذیر X گرفته می‌شود.

رویکردهای مختلفی به آنتروپی دستگاه‌های دینامیکی وجود دارد. یکی از مهم‌ترین رویکردها، رویکرد موضعی به آنتروپی دستگاه‌های دینامیکی

است. شانون [۱۴]، مک میلان [۸] و بریمن [۳] رویکردهای موضعی مهمی به مفهوم آنتروپی دستگاه دینامیکی ارائه دادند. سپس برین و کاتوک [۴] نسخهٔ توپولوژیک این رویکرد را معرفی نمودند. رویکردهای موضعی دیگری به آنتروپی دستگاه‌های هموار توسط پسین [۹] و رله [۱۳] ارائه شدند. خواننده می‌تواند رویکردهای موضعی دیگری را در [۱۱، ۱۲] مشاهده نماید. فرض کنید ξ افرازی اندازه‌پذیر از X باشد. قرار دهید $\xi^n := \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\xi$ و فرض کنید $\xi^n(x)$ عضوی از ξ^n باشد که شامل x است. فرض کنید $\mu \in M(X,f)$. قضیهٔ زیر، مهم‌ترین حکم در مورد رویکرد موضعی به آنتروپی است [۷].

قضیه ۶.۲. (شانون-مک میلان-بریمن) برای هر افراز ξ با آنتروپی متناهی، حد

$$h_\mu(f,\xi,x) := \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mu(\xi^n(x))$$

برای تقریباً هر x در X موجود است. به‌علاوه، تابع $x \mapsto h_\mu(f,\xi,x)$، μ-انتگرال‌پذیر است و داریم:

$$\int_X h_\mu(f,\xi,x)\,d\mu(x) = h_\mu(f,\xi).$$

اگر μ، f-ارگودیک باشد، آنگاه $h_\mu(f,\xi,x) = h_\mu(f,\xi)$، برای تقریباً هر $x \in X$.

قضیهٔ زیر بیان می‌کند که آنتروپی، نسبت به اندازهٔ μ آفین است [۱۶].

قضیه ۷.۲. (ژاکوب) فرض کنید $\mu = \int_{E(X,f)} m\,d\tau(m)$ تجزیهٔ ارگودیک برای اندازهٔ f پایای μ باشد. در این صورت:

۱. برای هر افراز متناهی ξ داریم: $h_\mu(f,\xi) = \int_{E(X,f)} h_m(f,\xi)\,d\tau(m)$.

۲. $h_\mu(f) = \int_{E(X,f)} h_m(f)\,d\tau(m)$.

۳ اندازهٔ قطری متناظر با اندازه‌های پایا

در این بخش به معرفی اندازهٔ قطری متناظر با یک اندازهٔ f-پایا می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنید $\mu \in M(X,f)$. به‌علاوه، فرض کنید:

$$\mu = \int_{E(X,f)} m\,d\tau(m)$$

تجزیهٔ ارگودیک μ باشد. اندازهٔ قطری μ که آن را با $\tilde{\mu}$ نمایش می‌دهیم، بر فضای حاصل‌ضربی $(X\times X, \mathcal{B}_X \bigotimes \mathcal{B}_X)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\mu} := \int_{E(X,f)} m\times m\,d\tau(m).$$

ملاحظه ۲.۳. توجه کنید که اگر $E(X,f) = \{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k\}$ متناهی باشد، آنگاه برای $\mu \in M(X,f)$ داریم

$$\mu = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i\mu_i \qquad (\lambda_i \in [0,1]).$$

در نتیجه، اندازهٔ قطری متناظر با μ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{\mu} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\ \mu_i\times\mu_i.$$

توجه کنید که به‌سادگی دیده می‌شود که اگر $\mu = \int_{E(X,f)} m\,d\tau(m)$ آنگاه،

$$\mu\times\mu = \int_{E(X,f)}\int_{E(X,f)} m\times\nu\,d\tau(m)d\tau(\nu).$$

اکنون قضیهٔ زیر را داریم.

قضیه ۳.۳. برای هر $\mu \in M(X,f)$ داریم $\tilde{\mu} << \mu \times \mu$ ، یعنی $\tilde{\mu}$ نسبت به $\mu \times \mu$ به‌طور مطلق پیوسته است.

اثبات. فرض کنید که $D \subseteq X \times X$ اندازه‌پذیر باشد و به‌علاوه $\mu \times \mu(D) = 0$. پس

$$\int_{E(X,f)} \int_{E(X,f)} m \times \nu(D)\, d\tau(m)\, d\tau(\nu) = 0.$$

در نتیجه $m \times \nu(D) = 0$ برای تقریباً هر ν و m در $E(X,f)$. به‌طور خاص، برای تقریباً هر m در $E(X,f)$ داریم $m \times m(D) = 0$ و در نتیجه

$$\tilde{\mu}(D) = \int_{E(X,f)} m \times m(D)\, d\tau(m) = 0$$

پس $\tilde{\mu} << \mu \times \mu$. □

قضیهٔ بعد در [۱۰] ثابت شده است.

