Measure Algebras and Applications

The stability of duals and approximate duals of frames and generalized frames under the action of bounded operators

Morteza Mirzaee Azandaryani[1]

1. Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran. Email: m.mirzaee@qom.ac.ir

Article Info	**ABSTRACT**

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 31 May 2023
Received in revised form:
21 July 2023
Accepted: 23 July 2023
Published Online:
30 September 2023

Keywords:
Hilbert space,
Measure space,
Hilbert C^*-module,
Frame,
Bounded operator

2020 Mathematics Subject Classification:
42C15

In this paper, the stability of duals and approximate duals of discrete frames, continuous frames, and generalized frames in Hilbert spaces and Hilbert C^*-modules under the action of bounded operators is considered. It is shown that under some conditions, duals and approximate duals are stable under the action of bounded operators. Especially, the stability of duals and approximate duals under the morphisms of Hilbert C^*-modules is studied.

Cite this article: Mirzaee Azandaryani, M. (2023). The stability of duals and approximate duals of frames and generalized frames under the action of bounded operators. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 36–52. http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9513.1007

Publisher: University of Qom

DOI: 10.22091/MAA.2023.9513.1007

Extended Abstract

Introduction

Let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space and let I be a finite or countable index set. A family $\mathcal{F}=\{f_i\}_{i\in I}\subseteq\mathcal{H}$ is a *discrete frame* for $\mathcal{H}$, if there exist $0<A_{\mathcal{F}}\leq B_{\mathcal{F}}<\infty$, such that

$$A_{\mathcal{F}}\|f\|^2\leq\sum_{i\in I}|\langle f,f_i\rangle|^2\leq B_{\mathcal{F}}\|f\|^2,$$

for each $f\in\mathcal{H}$. The sequence $\mathcal{F}$ is called a *Bessel sequence* if only the second inequality is required (see [7]).

Let (Ω,μ) be a measure space and let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space. A weakly-measurable mapping $F:\Omega\to\mathcal{H}$ is called a *continuous frame* for $\mathcal{H}$ with respect to (Ω,μ) if there exist two positive constants A_F,B_F such that for each $f\in\mathcal{H}$, we have

$$A_F\|f\|^2\leq\int_\Omega|\langle f,F(\omega)\rangle|^2\mathrm{d}\mu(\omega)\leq B_F\|f\|^2.$$

If only the second inequality is required, we say that F is a *continuous Bessel mapping*.

Suppose that $F:\Omega\to\mathcal{H}$ is a continuous Bessel mapping. Then the operator $T_F:L^2(\Omega,\mu)\to\mathcal{H}$ weakly defined by

$$\langle T_F\varphi,f\rangle=\textstyle\int_\Omega\varphi(\omega)\langle F(\omega),f\rangle\mathrm{d}\mu(\omega),\quad \varphi\in L^2(\Omega,\mu),f\in\mathcal{H},$$

is well-defined and bounded with $\|T_F\|\leq\sqrt{B_F}$. Indeed, $\int_\Omega\varphi(\omega)F(\omega)\mathrm{d}\mu(\omega)$ is an element of $\mathcal{H}$ and T_F can be written as $T_F(\varphi)=\int_\Omega\varphi(\omega)F(\omega)\mathrm{d}\mu(\omega)$.

The operator T_F is called the *synthesis operator* of F and its adjoint which is given by

$$T_F^*:\mathcal{H}\to L^2(\Omega,\mu),(T_F^*f)(\omega)=\langle f,F(\omega)\rangle,\quad \omega\in\Omega,f\in\mathcal{H},$$

is the *analysis operator* of F.

A Bessel mapping G is called a dual for F if $T_GT_F^*=Id_{\mathcal{H}}$ and if $\|T_GT_F^*-Id_{\mathcal{H}}\|<1$, then G is called an approximate dual of F. For more results on continuous frames, see [1, 9, 11].

For each $i\in I$, let $\mathcal{H}_i$ be a Hilbert space. In this paper, $L(\mathcal{H},\mathcal{H}_i)$ is the set of all bounded operators from $\mathcal{H}$ into $\mathcal{H}_i$ and $L(\mathcal{H},\mathcal{H})$ is denoted by $L(\mathcal{H})$. We call $\Lambda=\{\Lambda_i\in L(\mathcal{H},\mathcal{H}_i):i\in I\}$ a *g-frame* for $\mathcal{H}$ with respect to $\{\mathcal{H}_i:i\in I\}$ if there exist two positive constants A and B such that

$$A\|f\|^2\leq\sum_{i\in I}\|\Lambda_if\|^2\leq B\|f\|^2,$$

for each $f\in\mathcal{H}$. If only the second inequality is required, we call it a *g-Bessel sequence* with upper bound B. If $A=B$, Λ is called an A-tight g-frame (see [23]).

Let $\Lambda=\{\Lambda_i\}_{i\in I}$ and $\Gamma=\{\Gamma_i\}_{i\in I}$ be two g-Bessel sequences in a Hilbert space $\mathcal{H}$ and let $S_{\Gamma\Lambda}f:=\sum_{i\in I}\Gamma_i^*\Lambda_if$. We say that Λ and Γ are approximate g-duals if $\|Id_{\mathcal{H}}-S_{\Gamma\Lambda}\|<1$. In this case, Γ is called an approximate g-dual of Λ (see [13]).

Hilbert C^*-modules are generalizations of Hilbert spaces by allowing the inner product to take values in a C^*-algebra rather than in the field of complex numbers.

Let $\mathfrak{A}$ be a unital C^*-algebra and suppose that E is a left $\mathfrak{A}$-module such that the linear structures of $\mathfrak{A}$ and E are compatible. Then E is called a pre-Hilbert $\mathfrak{A}$-module if E is equipped with an $\mathfrak{A}$-valued inner product $\langle\cdot,\cdot\rangle:E\times E\longrightarrow\mathfrak{A}$, such that

(i) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$, for each $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ and $x, y, z \in E$;

(ii) $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$, for each $a \in \mathfrak{A}$ and $x, y \in E$;

(iii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^*$, for each $x, y \in E$;

(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0$, for each $x \in E$ and if $\langle x, x\rangle = 0$, then $x = 0$.

For each $x \in E$, we define $\|x\| = \|\langle x, x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$. If E is complete with $\|.\|$, it is called a *Hilbert $\mathfrak{A}$-module* or a *Hilbert C^*-module* over $\mathfrak{A}$.

Let E be a Hilbert $\mathfrak{A}$-module. A family $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I} \subseteq E$ is a *frame* for E, if there exist real constants $0 < A_{\mathcal{F}} \leq B_{\mathcal{F}} < \infty$, such that for each $x \in E$,

$$A_{\mathcal{F}}\langle x, x\rangle \leq \sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle\langle f_i, x\rangle \leq B_{\mathcal{F}}\langle x, x\rangle.$$

If the second inequality is required, $\mathcal{F}$ is a *Bessel sequence*. If the series $\sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle\langle f_i, x\rangle$ is convergent with respect to the norm, then $\mathcal{F}$ is called a *standard frame* (see [8]).

Let $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ and $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in I}$ be standard Bessel sequences in E. Then we say that $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{F}$) is an *alternate dual* or a *dual* of $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$), if $x = \sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle g_i$ or equivalently $x = \sum_{i\in I}\langle x, g_i\rangle f_i$, for each $x \in E$.

Let $\mathfrak{L}(E, E_i)$ be the set of all adjointable operators from E into E_i. A sequence $\Lambda = \{\Lambda_i \in \mathfrak{L}(E, E_i) : i \in I\}$ is called a *g-frame* for E with respect to $\{E_i : i \in I\}$ if there exist real constants $A_\Lambda, B_\Lambda > 0$ such that

$$A_\Lambda\langle x, x\rangle \leq \sum_{i\in I}\langle \Lambda_i x, \Lambda_i x\rangle \leq B_\Lambda\langle x, x\rangle,$$

for each $x \in E$. In this case, we call it an (A_Λ, B_Λ) *g-frame*. If only the second-hand inequality is required, then Λ is called a B_Λ*-g-Bessel sequence* (see [12]).

Let E and F be Hilbert C^*-modules over C^*-algebras $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$, respectively. Let $\varphi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ be a morphism of C^*-algebras. A map $\phi : E \longrightarrow F$ is said to be a *φ-morphism* of Hilbert C^*-modules if

$$\langle \phi(x), \phi(y)\rangle = \varphi(\langle x, y\rangle),$$

for each $x, y \in E$ (see [3]).

