Measure Algebras and Applications

Woven frames and modular Riesz bases in Hilbert C^*-modules

Mohammad Reza Farmani[1] ✉, **Amir Khosravi**[2]

1. Corresponding Author, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Kharazmi University, 599 Taleghani Ave., Tehran 15618, Iran. Email: mr.farmanis@gmail.com
2. Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Kharazmi University, 599 Taleghani Ave., Tehran 15618, Iran. Email: khosravi@khu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 3 May 2023
Received in revised form: 19 July 2023
Accepted: 22 July 2023
Published Online: 30 September 2023

Keywords:
Frame,
Woven frame,
P-woven frame,
Hilbert C^*-module

2020 Mathematics Subject Classification:
42C15

ABSTRACT

In this paper, we investigate woven frames, P-woven and CP-woven frames in Hilbert C^*-modules. We also study frames, Riesz bases, and modular Riesz bases in Hilbert C^*-modules. We show that modular Riesz bases share some properties with Riesz bases in Hilbert spaces. We generalize some main results in Hilbert spaces to Hilbert C^*-modules and we get some results about perturbation and redundancy of woven frames.

Cite this article: Farmani, M.R., & Khosravi, A. (2023). Woven frames and modular Riesz bases in Hilbert C^*-modules. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 22–35. http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9392.1000

Publisher: University of Qom
DOI: 10.22091/MAA.2023.9392.1000

Extended Abstract

Introduction

Hilbert space frames were originally introduced by Duffin and Schaeffer to deal with some problems in non-harmonic Fourier analysis [8], [7]. Frames can be viewed as redundant bases which are generalizations of Riesz bases [3], [4], [5], [6], [2], [12], [13],[17]. This redundancy property sometimes is extremely important in some applications such as signal and image processing, data compression, and sampling theory.

In recent years, many mathematicians get significant results by extending the theory of frames from Hilbert spaces to Hilbert C^*-modules. Hilbert C^*-modules are generalizations of Hilbert spaces by allowing the inner product to take values in a C^*-algebra rather than in the field of real or complex numbers. They were introduced and investigated initially by Kaplansky (see also [11, 15]). Frank and Larson [9] introduced the concept of frames in finitely or countably generated Hilbert C^*-modules over a unital C^*-algebra. The second author and B. Khosravi in [12] introduced modular Riesz bases in Hilbert C^*-modules and showed that they share many properties with Riesz bases in Hilbert spaces. Frames in Hilbert C^*-modules are called Hilbert C^*-modular frames or just simply modular frames. Recently, Bemrose, Casazza, Grochenig, Lammers, and Lynch in [3] (see also [5], [14], [18]) introduced the concept of weaving frames which is motivated by a problem regarding distributed signal processing.

Let $\{f_i\}_{i\in I}$ and $\{g_i\}_{i\in I}$ be two frames for a Hilbert space H. $\{\{f_i\}_{i\in I}, \{g_i\}_{i\in I}\}$ is said to be woven if there are universal constants A and B so that for every subset σ of I, the family $\{f_i\}_{i\in\sigma} \bigcup \{g_i\}_{i\in\sigma^c}$, is a frame for H with lower and upper frame bounds A and B, respectively. The family $\{f_i\}_{i\in\sigma} \bigcup \{g_i\}_{i\in\sigma^c}$ is called a weaving, for more details see [5]. $\{\{f_i\}_{i\in I}, \{g_i\}_{i\in I}\}$ is called partition-woven, or simply P-woven, if there exists a nonempty proper subset σ of I such that $\{f_i\}_{i\in\sigma} \bigcup \{g_i\}_{i\in\sigma^c}$ is a frame (see [5]).

Conclusion

In this paper, the following definitions are stated:

***Definition* 0.1.** *A pre-Hilbert A-module is a left A-module H equipped with an A-valued inner product $\langle .,. \rangle : H \times H \longrightarrow A$, such that*
(i) $\langle x, x\rangle \geq 0$ for all $x \in H$ and $\langle x, x\rangle = 0$ if and only if $x = 0$,
$(ii)\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^*$ for all $x, y \in H$,
(iii) $\langle ax + y, z\rangle = a\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ for all $a \in A$ and $x, y, z \in H$.

***Definition* 0.2.** *Let A be a unital C^*-algebra. A sequence $\{x_i : i \in I\}$ in H is called a frame for H, if there exist two constants $0 < C \leq D < \infty$ such that*

$$C|x|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq D|x|^2,$$

for every $x \in H$, it is called a tight frame if $C = D$, is called a Parseval frame if $C = D = 1$ and is called a Bessel sequence, if the right-hand side inequality is required.