قضیه ۴.۳. فرض کنید $f_i : X_i \to X_i$ $(i = 1, 2)$ دو دستگاه دینامیکی مزدوج توپولوژیک باشند، یعنی همئومرفیسم $\phi : X_1 \to X_2$ موجود باشد به‌گونه‌ای که $\phi \circ f_1 = f_2 \circ \phi$. اگر $\mu_1 \in M(X_1, f_1)$ و $\mu_2 = \phi_* \mu_1$، آنگاه $\tilde{\mu_2} = (\phi \times \phi)_* \tilde{\mu_1}$.

۴ تابع اطلاعات و آنتروپی

در این بخش به معرفی تابع اطلاعات موضعی پرداخته و نشان می‌دهیم که این تابع، در واقع نوعی آنتروپی موضعی است.

تعریف ۱.۴. دستگاه دینامیکی فشردهٔ (X,f) را در نظر بگیرید. نگاشت اطلاعات f ، $I_f : X \times X \to [0, \infty]$ به‌صورت

$$I_f(x,y) := \lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} j_n^*(x,y;\xi_k) \tag{۱.۴}$$

تعریف می‌شود که در آن $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ دنباله‌ای صعودی از افرازهای اندازه‌پذیر X با شرط $\lim_{k\to+\infty} \operatorname{diam}(\xi_k) \to 0$ است و

$$j_n^*(x,y;\xi_k) := \begin{cases} -\frac{1}{n}\log j_n(x,y;\xi_k) & j_n(x,y;\xi_k) \neq 0 \\ 0 & j_n(x,y;\xi_k) = 0 \end{cases}$$

و

$$j_n(x,y;\xi_k) = \limsup_{l\to\infty} \frac{1}{l} \sum_{t=0}^{l-1} \chi_{\xi_k^n(x)}(f^t(y)).$$

توجه کنید که $\xi^n(x)$ عنصری از $\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\xi$ است که شامل x است. به‌علاوه، توجه کنید که I_f اندازه‌پذیر است و حد موجود در تعریف ۱.۴ موجود است، چراکه دنبالهٔ $\{j_n^*(x,y;\xi_k)\}_{k\geq 1}$ صعودی است.
قضیهٔ بعد، نتیجهٔ اصلی این مقاله است.

قضیه ۲.۴. فرض کنید (X,f) یک دستگاه دینامیکی فشرده باشد. برای هر $\mu \in M(X,f)$ داریم:

$$\int_{X\times X} I_f\, d\tilde{\mu} = h_\mu(f).$$

اثبات. ابتدا فرض کنید $\nu \in E(X,f)$. در این صورت $\tilde{\nu} = \nu \times \nu$. برای $x \in X$، با توجه به قضیهٔ ارگودیک بیرخوف، زیرمجموعهٔ بورل $B_{kn}^x \subseteq X$ موجود است به‌گونه‌ای که $\nu(B_{kn}^x) = 1$ و

$$\forall y \in B_{kn}^x \quad : \quad j_n(x,y;\xi_k) = \nu(\xi_k^n(x)).$$

قرار دهید $B^x = \bigcap_{k,n\geq 1} B_{kn}^x$. آنگاه $\nu(B^x) = 1$ و برای هر $y \in B^x$:

$$j_n(x,y;\xi_n) = \nu(\xi_k^n(x)) \quad \forall k,n \geq 1.$$

از طرف دیگر، طبق قضیهٔ شانون-مک میلان-بریمن، مجموعهٔ بورل A موجود است به‌گونه‌ای که $\nu(A) = ۱$ و برای هر $x \in A$:

$$\limsup_{n\to\infty} j_n^*(x,y;\xi_k) = h_\nu(f,\xi_k,x) \quad (k \geq ۱, y \in B^x)$$

پس برای $x \in A$ و $y \in B^x$،

$$\limsup_{n\to\infty} j_n^*(x,y;\xi_k) = h_\nu(f,\xi_k,x) \quad (k \geq ۱).$$

اکنون، به کمک قضیهٔ همگرایی یکنوا و قضیهٔ ۳ . ۸ در [۱۶] و با توجه به این‌که $\tilde{\nu} = \nu \times \nu$، داریم

$$\begin{aligned}
\int_{X\times X} I_f \, d\tilde{\nu} &= \int_{X\times X} I_f \, d\nu\times\nu \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{X\times X} \limsup_{n\to\infty} j_n^*(x,y;\xi_k) d\nu\times\nu(x,y) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_X \left(\int_X \limsup_{n\to\infty} j_n^*(x,y;\xi_k) d\nu(y) \right) d\nu(x) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_X \left(\int_{B^x} \limsup_{n\to\infty} j_n^*(x,y;\xi_k) d\nu(y) \right) d\nu(x) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_X h_\nu(f,\xi_k,x) d\nu(x) \\
&= \lim_{k\to\infty} h_\nu(f,\xi_k) \\
&= h_\nu(f). \qquad (۲.۴)
\end{aligned}$$