Conclusion

The main results of this paper are:

***Theorem* 0.1.** *Let T and S be two isometric operators on Hilbert spaces $\mathcal{H}$ and $\mathcal{K}$, respectively. Then*

(i) If $\Gamma = \{\Gamma_i \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}_i)\}_{i\in I}$ is a g-dual (resp. an approximate g-dual) of $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}_i)\}_{i\in I}$, then $\Gamma_T := \{\Gamma_i T\}_{i\in I}$ is a g-dual (resp. an approximate g-dual) of $\Lambda_T := \{\Lambda_i T\}_{i\in I}$.

(ii) If $\Gamma = \{\Gamma_i \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})\}_{i\in I}$ is a g-dual (resp. an approximate g-dual) of $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})\}_{i\in I}$, then $\Gamma_S := \{S\Gamma_i\}_{i\in I}$ is a g-dual (resp. an approximate g-dual) of $\Lambda_S := \{S\Lambda_i\}_{i\in I}$.

***Theorem* 0.2.** *Let $\Gamma = \{\Gamma_i \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}_i)\}_{i\in I}$ be a g-dual of $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}_i)\}_{i\in I}$ and let T be a bounded operator on $\mathcal{H}$. Then* *(i)* $\Gamma_T := \{\Gamma_i T\}_{i\in I}$ *is a g-dual of* $\Lambda_T := \{\Lambda_i T\}_{i\in I}$ *if and only if* T *is an isometric operator.*

(ii) $\Gamma_T := \{\Gamma_i T\}_{i\in I}$ *is an approximate g-dual of* $\Lambda_T := \{\Lambda_i T\}_{i\in I}$ *if and only if* $\|T^*T - Id_{\mathcal{H}}\| < 1$.

***Theorem* 0.3.** *Let* $F, G : \Omega \longrightarrow \mathcal{H}$ *be two continuous Bessel mappings. Assume that* T *is a bounded operator on* $\mathcal{H}$ *such that* T^* *is isometric. If* G *is a dual (resp. an approximate dual) of* F*, then* $T \circ G$ *is a dual (resp. an approximate dual) of* $T \circ F$.

***Theorem* 0.4.** *Let* $G : \Omega \longrightarrow \mathcal{H}$ *be a dual of* $F : \Omega \longrightarrow \mathcal{H}$*. Assume that* T *is a bounded operator on* $\mathcal{H}$*. Then,* $T \circ G$ *is a dual (resp. an approximate dual) of* $T \circ F$ *if and only if* T^* *is an isometric operator (resp.* $\|TT^* - Id_{\mathcal{H}}\| < 1$*).*

***Theorem* 0.5.** *Let* E_1 *be a Hilbert* C^**-module and* $\Gamma = \{\Gamma_i \in \mathfrak{L}(E_1, E)\}_{i\in I}$ *be a g-dual of* $\Lambda = \{\Lambda_i \in \mathfrak{L}(E_1, E)\}_{i\in I}$*. Also, assume that* $\phi\Gamma_i$ *and* $\phi\Lambda_i$ *are adjointable, for each* $i \in I$*. Then,* $\Gamma_\phi := \{\phi\Gamma_i\}_{i\in I}$ *and* $\Lambda_\phi := \{\phi\Lambda_i\}_{i\in I}$ *are two g-Bessel sequences. If* Γ_ϕ *is a g-dual of* Λ_ϕ*, then* ϕ *is an isometric operator.*

***Theorem* 0.6.** *Suppose that* $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ *and* $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in I}$ *are two Bessel sequences in* E *such that* $\mathcal{G}$ *is a dual of* $\mathcal{F}$*. If* ϕ *is surjective, then* $\mathcal{G}_\phi := \{\phi(g_i)\}_{i\in I}$ *is a dual for* $\mathcal{F}_\phi := \{\phi(f_i)\}_{i\in I}$.

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۵۲-۳۶

پایایی دوگان‌ها و دوگان‌های تقریبی قاب‌ها و قاب‌های تعمیم‌یافته تحت عملگرهای کران‌دار

مرتضی میرزائی ازندریانی [۱]

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: m.mirzaee@qom.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۳/۱۰
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۴/۳۰
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۵/۱
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
فضای هیلبرت،
فضای اندازه،
C^*-مدول هیلبرت،
قاب،
عملگر کران‌دار

رده‌بندی ریاضی:
42C15

در این مقاله، پایایی دوگان‌ها و دوگان‌های تقریبی قاب‌های گسسته، قاب‌های پیوسته و قاب‌های تعمیم‌یافته در فضاهای هیلبرت و C^*-مدول‌های هیلبرت تحت عملگرهای کران‌دار مورد توجه قرار می‌گیرد. نشان داده می‌شود که با برقراری برخی از شرایط، دوگان‌ها و دوگان‌های تقریبی تحت عملگرهای کران‌دار پایا هستند. به‌ویژه، پایایی دوگان‌ها و دوگان‌های تقریبی تحت ریخت‌های C^*-مدول‌های هیلبرت، مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

استناد: میرزائی ازندریانی، مرتضی. (۱۴۰۲). پایایی دوگان‌ها و دوگان‌های تقریبی قاب‌ها و قاب‌های تعمیم‌یافته تحت عملگرهای کران‌دار. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۵۲-۳۶.

http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9513.1007

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

پیش از ۱۹۴۶ میلادی، نمایش سیگنال‌ها به‌صورت سری فوریه و استفاده از ضرایب فوریه، روشی متداول در عمل پردازش سیگنال‌ها به حساب می‌آمد. اما این روش مشکلاتی داشت که بیشتر این مشکلات ناشی از منحصربه‌فرد بودن ضرایب فوریه بودند. در سال ۱۹۴۶، گابور در مرجع [۱۰] راه‌حل مناسبی برای حل این مشکل ارائه داد که بسیار مفید بود. او در روش خود، خواص اساسی یک دنباله را که بعدها یک قاب گسسته نامیده شد، به دست آورده بود. در سال ۱۹۵۲، دافین و شیفر که در حال بررسی چند مسئلهٔ اساسی در مورد سری‌های فوریهٔ غیرهارمونیک بودند، احساس نیاز به معرفی مفهومی کردند و آن را یک قاب (گسسته) فضای هیلبرت نامیدند (مرجع [۷] را ملاحظه کنید). اما ارزش قاب‌ها در فضاهای هیلبرت پس از چاپ مقالهٔ دوبچیز، گراسمان و مِیِر (مرجع [۶] را ملاحظه کنید) در سال ۱۹۸۶ بیش‌ازپیش مشخص شد. در واقع، پس از چاپ این مقاله بود که قاب‌ها و تعمیم‌های آنها به‌طور گسترده بررسی شدند و کاربردهای فراوانی از آنها نه‌فقط در پردازش سیگنال‌ها بلکه در شاخه‌های مختلف علم و صنعت ارائه شدند.

تعریف ۱.۱. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر باشد. دنبالهٔ $\mathcal{F}=\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب گسسته برای H نامیده می‌شود اگر دو عدد مثبت $A_{\mathcal{F}}$ و $B_{\mathcal{F}}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر $f\in H$ داشته باشیم:

$$A_{\mathcal{F}}\|f\|^{۲}\leq\sum_{i\in I}|\langle f,f_i\rangle|^{۲}\leq B_{\mathcal{F}}\|f\|^{۲}.$$

در نظریهٔ قاب‌ها، حفظ خواص یک قاب گسسته تحت عملگرهای کران‌دار از اهمیت بالایی برخوردار است. کریستنسن در کتاب خود [۴] (که یکی از مهم‌ترین منابع در مورد قاب‌های گسسته است) یک بخش را به این موضوع اختصاص می‌دهد و از نتایج به‌دست‌آمده در این بخش، در سرتاسر کتاب خود استفاده می‌کند. یکی از نتایج مهم به‌دست‌آمده در این کتاب، در مورد پایایی قاب‌ها تحت عملگرهای کران‌دار، به‌صورت زیر است:

قضیه ۲.۱. فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب گسسته در فضای هیلبرت H باشد. اگر T یک عملگر کران‌دار پوشا روی H باشد، آن‌گاه $\{Tf_i\}_{i\in I}$ نیز یک قاب گسسته برای فضای هیلبرت H است.