***Definition* 0.3.** *(i) A frame $\{x_i : i \in I\}$ for H is called a Riesz basis if $x_i \neq 0$ for each $i \in I$ and $\sum_{i\in S} a_i x_i = 0$ for coefficients $\{a_i : i \in S\} \subseteq A, S \subseteq I$, implies that $a_i x_i = 0$ for each $i \in S$.*
(ii) Let $\{x_i : i \in I\} \subseteq H$ be a sequence in H. We say that $\{x_i : i \in I\}$ is a modular Riesz basis, if there exists an invertible $U \in B(\ell^2_I(A), H)$ such that for every $\{a_i : i \in I\}$ in $\ell^2_I(A)$, $U(\sum_{i\in I} a_i e_i) = \sum_{i\in I} a_i x_i$, where $\{e_i : i \in I\}$ is the standard orthonormal basis of $\ell^2_I(A)$.

***Definition* 0.4.** *A sequence $\{x_i : i \in I\}$ in H which is a frame for its closed A-linear hull is called a frame sequence. If every subsequence of $\{x_i : i \in I\}$ is a frame sequence, we say that the frame has the subframe property. If $\{x_i : i \in I\}$ is a frame for H with the subframe property and additionally there are uniform upper and lower frame bounds for all subsequences of the frame, then we call $\{x_i : i \in I\}$ a Riesz frame.*

***Definition* 0.5.** *A family $\{x^j_i : i \in I\}$ for $j = 1, 2, ..., m$ of frames in H is called woven, if there exist constants $C, D > 0$ such that for every partition $P = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ of I, $\{x^j_i : i \in \sigma_j, j = 1, 2, ..., m\}$ is a frame with bounds C, D. Each family $\{x^j_i : i \in \sigma_j, j = 1, 2, ..., m\}$ is called a weaving.*

***Definition* 0.6.** *(i) A family $\{x^j_i : i \in I\}$, $j = 1, 2, ..., m$ of Bessel sequences in H is called a P-woven frame, if there exists a partition $P = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ of I such that $\{x^j_i : i \in \sigma_j, j = 1, 2, ..., m\}$ is a frame for H.*
(ii) A family $\{x^j_i : i \in I\}$ for $j = 1, 2, ..., m$ of Bessel sequences in H is CP-woven, if there exists a partition $P = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ of I such that for each permutation $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ of $\{1, 2, ..., m\}$, $\{x^j_i : i \in \sigma_{\lambda_j}, j = 1, 2, ..., m\}$ is a frame for H.

Also, the next theorems and propositions are presented:

***Theorem* 0.7.** *Let $\{x_i = Ue_i : i \in I\}$ be a modular Riesz basis. Then*
(i) $\{x_i : i \in I\}$ is a frame with synthesis operator U and with a unique dual frame $\{(U^*)^{-1}(e_i) : i \in I\}$, which is a modular Riesz basis.
(ii) If $\sum_{i\in I} a_i x_i = 0$, for some $\{a_i : i \in I\} \subseteq A$, then $a_i = 0$ for each $i \in I$.
(iii) If $\sum_{i\in I} a_i x_i$ converges for some $\{a_i : i \in I\} \subseteq A$, then $\{a_i : i \in I\} \in \ell^2_I(A)$.
(iv) There exist $0 < A \leq B < \infty$ such that for every $\{a_i : i \in I\} \in \ell^2_I(A)$,

$$A \left\| \sum_{i\in I} |a_i|^2 \right\| \leq \left\| \sum_{i\in I} a_i x_i \right\|^2 \leq B \left\| \sum_{i\in I} |a_i|^2 \right\|.$$

***Theorem* 0.8.** *Let $\{x_i : i \in I\}$ be a frame for H with analysis operator $T : H \to \ell^2_I(A)$. Then the following are equivalent:*
(i) $\{x_i : i \in I\}$ is a modular Riesz basis.
(ii) $T^* : \ell^2_I(A) \to H$ is one to one.
(iii) $\{x_i : i \in I\}$ has a unique dual frame.
(iv) There exist positive constants A, B such that for every $\{a_i : i \in I\}$ in $\ell^2_I(A)$,

$$A \left\| \sum_{i\in I} |a_i|^2 \right\| \leq \left\| \sum_{i\in I} a_i x_i \right\|^2 \leq B \left\| \sum_{i\in I} |a_i|^2 \right\|.$$