در نهایت، فرض کنید $\mu \in M(X,f)$. آنگاه $\tilde{\mu} = \int_{E(X,f)} \nu\times\nu d\tau(\nu)$، در نتیجه، در پرتوی رابطهٔ قبل و قضیهٔ ژاکوب، داریم:

$$\begin{aligned}
\int_{X\times X} I_f \, d\tilde{\mu} &= \int_{E(X,f)} \left(\int_{X\times X} I_f(x,y) d\nu\times\nu(x,y) \right) d\tau(\nu) \qquad (۳.۴)\\
&= \int_{E(X,f)} h_\nu(f) d\tau(\nu) \qquad (۴.۴)\\
&= h_\mu(f). \qquad (۵.۴)
\end{aligned}$$

□

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، تابع اطلاعات را بر فضای حاصل‌ضربی تعریف کرده و در پرتوی مفهوم اندازهٔ قطری متناظر با اندازه‌های پایا، نشان دادیم که این تابع، نوعی آنتروپی موضعی است، بدین معنی که انتگرال‌گیری از تابع اطلاعات نسبت به اندازهٔ قطری منجر به آنتروپی متریک یک دستگاه دینامیکی می‌شود. نکتهٔ قابل توجه این است که برخلاف آنتروپی‌های موضعی برین-کاتوک [۴] و شانون-مک-میلان-بریمن [۳، ۸، ۱۴] تابع اطلاعات تعریف‌شده در این مقاله، مستقل از اندازه بوده و آنتروپی متریک نسبت به کلیهٔ اندازه‌های پایا را به دست می‌دهد.

References

[1] Adler, R.L., Konheim, A.G., & McAndrew, M.H. (1965). Topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc*, 114, 309–319. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1965-0175106-9.

[2] Bowen, R. (1976). Invariant measures for Markov maps of the interval. *Comm. Math. Physics*, 69, 1–17. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01941319.

[3] Breiman, L. (1957). The individual theorem of information theory. *Ann of Math Stat*, 28, 809–811; errata, 31 (1960), 809–810. DOI: https://doi.org/10.1214/aoms/1177706899.

[4] Brin, M., & Katok, A. (1983). On local entropy in geometric dynamics. 30–38, *New York, Springer-Verlag*, (Lecture Notes in Mathematics 1007). DOI: https://doi.org/10.1007/bfb0061408.

[5] Dinaburg, E.I. (1970). The relation between topological entropy and metric entropy. *Soviet Math*, 11, 13–16.

[6] Kolmogorov, A.N. (1958). New metric invariant of transitive dynamical systems and endomorphisms of Lebesgue spaces. *Doklady of Russian Academy of Sciences*, 119, 861–864.

[7] Mañé, R. (1987). Ergodic theory and differentiable dynamics. *Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-70335-5.

[8] McMillan, B. (1953). The basic theorems of information theory. *Ann. of Math. Statistics*, 24, 196–219. DOI: https://doi.org/10.1214/aoms/1177729028.

[9] Pesin, Ya. (1977). Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. *Russian Math. Surveys*, 32, 54–114. DOI: https://doi.org/10.1070/RM1977v032n04ABEH001639.

[10] Rahimi, M. (2021). A Spectral Representation for the Entropy of Topological Dynamical Systems. *J Dyn Control Syst*, 27, 573–584. DOI: https://doi.org/10.1007/s10883-020-09519-w.

[11] Rahimi, M., & Riazi, A. (2012). Entropy operator for continuous dynamical systems of finite topological entropy. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 38, 883–892.

[12] Rahimi, M., & Riazi, A. (2012). Entropy functional for continuous systems of finite entropy. *Acta Mathematica Scientia*, 32B, 775–782. DOI: https://doi.org/10.1016/S0252-9602(12)60057-5.

[13] Ruelle, D. (1987). An inequality for the entropy of differential maps. *Bol. Soc. Bras. de Mat*, 9, 83–87. DOI: https://doi.org/10.1007/bf02584795.

[14] Shannon, C. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell Syst. Tech. Journal*, 27, 379–423. DOI: https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x.

[15] Sinai, Ya.G. (1959). On the notion of entropy of a dynamical system. *Doklady of Russian Academy of Sciences*, 124, 768–771. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-87870-6_1.

[16] Walters, P. (1982). An introduction to ergodic theory. *Springer-Verlag*. DOI: https://doi.org/10.1007/springerreference_60354.