در ادامهٔ این مقاله، پایایی خواص قاب‌های تعمیم‌یافته و قاب‌های پیوسته در فضاهای هیلبرت و همین‌طور پایایی قاب‌ها و قاب‌های تعمیم‌یافته در C^*-مدول‌های هیلبرت تحت عملگرهای کران‌دار مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۲ قاب‌های پیوسته و g-قاب‌ها

پس از معرفی قاب‌های گسسته، قاب‌های پیوسته به‌طور جداگانه در [۱] و [۱۱] معرفی شدند (برای مطالعهٔ بیشتر در مورد قاب‌های پیوسته به مرجع [۹] مراجعه نمایید).

تعریف ۱.۲. فرض کنیم (Ω,μ) یک فضای اندازه باشد. یک تابع به‌طور ضعیف اندازه‌پذیر $F:\Omega\to H$ را یک قاب پیوسته برای H نسبت به (Ω,μ) می‌نامیم اگر دو عدد مثبت A_F و B_F موجود باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر $f\in H$ داشته باشیم:

$$A_F\|f\|^{۲}\leq\int_{\Omega}|\langle f,F(\omega)\rangle|^{۲}d\mu(\omega)\leq B_F\|f\|^{۲}.$$

اعداد A_F و B_F را به‌ترتیب یک کران پایین و یک کران بالا برای قاب F می‌نامیم. اگر نامساوی سمت راست برقرار باشد، F را یک نگاشت بسل پیوسته می‌نامیم.

تعریف ۲.۲. فرض کنیم $F:\Omega\to H$ یک نگاشت بسل پیوسته باشد. در این صورت

(الف) عملگر $T_F:L^{۲}(\Omega,\mu)\longrightarrow H$ که به‌صورت

$$\langle T_F\varphi,f\rangle=\int_{\Omega}\varphi(\omega)\langle F(\omega),f\rangle d\mu(\omega),\quad f\in H,\varphi\in L^{۲}(\Omega,\mu),$$

تعریف می‌شود را عملگر ترکیب F می‌نامیم (به‌آسانی ثابت می‌شود که T_F خوش‌تعریف و کران‌دار است، همچنین $\|T_F\|\leq\sqrt{B_F}$).

(ب) عملگر $T_F^*: H \longrightarrow L^2(\Omega, \mu)$ که به‌صورت $(T_F^*f)(\omega) = \langle f, F(\omega)\rangle$ به دست می‌آید را عملگر تحلیل F می‌نامیم.

(پ) عملگر $S_F = T_F T_F^*$ را عملگر F می‌نامیم.

تعریف ۳.۲. فرض کنیم $F, G: \Omega \to H$ دو نگاشت بسل پیوسته باشند. در این صورت

(الف) G را یک دوگان F می‌نامیم اگر به‌ازای هر $f, g \in H$ داشته باشیم:

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega \langle f, F(\omega)\rangle \langle G(\omega), g\rangle d\mu(\omega),$$

یا به‌طور معادل $T_G T_F^* = Id_H$.

(ب) G را یک دوگان تقریبی F می‌نامیم اگر $\|T_G T_F^* - Id_H\| < 1$.

قاب‌های تعمیم‌یافته یا g-قاب‌ها به‌عنوان یکی از تعمیم‌های مهم قاب‌ها در [۲۳] معرفی شدند.

تعریف ۴.۲. فرض کنیم به‌ازای هر $i \in I$، H_i یک فضای هیلبرت باشد. دنبالهٔ $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$ یک g-قاب برای H نسبت به $\{H_i\}_{i\in I}$ نامیده می‌شود اگر دو عدد مثبت A و B موجود باشند به‌طوری‌که برای هر $f \in H$، نامساوی زیر برقرار باشد:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} \|\Lambda_i f\|^2 \leq B\|f\|^2.$$

در این حالت Λ را یک (A, B) g-قاب می‌نامیم.
A و B کران‌های g-قاب نامیده می‌شوند (A را یک کران پایین و B را یک کران بالا می‌نامیم). سوپریمم مجموعهٔ متشکل از تمام کران‌های پایین را کران پایین بهینه و اینفیمم مجموعهٔ متشکل از تمام کران‌های بالا را کران بالای بهینه می‌نامیم. اگر در تعریف فوق Λ در نامساوی سمت راست صدق کند، آن‌گاه Λ را یک g-دنبالهٔ بسل می‌نامیم. یک g-قاب را تنگ گوییم هرگاه $A = B$ و آن را پارسوال گوییم اگر $A = B = 1$.

تعریف ۵.۲. فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$ یک g-دنبالهٔ بسل باشد. در این صورت

(آ) عملگر ترکیب Λ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_\Lambda : \oplus_{i\in I} H_i \to H, \quad T_\Lambda(\{f_i\}_{i\in I}) = \sum_{i\in I} \Lambda_i^* f_i.$$

به‌آسانی می‌توان مشاهده نمود که T_Λ خوش‌تعریف و کران‌دار است.

(ب) الحاقی عملگر T_Λ، که $T_\Lambda^*(f) = \{\Lambda_i f\}_{i\in I}$ است، عملگر تحلیل Λ نامیده می‌شود.

(پ) $S_\Lambda = T_\Lambda T_\Lambda^*$ عملگر g-دنبالهٔ بسل Λ نامیده می‌شود و به‌ازای هر $f \in H$ داریم:

$$S_\Lambda f = \sum_{i\in I} \Lambda_i^* \Lambda_i f.$$

فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$ یک (A, B) g-قاب باشد. دنبالهٔ $\widetilde{\Lambda} = \{\widetilde{\Lambda}_i\}_{i\in I}$ که $\widetilde{\Lambda}_i = \Lambda_i S_\Lambda^{-1}$، g-دوگان کانونی Λ نامیده می‌شود. $\widetilde{\Lambda}$ یک $(\frac{1}{B}, \frac{1}{A})$ g-قاب است و به‌ازای هر $f \in H$، داریم

$$\sum_{i\in I} \Lambda_i^* \widetilde{\Lambda}_i f = f = \sum_{i\in I} \widetilde{\Lambda}_i^* \Lambda_i f.$$

g-دنبالهٔ بسل $\Gamma = \{\Gamma_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$، یک g-دوگان برای g-دنبالهٔ بسل $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$ نامیده می‌شود اگر

$$f = \sum_{i\in I} \Gamma_i^* \Lambda_i f = \sum_{i\in I} \Lambda_i^* \Gamma_i f, \quad f \in H.$$

فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای H باشد. همان‌طور که می‌دانیم، حداقل یک دوگان برای $\{f_i\}_{i\in I}$ موجود است. متأسفانه، به دست آوردن این دوگان معمولاً دشوار است. در اینجا دوگان‌های تقریبی می‌توانند مفید واقع شوند. دوگان تقریبی در نظریهٔ قاب‌ها و مخصوصاً در دستگاه‌های گابور و موجک‌ها، کاربردهای مهمی دارد.

یک دوگان تقریبی $\{g_i\}_{i\in I}$، برای $\{f_i\}_{i\in I}$، به‌ازای یک $\varepsilon < ۱$، در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$\left\|f-\sum_{i\in I}\langle f,f_i\rangle g_i\right\| \leq \varepsilon\|f\|, \quad \forall f\in H.$$

(هرچه ε کوچک‌تر باشد، دوگان تقریبی مطلوب‌تر است).

دوگان‌های تقریبی قاب‌ها اخیراً توسط کریستنسِن و لوکسِن در [۵] معرفی شدند. آنها نشان دادند که هر دوگان تقریبی خود باعث ایجاد یک دوگان می‌شود. بعضی از اوقات به دست آوردن یک دوگان برای یک قاب مانند $\{f_i\}_{i\in I}$ دشوار است اما می‌توان یک قاب مانند $\{h_i\}_{i\in I}$ که نزدیک به $\{f_i\}_{i\in I}$ باشد پیدا کرد که یک دوگان آن مانند $\{g_i\}_{i\in I}$ شناخته‌شده باشد و یا به‌راحتی به دست آید. آنها نشان دادند تحت برخی از شرایط $\{g_i\}_{i\in I}$ یک دوگان تقریبی برای $\{f_i\}_{i\in I}$ است. پس از چاپ این مقاله، دوگان‌های تقریبی برای قاب‌ها و تعمیم‌های آنها هم در حالت گسسته و هم پیوسته مورد توجه قرار گرفتند (مقالات [۱۳، ۱۵، ۱۶، ۱۹] و [۱۷، ۲۰، ۲۱، ۲۵] را مشاهده کنید).

تعریف ۶.۲. فرض کنیم $\mathcal{F}=\{f_i\}_{i\in I}$ و $\mathcal{G}=\{g_i\}_{i\in I}$ دو دنبالهٔ بسل برای H باشند و $R_{\mathcal{G}\mathcal{F}}:=T_{\mathcal{G}}T^*_{\mathcal{F}}$. می‌گوییم $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ دوگان‌های تقریبی هستند اگر $\|Id_H-R_{\mathcal{G}\mathcal{F}}\|<۱$ یا $\|Id_H-R_{\mathcal{F}\mathcal{G}}\|<۱$. در این حالت $\mathcal{G}$ را یک دوگان تقریبی $\mathcal{F}$ می‌نامیم.

توجه کنید که چون $R^*_{\mathcal{F}\mathcal{G}}=R_{\mathcal{G}\mathcal{F}}$، پس شرایط بالا هم‌ارزند. به‌راحتی به دست می‌آید که به‌ازای هر $f\in H$،

$$R_{\mathcal{G}\mathcal{F}}(f)=\sum_{i\in I}\langle f,f_i\rangle g_i,\quad R_{\mathcal{F}\mathcal{G}}(f)=\sum_{i\in I}\langle f,g_i\rangle f_i.$$

همچنین فرمول‌های بازسازی زیر برقرارند:

$$R_{\mathcal{G}\mathcal{F}}(R^{-۱}_{\mathcal{G}\mathcal{F}}f)=\sum_{n=۰}^{\infty}R_{\mathcal{G}\mathcal{F}}(Id_H-R_{\mathcal{G}\mathcal{F}})^n f=f=R^{-۱}_{\mathcal{G}\mathcal{F}}R_{\mathcal{G}\mathcal{F}}f=\sum_{n=۰}^{\infty}(Id_H-R_{\mathcal{G}\mathcal{F}})^n R_{\mathcal{G}\mathcal{F}}(f).$$

اگر $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ دوگان‌های تقریبی باشند، آن‌گاه هر دوی آنها قاب هستند.

فرض کنیم Λ و Γ دو g-دنبالهٔ بسل و T_Λ و T_Γ به‌ترتیب عملگرهای ترکیب Λ و Γ باشند. قرار می‌دهیم $S_{\Gamma\Lambda}:=T_\Gamma T^*_\Lambda$. به‌راحتی مشاهده می‌شود که به‌ازای هر $f\in H$، $S_{\Gamma\Lambda}(f)=\sum_{i\in I}\Gamma^*_i\Lambda_i f$، $S^*_{\Gamma\Lambda}=S_{\Lambda\Gamma}$ و $S_{\Lambda\Lambda}=S_\Lambda$.

تعریف ۷.۲. دو g-دنبالهٔ بسل Λ و Γ را g-دوگان‌های تقریبی می‌نامیم هرگاه داشته باشیم $\|Id_H-S_{\Gamma\Lambda}\|<۱$ یا $\|Id_H-S_{\Lambda\Gamma}\|<۱$. در این حالت، Γ را یک g-دوگان تقریبی Λ می‌نامیم.

واضح است که هر g-دوگان Λ، یک دوگان تقریبی برای آن است. دقت کنید که شرایط ذکرشده در تعریف ۷.۲ هم‌ارز هستند، کافی است توجه کنیم که

$$\|Id_H-S_{\Gamma\Lambda}\|=\|(Id_H-S_{\Gamma\Lambda})^*\|=\|Id_H-S_{\Lambda\Gamma}\|.$$

چون $\|Id_H-S_{\Gamma\Lambda}\|<۱$ و $\|Id_H-S_{\Lambda\Gamma}\|<۱$، پس $S_{\Gamma\Lambda}$ و $S_{\Lambda\Gamma}$ وارون‌پذیر هستند و $S^{-۱}_{\Lambda\Gamma}=\sum_{n=۰}^{\infty}(Id_H-S_{\Lambda\Gamma})^n$. اکنون برای هر $f\in H$، فرمول‌های بازسازی زیر را به دست می‌آوریم:

$$f=S_{\Lambda\Gamma}S^{-۱}_{\Lambda\Gamma}f=\sum_{n=۰}^{\infty}S_{\Lambda\Gamma}(Id_H-S_{\Lambda\Gamma})^n f,\quad f=S^{-۱}_{\Lambda\Gamma}S_{\Lambda\Gamma}f=\sum_{n=۰}^{\infty}(Id_H-S_{\Lambda\Gamma})^n S_{\Lambda\Gamma}f.$$

به‌راحتی می‌توان مشاهده کرد که $\{\Gamma_i S^{-۱}_{\Lambda\Gamma}=\Gamma_i+\sum_{n=۱}^{\infty}\Gamma_i(Id_H-S_{\Lambda\Gamma})^n\}_{i\in I}$ و $\{\Lambda_i S^{-۱}_{\Gamma\Lambda}=\Lambda_i+\sum_{n=۱}^{\infty}\Lambda_i(Id_H-S_{\Gamma\Lambda})^n\}_{i\in I}$ به‌ترتیب g-دوگان‌هایی برای Λ و Γ هستند.

قضیه ۸.۲. فرض کنیم H و K دو فضای هیلبرت باشند. همچنین فرض می‌کنیم T و S دو عملگر طول‌پا به‌ترتیب روی H و K باشند. در این صورت

(الف) اگر $\Gamma = \{\Gamma_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$ یک g-دوگان (g-دوگان تقریبی) برای $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$ باشد، آن‌گاه $\Gamma_T := \{\Gamma_i T\}_{i\in I}$ یک g-دوگان (g-دوگان تقریبی) برای $\Lambda_T := \{\Lambda_i T\}_{i\in I}$ است.

(ب) اگر $\Gamma = \{\Gamma_i \in L(H, K) : i \in I\}$ یک g-دوگان (g-دوگان تقریبی) برای $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(H, K) : i \in I\}$ باشد، آن‌گاه $\Gamma_S := \{S\Gamma_i\}_{i\in I}$ یک g-دوگان (g-دوگان تقریبی) برای $\Lambda_S := \{S\Lambda_i\}_{i\in I}$ است.

اثبات. (الف) ابتدا دقت کنید که Λ_T و Γ_T هر دو g-دنبالهٔ بسل هستند، زیرا به‌ازای هر $f \in H$ داریم

$$\sum_{i\in I} \|\Lambda_i T f\|^۲ \leq B_\Lambda \|Tf\|^۲ \leq B_\Lambda \|T\|^۲ \|f\|^۲$$

همین‌طور $\sum_{i\in I} \|\Gamma_i T f\|^۲ \leq B_\Gamma \|T\|^۲ \|f\|^۲$. اینک داریم

$$S_{\Gamma_T\Lambda_T} f = \sum_{i\in I} (\Gamma_i T)^* (\Lambda_i T) f = T^* (\sum_{i\in I} \Gamma_i^* \Lambda_i (Tf)) = T^* S_{\Gamma\Lambda} T f.$$

اگر Γ یک g-دوگان Λ باشد، آن‌گاه $S_{\Gamma\Lambda} = Id_H$، لذا $S_{\Gamma_T\Lambda_T} = T^*T = Id_H$ بنابراین Γ_T یک g-دوگان Λ_T است. اگر Γ یک g-دوگان تقریبی Λ باشد، آن‌گاه $\|S_{\Gamma\Lambda} - Id_H\| < ۱$، لذا

$$\begin{aligned} \|S_{\Gamma_T\Lambda_T} - Id_H\| &= \|T^* S_{\Gamma\Lambda} T - T^* T\| \\ &\leq \|T^*\| \|S_{\Gamma\Lambda} - Id_H\| \|T\| \\ &= \|S_{\Gamma\Lambda} - Id_H\| < ۱. \end{aligned}$$

نامساوی فوق ایجاب می‌کند که Γ_T یک g-دوگان تقریبی Λ_T باشد.

(ب) اثبات قسمت (ب) همانند (الف) و با استفاده از رابطهٔ

$$\sum_{i\in I} (S\Gamma_i)^* (S\Lambda_i) f = \sum_{i\in I} \Gamma_i^* S^* S \Lambda_i f = \sum_{i\in I} \Gamma_i^* \Lambda_i f$$

به دست می‌آید.

□

قضیه ۹.۲. فرض کنیم $\Gamma = \{\Gamma_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$ یک g-دوگان برای $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$ باشد. همچنین T را یک عملگر کران‌دار روی H در نظر می‌گیریم. در این صورت

(الف) $\Gamma_T := \{\Gamma_i T\}_{i\in I}$ یک g-دوگان $\Lambda_T := \{\Lambda_i T\}_{i\in I}$ است اگر و فقط اگر T یک عملگر طول‌پا باشد.

(ب) $\Gamma_T := \{\Gamma_i T\}_{i\in I}$ یک g-دوگان تقریبی $\Lambda_T := \{\Lambda_i T\}_{i\in I}$ است اگر و فقط اگر $\|T^*T - Id_H\| < ۱$.

اثبات. چون Γ یک g-دوگان Λ است، داریم $S_{\Gamma\Lambda} = Id_H$. اکنون به‌ازای هر $f \in H$ داریم

$$S_{\Gamma_T\Lambda_T} f = T^* \sum_{i\in I} \Gamma_i^* \Lambda_i (Tf) = T^* S_{\Gamma\Lambda} T f = T^* T f.$$

اینک (الف) و (ب) از رابطهٔ فوق به دست می‌آیند. □

قضیه ۱۰.۲. فرض کنیم $F, G : \Omega \longrightarrow H$ دو نگاشت بسل پیوسته باشند. همچنین فرض می‌کنیم T یک عملگر کران‌دار روی H باشد به‌طوری‌که T^* طول‌پا باشد. در این صورت اگر G یک دوگان (دوگان تقریبی) F باشد، آن‌گاه $T \circ G$ یک دوگان (دوگان تقریبی) $T \circ F$ است.

اثبات. به‌سادگی می‌توان نشان داد که تابع $T \circ F : \Omega \longrightarrow H$ به‌طور ضعیف اندازه‌پذیر است. همچنین به‌ازای هر $f \in H$ داریم:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\langle f, (T\circ F)(\omega)\rangle|^2 d\mu(\omega) &= \int_\Omega |\langle T^* f, F(\omega)\rangle|^2 d\mu(\omega)\\ &\leq B_F \|T^* f\|^2\\ &\leq B_F \|T^*\|^2 \|f\|^2.\end{aligned}$$

نامساوی فوق نشان می‌دهد که $T\circ F$ یک نگاشت بسل پیوسته است. به همین شکل، می‌توان نشان داد که $T\circ G$ نیز یک نگاشت بسل پیوسته است. همچنین به‌ازای هر $f, g \in H$ داریم:

$$\begin{aligned}\langle T_{(T\circ G)} T^*_{(T\circ F)} f, g\rangle &= \int_\Omega \langle f, (T\circ F)(\omega)\rangle \langle (T\circ G)(\omega), g\rangle d\mu(\omega)\\ &= \int_\Omega \langle T^* f, F(\omega)\rangle\langle G(\omega), T^* g\rangle d\mu(\omega)\\ &= \langle T_G T_F^* (T^* f), T^* g\rangle.\end{aligned}$$

بنابراین $T_{(T\circ G)} T^*_{(T\circ F)} = T T_G T_F^* T^*$. حال اگر G یک دوگان F باشد، آن‌گاه داریم $T_G T_F^* = Id_H$، لذا $T_{(T\circ G)} T^*_{(T\circ F)} = TT^* = Id_H$ و اگر G یک دوگان تقریبی F باشد، آن‌گاه $\|T_G T_F^* - Id_H\| < 1$، لذا

$$\begin{aligned}\|T_{(T\circ G)} T^*_{(T\circ F)} - Id_H\| &\leq \|T\|\|T_G T_F^* - Id_H\|\|T^*\|\\ &= \|T_G T_F^* - Id_H\| < 1\end{aligned}$$

و قضیه اثبات می‌شود. □

مشابه اثبات قضیه ۱۰.۲، نتیجه‌ای مشابه قضیه ۹.۲ برای قاب‌های پیوسته به‌شکل زیر به دست می‌آید.

قضیه ۱۱.۲. فرض کنیم $G : \Omega \longrightarrow H$ یک دوگان $F : \Omega \longrightarrow H$ باشد. همچنین T را یک عملگر کران‌دار روی H در نظر می‌گیریم. در این صورت $T\circ G$ یک دوگان (دوگان تقریبی) $T\circ F$ است اگر و فقط اگر T^* طول‌پا باشد ($\|TT^* - Id_H\| < 1$).

مشخص است که اگر Ω را مجموعهٔ اعداد طبیعی و μ را اندازهٔ شمارشی در نظر بگیریم، یک قاب پیوسته، تبدیل به یک قاب گسسته می‌شود.

نتیجه ۱۲.۲. فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ و $\{g_i\}_{i\in I}$ دو دنبالهٔ بسل برای فضای هیلبرت H باشند. همچنین فرض می‌کنیم T یک عملگر کران‌دار روی H باشد به‌طوری‌که T^* طول‌پا باشد. در این صورت، اگر $\{g_i\}_{i\in I}$ یک دوگان (دوگان تقریبی) $\{f_i\}_{i\in I}$ باشد، آن‌گاه $\{Tg_i\}_{i\in I}$ یک دوگان (دوگان تقریبی) $\{Tf_i\}_{i\in I}$ است.

نتیجه ۱۳.۲. فرض کنیم $\{g_i\}_{i\in I}$ یک دوگان $\{f_i\}_{i\in I}$ باشد. همچنین T را یک عملگر کران‌دار روی H در نظر می‌گیریم. در این صورت، $\{T(g_i)\}_{i\in I}$ یک دوگان (دوگان تقریبی) $\{Tf_i\}_{i\in I}$ است اگر و فقط اگر T^* طول‌پا باشد ($\|TT^* - Id_H\| < 1$).

۳ قاب‌ها در C^*-مدول‌های هیلبرت

C^*-مدول‌های هیلبرت، تعمیم‌هایی از فضاهای هیلبرت هستند که همانند فضاهای هیلبرت دارای یک ضرب داخلی هستند با این تفاوت که ضرب داخلی دو عضو از یک C^*-مدول هیلبرت عضوی از یک C^*-جبر است و اگر این C^*-جبر میدان اعداد مختلط باشد، آن‌گاه این C^*-مدول هیلبرت، یک فضای هیلبرت خواهد بود.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک C^*-جبر و E یک $\mathfrak{A}$-مدول چپ باشد. E را یک پیش C^*-مدول هیلبرت گوییم اگر ضرب داخلی $\mathfrak{A}$-مقدار $\langle .,. \rangle : E\times E \to \mathfrak{A}$ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x, y, z \in E$ ، $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ و $a \in \mathfrak{A}$ داشته باشیم:

(آ) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$؛

(ب) $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$؛

(پ) $\langle x,y\rangle^*=\langle y,x\rangle$؛

(ت) $\langle x,x\rangle\geq 0$ و اگر $\langle x,x\rangle=0$، آن‌گاه $x=0$.

برای هر $x\in E$، تعریف می‌کنیم $\|x\|:=\|\langle x,x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$. اگر E با این نرم کامل باشد، آن‌گاه E را یک $\mathfrak{A}$-مدول هیلبرت یا یک C^*-مدول هیلبرت روی $\mathfrak{A}$ می‌نامیم.
برای هر $a\in\mathfrak{A}$، داریم $|a|=(a^*a)^{\frac{1}{2}}$ و اینک برای هر $x\in E$ تعریف می‌کنیم $|x|:=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$.

مثال ۲.۳. (۱) فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک C^*-جبر باشد. خود $\mathfrak{A}$ با ضرب داخلی زیر یک C^*-مدول هیلبرت است.

$$\langle a,b\rangle=ab^*\quad (a,b\in\mathfrak{A}).$$

(۲) $\ell^2(I,\mathfrak{A})$ که به‌صورت

$$\ell^2(I,\mathfrak{A})=\left\{\{a_i\}_{i\in I}\subseteq\mathfrak{A}\ \middle|\ \sum_{i\in I}a_ia_i^* \text{ با نرم همگرا باشد.}\right\}$$

تعریف می‌شود با ضرب داخلی $\langle\{a_i\}_{i\in I},\{b_i\}_{i\in I}\rangle=\sum_{i\in I}a_ib_i^*$ یک $\mathfrak{A}$-مدول هیلبرت است.

(۳) اگر $\{E_i: i\in I\}$ دنباله‌ای از $\mathfrak{A}$-مدول‌های هیلبرت باشد، آن‌گاه

$$\oplus_{i\in I}E_i=\left\{\{x_i\}_{i\in I}\middle| x_i\in E_i \text{ و } \sum_{i\in I}\langle x_i,x_i\rangle \text{ با نرم در } \mathfrak{A} \text{ همگرا باشد.}\right\}$$

با اعمال نقطه‌به‌نقطه و ضرب داخلی

$$\langle\{x_i\}_{i\in I},\{y_i\}_{i\in I}\rangle=\sum_{i\in I}\langle x_i,y_i\rangle,$$

یک $\mathfrak{A}$-مدول هیلبرت است.

تعریف ۳.۳. فرض کنیم E و F دو C^*-مدول هیلبرت باشند. عملگر $T:E\to F$ را الحاقی‌پذیر گوییم اگر یک عملگر $T^*:F\to E$ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x\in E$ و $y\in F$ تساوی زیر برقرار باشد

$$\langle T(x),y\rangle=\langle x,T^*(y)\rangle.$$

عملگر T^* را الحاقی T می‌نامیم.

هر عملگر الحاقی‌پذیر مانند T کران‌دار و خطی است (یعنی به‌ازای هر $a\in\mathfrak{A}$ و $x\in E$ داریم $T(ax)=aT(x)$). مجموعهٔ تمام عملگرهای الحاقی‌پذیر از E به F را با $\mathfrak{L}(E,F)$ نمایش می‌دهیم. دقت شود که $\mathfrak{L}(E,E)$ یک C^*-جبر است که آن را با $\mathfrak{L}(E)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۳. فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک C^*-جبر باشد.

(آ) $\mathfrak{A}$-مدول هیلبرت E را به‌طور متناهی تولیدشده گوییم اگر زیرمجموعهٔ متناهی $\{x_1,\cdots,x_n\}\subseteq E$ موجود باشد به‌طوری‌که هر $x\in E$ را بتوان به‌صورت یک ترکیب $\mathfrak{A}$-خطی مانند $x=\sum_{i=1}^n a_ix_i$ ، $a_i\in\mathfrak{A}$ نوشت.

(ب) $\mathfrak{A}$-مدول هیلبرت E را به‌طور شمارا تولیدشده گوییم اگر زیرمجموعهٔ شمارایی مانند $\{x_i\}_{i\in I}$ موجود باشد به‌طوری‌که هر $x\in E$، در بستار غلاف $\mathfrak{A}$-خطی $\{x_i\}_{i\in I}$ باشد.

برای مطالعهٔ بیشتر در مورد C^*-مدول‌های هیلبرت به [۱۴] رجوع کنید.
قاب‌ها و g-قاب‌ها در C^*-مدول‌های هیلبرت به‌ترتیب در [۸] و [۱۲] معرفی شدند.

تعریف ۵.۳. فرض کنیم E یک C^*-مدول هیلبرت باشد. دنبالهٔ $\{f_i\}_{i\in I}\subseteq E$ را یک قاب برای E گوییم اگر دو عدد مثبت A و B موجود باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر $x\in E$، نامساوی زیر برقرار باشد:

$$A\langle x,x\rangle\leq\sum_{i\in I}\langle x,f_i\rangle\langle f_i,x\rangle\leq B\langle x,x\rangle.$$

در این حالت $\{f_i\}_{i\in I}$ را یک (A,B)-قاب می‌نامیم.

A و B را کران‌های قاب می‌نامیم (A را یک کران پایین و B را یک کران بالا گوییم). اگر نامساوی سمت راست برقرار باشد $\{f_i\}_{i\in I}$ را یک دنبالهٔ بسل می‌نامیم. اگر به‌ازای هر $x\in E$، سری $\sum_{i\in I}\langle x,f_i\rangle\langle f_i,x\rangle$ با نرم همگرا باشد، آن‌گاه قاب را استاندارد گوییم. اکنون قضیهٔ مهم زیر را از [۲] ذکر می‌کنیم.

قضیه ۶.۳. فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک C^*-جبر و E یک $\mathfrak{A}$-مدول هیلبرت به‌طور شمارا تولیدشده باشد. همچنین فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنباله در E باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x\in E$، $\sum_{i\in I}\langle x,f_i\rangle\langle f_i,x\rangle$ با نرم همگرا باشد. در این صورت، $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب استاندارد برای E است اگر و فقط اگر دو عدد مثبت A و B موجود باشند به‌طوری‌که

$$A\|x\|^۲\leq\left\|\sum_{i\in I}\langle x,f_i\rangle\langle f_i,x\rangle\right\|\leq B\|x\|^۲,\quad\forall x\in E.$$

تعریف ۷.۳. فرض کنیم $\mathcal{F}=\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل استاندارد باشد. در این صورت

(آ) عملگر تحلیل $\mathcal{F}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$D_{\mathcal{F}}:E\to\ell^۲(I,\mathfrak{A}),\quad D_{\mathcal{F}}(x)=\{\langle x,f_i\rangle\}_{i\in I}.$$

به‌آسانی می‌توان مشاهده نمود که $D_{\mathcal{F}}$ الحاقی‌پذیر است.

(ب) الحاقی عملگر $D_{\mathcal{F}}$، که $D^*_{\mathcal{F}}(\{a_i\}_{i\in I})=\sum_{i\in I}a_if_i$ است، عملگر ترکیب $\mathcal{F}$ نامیده می‌شود.

(پ) $S_{\mathcal{F}}=D^*_{\mathcal{F}}D_{\mathcal{F}}$ عملگر بسل $\mathcal{F}$ نامیده می‌شود و به‌ازای هر $x\in E$ داریم

$$S_{\mathcal{F}}x:=\sum_{i\in I}\langle x,f_i\rangle f_i.$$

اگر B یک کران بالا برای $\mathcal{F}$ باشد، آن‌گاه $\|D_{\mathcal{F}}\|\leq\sqrt{B}$.

اگر $\mathcal{F}$ یک (A,B)-قاب استاندارد باشد، آن‌گاه $A\cdot Id_E\leq S_{\mathcal{F}}\leq B\cdot Id_E$. حال تعریف می‌کنیم $\widetilde{f_i}=S^{-۱}_{\mathcal{F}}f_i$. اکنون برای هر $x\in E$ ، خواهیم داشت

$$\sum_{i\in I}\langle x,\widetilde{f_i}\rangle f_i=x=\sum_{i\in I}\langle x,f_i\rangle\widetilde{f_i}.$$

دنبالهٔ $\widetilde{\mathcal{F}}=\{\widetilde{f_i}\}_{i\in I}$ یک $(\frac{۱}{B},\frac{۱}{A})$-قاب استاندارد برای E است که آن را دوگان کانونی $\mathcal{F}$ می‌نامیم. دنبالهٔ بسل استاندارد $\{g_i\}_{i\in I}$ یک دوگان برای دنبالهٔ بسل $\{f_i\}_{i\in I}$ نامیده می‌شود اگر برای هر $x\in E$، داشته باشیم

$$x=\sum_{i\in I}\langle x,f_i\rangle g_i.$$

قضیهٔ زیر را از [۸] یادآوری می‌کنیم.

قضیه ۸.۳. فرض کنیم E یک C^*-مدول هیلبرت به‌طور شمارا تولیدشده باشد و $\mathcal{F}=\{f_i\}_{i\in I}$ و $\mathcal{G}=\{g_i\}_{i\in I}$ دو دنبالهٔ بسل استاندارد در E باشند. اگر برای هر $x\in E$ داشته باشیم $x=\sum_{i\in I}\langle x,f_i\rangle g_i$، آن‌گاه $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ قاب‌های استاندارد هستند و برای هر $x\in E$، خواهیم داشت $x=\sum_{i\in I}\langle x,g_i\rangle f_i$.

تعریف ۹.۳. فرض کنیم $\{E_i\}_{i\in I}$ دنباله‌ای از C^*-مدول‌های هیلبرت باشد. دنبالهٔ $\Lambda = \{\Lambda_i \in \mathfrak{L}(E, E_i) \,:\, i\in I\}$ یک g-قاب برای E نسبت به $\{E_i\}_{i\in I}$ نامیده می‌شود اگر دو عدد مثبت A و B موجود باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر $x\in E$، نامساوی زیر برقرار باشد

$$A\langle x,x\rangle \leq \sum_{i\in I}\langle \Lambda_i x, \Lambda_i x\rangle \leq B\langle x,x\rangle.$$

در این حالت Λ را یک (A,B) g-قاب می‌نامیم. A و B را کران‌های g-قاب می‌نامیم. g-قاب Λ را استاندارد گوییم اگر برای هر $x\in E$، سری $\sum_{i\in I}\langle \Lambda_i x, \Lambda_i x\rangle$ با نرم همگرا باشد. همچنین اگر نامساوی سمت راست برقرار باشد، آن‌گاه Λ را یک g-دنبالهٔ بسل می‌نامیم.

اکنون قضیهٔ مهم زیر را از [۲۴] ذکر می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۳. فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_i \in \mathfrak{L}(E, E_i) \,:\, i\in I\}$ و به‌ازای هر $x\in E$، $\sum_{i\in I}\langle \Lambda_i x, \Lambda_i x\rangle$ با نرم همگرا باشد. در این صورت، Λ یک g-قاب استاندارد است اگر و فقط اگر دو عدد مثبت A و B موجود باشند به‌طوری‌که

$$A\|x\|^۲ \leq \left\|\sum_{i\in I}\langle \Lambda_i x, \Lambda_i x\rangle\right\| \leq B\|x\|^۲ \quad \forall x\in E.$$

تمام نتایجی که در بخش قبل برای پایایی g-قاب‌ها و قاب‌ها تحت عملگرهای کران‌دار به دست آمدند را می‌توان با برهان مشابه برای پایایی g-قاب‌ها و قاب‌ها در C^*-مدول‌های هیلبرت تحت عملگرهای الحاقی‌پذیر بیان نمود.
اکنون دسته‌ای از عملگرها روی C^*-مدول‌های هیلبرت را در نظر می‌گیریم که در [۳] معرفی شدند. این عملگرها کران‌دار هستند؛ اما لزوماً الحاقی‌پذیر نیستند.

تعریف ۱۱.۳. فرض کنیم $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ دو C^*-جبر و E و F به‌ترتیب دو $\mathfrak{A}$-مدول هیلبرت و $\mathfrak{B}$-مدول هیلبرت باشند. همچنین φ را یک $*$-هم‌ریختی از $\mathfrak{A}$ به $\mathfrak{B}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت، عملگر $\phi: E\longrightarrow F$ را یک φ-ریخت می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $x,y\in E$ داشته باشیم

$$\langle \phi(x), \phi(y)\rangle_{\mathfrak{B}} = \varphi(\langle x,y\rangle_{\mathfrak{A}}).$$

تعریف فوق نشان می‌دهد که به‌ازای هر $x\in E$ داریم

$$\begin{aligned}\|\phi(x)\|^۲ &= \|\langle \phi(x), \phi(x)\rangle_{\mathfrak{B}}\| = \|\varphi(\langle x,x\rangle_{\mathfrak{A}})\|\\ &\leq \|\langle x,x\rangle_{\mathfrak{A}}\| = \|x\|^۲\end{aligned}$$

لذا ϕ یک عملگر کران‌دار با $\|\phi\| \leq ۱$ است.
در [۱۸] نتایجی در مورد پایایی قاب‌ها تحت φ-ریخت‌ها به دست آمده‌اند، همچنین مثالی از یک φ-ریخت که الحاقی‌پذیر نیست ارائه شده است. اکنون پایایی دوگان‌ها و g-دوگان‌ها تحت این عملگرها را مورد توجه قرار می‌دهیم. دقت شود که در مورد این عملگرها، طول‌پا بودن یعنی برقراری تساوی $\|\phi(x)\|^۲ = \|x\|^۲$ (به‌ازای هر $x\in E$). چون ϕ لزوماً الحاقی‌پذیر نیست، نمی‌توان از تساوی $\phi^*\phi = Id_E$ استفاده نمود. از تعریف دوگان یک g-قاب برمی‌آید که $\Gamma = \{\Gamma_i\}_{i\in I}$ یک g-دوگان $\Lambda = \{\Lambda_i\}_{i\in I}$ است اگر و فقط اگر به‌ازای هر $x,y\in E$ داشته باشیم

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i\in I}\langle \Lambda_i x, \Gamma_i y\rangle.$$

قضیه ۱۲.۳. فرض کنیم $E_۱$ یک C^*-مدول هیلبرت و $\Gamma = \{\Gamma_i \in \mathfrak{L}(E_۱, E) : i\in I\}$ یک g-دوگان برای $\Lambda = \{\Lambda_i \in \mathfrak{L}(E_۱, E) : i\in I\}$ باشد. همچنین فرض می‌کنیم به‌ازای هر $i\in I$، $\phi\Gamma_i$ و $\phi\Lambda_i$ الحاقی‌پذیر باشند. در این صورت $\Gamma_\phi := \{\phi\Gamma_i\}_{i\in I}$ و $\Lambda_\phi := \{\phi\Lambda_i\}_{i\in I}$ دو g-دنبالهٔ بسل هستند. اگر Γ_ϕ یک g-دوگان Λ_ϕ باشد، آن‌گاه ϕ طول‌پا است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم Λ_ϕ و Γ_ϕ دو g-دنبالهٔ بسل هستند. فرض کنیم $f \in E_1$ چون $\{\Lambda_i\}_{i\in I}$ یک g-دنبالهٔ بسل است، پس $\sum_{i\in I}\langle\Lambda_i f, \Lambda_i f\rangle$ با نرم همگراست، لذا تساوی

$$\sum_{i\in I}\langle\phi\Lambda_i f, \phi\Lambda_i f\rangle = \varphi\left(\sum_{i\in I}\langle\Lambda_i f, \Lambda_i f\rangle\right)$$

ایجاب می‌کند که $\sum_{i\in I}\langle\phi\Lambda_i f, \phi\Lambda_i f\rangle$ با نرم همگرا باشد. همچنین

$$\left\|\sum_{i\in I}\langle\phi\Lambda_i f, \phi\Lambda_i f\rangle\right\| = \left\|\varphi\left(\sum_{i\in I}\langle\Lambda_i f, \Lambda_i f\rangle\right)\right\| \le \left\|\sum_{i\in I}\langle\Lambda_i f, \Lambda_i f\rangle\right\| \le B_\Lambda\|f\|^2.$$

اکنون از قضیه ۱۰.۳ نتیجه می‌شود که $\{\phi\Lambda_i\}_{i\in I}$ یک g-دنبالهٔ بسل است. به همین شکل می‌توان نشان داد که Γ_ϕ هم یک g-دنبالهٔ بسل است. به‌ازای هر $f, g \in E_1$ داریم

$$\left\|\sum_{i\in I}\langle\phi\Lambda_i f, \phi\Gamma_i g\rangle\right\| = \left\|\varphi\left(\sum_{i\in I}\langle\Lambda_i f, \Gamma_i g\rangle\right)\right\| = \|\varphi(\langle f, g\rangle)\| = \|\langle\phi(f), \phi(g)\rangle\|.$$

اینک اگر Γ_ϕ یک g-دوگان Λ_ϕ باشد، داریم $\|\langle f, g\rangle\| = \|\sum_{i\in I}\langle\phi\Lambda_i f, \phi\Gamma_i g\rangle\|$ لذا $\|\langle f, g\rangle\| = \|\langle\phi(f), \phi(g)\rangle\|$ و این تساوی ایجاب می‌کند که ϕ طول‌پا باشد. $\square$

ملاحظه ۱۳.۳. فرض کنیم $\phi : E \longrightarrow F$ پوشا باشد. در این صورت اگر $y \in F$، آن‌گاه $p \in E$ موجود است به‌طوری‌که $\phi(p) = y$.
اکنون به‌ازای هر $a \in \mathfrak{A}$ و $x \in E$ داریم:

$$\begin{aligned}
\langle\phi(ax), y\rangle &= \langle\phi(ax), \phi(p)\rangle \\
&= \varphi(\langle ax, p\rangle) \\
&= \varphi(a\langle x, p\rangle) \\
&= \varphi(a)\varphi(\langle x, p\rangle) \\
&= \varphi(a)\langle\phi(x), \phi(p)\rangle \\
&= \langle\varphi(a)\phi(x), y\rangle.
\end{aligned}$$

چون تساوی فوق به‌ازای هر $a \in \mathfrak{A}$، $x \in E$ و $y \in F$ برقرار است، داریم

$$\phi(ax) = \varphi(a)\phi(x).$$

قضیه ۱۴.۳. فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ و $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in I}$ دو دنبالهٔ بسل در E باشند به‌طوری‌که $\mathcal{G}$ یک دوگان $\mathcal{F}$ است. در این صورت اگر ϕ پوشا باشد، آن‌گاه $\mathcal{G}_\phi := \{\phi g_i\}_{i\in I}$ نیز یک دوگان برای $\mathcal{F}_\phi := \{\phi f_i\}_{i\in I}$ است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $\mathcal{G}_\phi$ و $\mathcal{F}_\phi$ دنباله‌های بسل هستند. فرض کنیم $h \in F$. چون ϕ پوشا است، پس یک $f \in E$ موجود است به‌طوری‌که $\phi(f) = h$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I}\langle h, \phi(f_i)\rangle\langle\phi(f_i), h\rangle &= \sum_{i\in I}\langle\phi(f), \phi(f_i)\rangle\langle\phi(f_i), \phi(f)\rangle \\
&= \sum_{i\in I}\varphi(\langle f, f_i\rangle)\varphi(\langle f_i, f\rangle) = \varphi\left(\sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle\langle f_i, f\rangle\right).
\end{aligned}$$

چون $\mathcal{F}$ یک دنبالهٔ بسل است، سری $\sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle\langle f_i, f\rangle$ با نرم همگرا است، لذا $\sum_{i\in I}\langle h, \phi(f_i)\rangle\langle\phi(f_i), h\rangle$ نیز عضوی از C^*-جبر است. همچنین

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i\in I}\langle h, \phi(f_i)\rangle\langle\phi(f_i), h\rangle\right\| &= \left\|\left\langle\sum_{i\in I}\langle h, \phi(f_i)\rangle\phi(f_i), h\right\rangle\right\| \\
&= \left\|\left\langle\phi\left(\sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle f_i\right), \phi(f)\right\rangle\right\| \\
&= \left\|\varphi\left(\sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle\langle f_i, f\rangle\right)\right\| \\
&\leq \|B_{\mathcal{F}}\varphi(\langle f, f\rangle)\| \\
&= B_{\mathcal{F}}\|\phi(f)\|^۲ = B_{\mathcal{F}}\|h\|^۲.
\end{aligned}$$

لذا بنا بر قضیه ۶.۳، $\mathcal{F}_\phi$ یک دنبالهٔ بسل است. به همین ترتیب، می‌توان نشان داد $\mathcal{G}_\phi$ نیز دنبالهٔ بسل است. اکنون نشان می‌دهیم $\mathcal{G}_\phi$ یک دوگان برای $\mathcal{F}_\phi$ است. فرض کنیم $h \in F$. چون ϕ پوشا است، پس یک $f \in E$ موجود است به‌طوری‌که $\phi(f) = h$. اکنون داریم

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I}\langle h, \phi(f_i)\rangle\phi(g_i) &= \sum_{i\in I}\langle\phi(f), \phi(f_i)\rangle\phi(g_i) \\
&= \sum_{i\in I}\varphi(\langle f, f_i\rangle)\phi(g_i) \\
&= \sum_{i\in I}\phi(\langle f, f_i\rangle g_i) \\
&= \phi\left(\sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle g_i\right) = \phi(f) = h.
\end{aligned}$$

رابطهٔ فوق بدین معنی است که $\mathcal{G}_\phi$ یک دوگان برای $\mathcal{F}_\phi$ است. $\square$

دقت کنید که قضیهٔ قبل لزوماً برای هر عملگر الحاقی‌پذیر حتی اگر وارون‌پذیر باشد، صحیح نیست.

مثال ۱۵.۳. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت با پایهٔ متعامدیکه $\mathcal{F} = \{e_n\}_{n=۱}^{\infty}$ باشد. همچنین فرض می‌کنیم α یک عدد مختلط غیرصفر با خاصیت $|\alpha| \neq ۱$ باشد و $T = \alpha \cdot Id_H$. در این صورت $\mathcal{F}$ یک دوگان خودش است؛ اما به‌ازای هر $f \in H$ داریم

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\langle f, Te_n\rangle Te_n = |\alpha|^۲\sum_{n=۱}^{\infty}\langle f, e_n\rangle e_n = |\alpha|^۲ f.$$

چون $|\alpha| \neq ۱$، به‌ازای هر $f \in H$، تساوی $\sum_{n=۱}^{\infty}\langle f, Te_n\rangle Te_n = f$ حاصل نمی‌شود، لذا $\{Te_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دوگان خودش نیست. دقت شود که T یک عملگر کران‌دار، الحاقی‌پذیر و وارون‌پذیر است.

References

[1] Ali, S.T., Antoine, J.P., & Gazeau, J.P. (1993). Continuous frames in Hilbert spaces. *Ann. Physics*, 222, 1–37. DOI: https://doi.org/10.1006/aphy.1993.1016.

[2] Arambasic, L. (2007). On frames for countably generated Hilbert C^*-modules. *Proc. Amer. Math. Soc*, 135, 469–478. DOI: https://doi.org/10.1090/s0002-9939-06-08498-x.

[3] Bakic, D., & Guljas, B. (2002). On a class of module maps of Hilbert C^*-modules. *Mathematical Communications*, 7, 177–192.

[4] Christensen, O. (2008). Frames and Bases. *Birkhauser, Boston*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4678-3.

[5] Christensen, O., & Laugesen, R.S. (2011). Approximate dual frames in Hilbert spaces and applications to Gabor frames. *Sampl Theory Signal Image Process*, 9, 77–90. DOI: https://doi.org/10.1007/BF03549525.

[6] Daubechies, I., Grossmann, A., & Meyer, Y. (1986). Painless nonorthogonal expansions. *J. Math. Phys*, 27, 1271–1283. DOI: https://doi.org/10.1063/1.527388.

[7] Duffin, R.J., & Schaeffer, A.C. (1952). A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc*, 72, 341–366. DOI: https://doi.org/10.2307/1990760.

[8] Frank, M., & Larson, D.R. (2002). Frames in Hilbert C^*-modules and C^*-algebras. *J. Operator Theory*, 48, 273–314.

[9] Gabardo, J.P., & Han, D. (2003). Frame associated with measurable spaces. *Adv. Comp. Math*, 18, 127–147. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1021312429186.

[10] Gabor, D. (1946). Theory of communications. *J. Inst. Electr. Eng*, 93, 429–457.

[11] Kaiser, G. (1994). A Friendly Guide to Wavelets. *Birkhauser, Boston*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8111-1.

[12] Khosravi, A., & Khosravi, B. (2008). Fusion frames and g-frames in Hilbert C^*-modules. *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process*, 6, 433–446. DOI: https://doi.org/10.1142/S0219691308002458.

[13] Khosravi, A., & Mirzaee Azandaryani, M. (2014). Approximate duality of g-frames in Hilbert spaces. *Acta. Math. Sci*, 34, 639–652. DOI: https://doi.org/10.1016/S0252-9602(14)60036-9.

[14] Lance, E.C. (1995). Hilbert C^*-modules: A Toolkit for Operator Algebraists. *Cambridge University Press, Cambridge*.

[15] Mirzaee Azandaryani, M. (2015). Approximate duals and nearly Parseval frames. *Turk. J. Math*, 39, 515–526. DOI: https://doi.org/10.3906/mat-1408-37.

[16] Mirzaee Azandaryani, M. (2017). Bessel multipliers and approximate duals in Hilbert C^*-modules. *J. Korean Math. Soc*, 54, 1063–1079. DOI: https://doi.org/10.4134/JKMS.j150701.

[17] Mirzaee Azandaryani, M. (2017). On the approximate duality of g-frames and fusion frames. *U. P. B. Sci. Bull. Ser A*, 79, 83–94.

[18] Mirzaee Azandaryani, M. (2019). Approximate duals and morphisms of Hilbert C^*-modules. *Ann Funct Anal*, 10, 525–536. DOI: https://doi.org/10.1215/20088752-2019-0011.

[19] Mirzaee Azandaryani, M. (2020). An operator theory approach to the approximate duality of Hilbert space frames. *J. Math. Anal. Appl*, 489, 1–13 (124177). DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124177.

[20] Mirzaee Azandaryani, M., & Javadi, Z. (2022). Pseudo-duals of continuous frames in Hilbert spaces. *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl*, 13, 1–16. DOI: https://doi.org/10.1007/s11868-022-00486-3.

[21] Rahimi, A., Darvishi, Z., & Daraby, B. (2019). Dual pair and approximate dual for continuous frames in Hilbert spaces. *Math. Rep*, 21, 173–191.

[22] Razghandi, A., & Arefijamaal, A.A. (2020). On the characterization of generalized dual frames. *U. P. B. Sci. Bull. Ser A*, 82, 161–170.

[23] Sun, W. (2006). G-frames and g-Riesz bases. *J. Math. Anal. Appl*, 322, 437–452. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.09.039.

[24] Xiao, X., & Zeng, X. (2010). Some properties of g-frames in Hilbert C^*-modules. *J. Math. Anal. Appl*, 363, 399–408. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.08.043.

[25] Yousefzadeheyni, A., & Abdollahpour, M.R. (2020). Some properties of approximately dual continuous g-frames in Hilbert spaces. *U. P. B. Sci. Bull. Ser A*, 82, 183–194.