***Proposition* 0.9.** *Every modular Riesz basis has the subframe property.*

***Proposition* 0.10.** *Let $\{x_i^j : i \in I\}$ for $j = 1, 2, ..., m$ be a woven frame for H and $Q \in B(H)$ be surjective. Then $\{Qx_i^j : i \in I\}$ for $j = 1, 2, ..., m$ is a woven frame.*

***Theorem* 0.11.** *Let $\{x_i^j : i \in I\}$ for $j = 1, 2, ..., m$ be a woven frame with bounds C, D. Suppose that $J \subseteq I$ for which there exist a constant $0 < E < C$ and a partition $P = \{\sigma'_1, \sigma'_2, ..., \sigma'_m\}$ of J such that for every $x \in H$*

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in \sigma'_j} \mid \langle x, x_i^j \rangle \mid^2 \leq E \mid x \mid^2 .$$

Then $\{x_i^j : i \in I \setminus J\}$ for $j = 1, 2, ..., m$ is a woven frame for H.

***Theorem* 0.12.** *Let $\{x_i^j : i \in I\}$ be a frame with bounds C_j, D_j for each $j = 1, 2, ..., m$ such that there exist a constant $0 < E < \sum_{j=1}^{m} C_j$ and a partition $P = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ of I such that*

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in \sigma_j^c} \mid \langle x, x_i^j \rangle \mid^2 \leq E \mid x \mid^2 \qquad (x \in H).$$

Then $\{x_i^j : i \in I\}$ for $j = 1, 2, ..., m$ is a P-woven frame.

***Theorem* 0.13.** *Let $\{x_i^j : i \in I\}$ be a frame for H with frame operator S_j for each $j = 1, 2, ..., m$. Assume that there exist a constant $0 < E < m$ and a partition $P = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ of I such that*

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in \sigma_j^c} \mid \langle x, S_j^{-\frac{1}{2}} x_i^j \rangle \mid^2 \leq E \mid x \mid^2,$$

for every $x \in H$. Then the family $\{S_j^{-\frac{1}{2}} x_i^j : i \in I\}$, $j = 1, 2, ..., m$ is a P-woven frame for H.

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۳۵-۲۲

قاب‌های درهم‌تنیده و پایه‌های ریس مدولار در C^*- مدول‌های هیلبرت

محمدرضا فرمانی [1] ✉، امیر خسروی [2]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. رایانامه: mr.farmanis@gmail.com
۲. گروه ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. رایانامه: khosravi@khu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۲/۱۳
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۴/۲۸
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۴/۳۱
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
قاب،
قاب درهم‌تنیده،
$P-$ قاب درهم‌تنیده،
C^*- مدول هیلبرت

رده‌بندی ریاضی:
42C15

چکیده

در این مقاله، قاب‌ها، پایهٔ ریس و پایهٔ ریس مدولار در C^*- مدول‌های هیلبرت را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. نشان خواهیم داد که برخی از خواص پایه‌های ریس از یک فضای هیلبرت به پایه‌های ریس مدولار قابل انتقال هستند. سپس قاب‌های درهم‌تنیده، قاب‌های $P-$ درهم‌تنیده و قاب‌های CP- درهم‌تنیده در C^*- مدول‌های هیلبرت مورد مطالعه و بحث قرار خواهند گرفت. علاوه‌بر این، برخی از نتایج به‌دست‌آمده در فضاهای هیلبرت را به C^*- مدول‌های هیلبرت، تعمیم خواهیم داد و نتایجی دررابطه‌با آشفتگی و افزونگی قاب‌های درهم‌تنیده ارائه خواهیم کرد.

استناد: فرمانی، محمدرضا، خسروی، امیر. (۱۴۰۲). قاب‌های درهم‌تنیده و پایه‌های ریس مدولار در C^*- مدول‌های هیلبرت. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۳۵-۲۲.
http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9392.1000

ناشر: دانشگاه قم.

۱ تاریخچه و تعاریف

قاب‌ها در فضاهای هیلبرت برای اولین بار توسط دافین و شفر در حل برخی از مسائل آنالیز هارمونیک غیرهمساز معرفی و مورد استفاده قرار گرفتند [۸]، [۷]. قاب‌ها، در حقیقت توسیع‌یافتهٔ پایه‌های فضاهای برداری هستند که می‌توان آن‌ها را به پایه‌های ریس تعمیم داد. مراجع [۳]، [۴]، [۵]، [۶]، [۲]، [۱۲]، [۱۳]، [۱۷] را ملاحظه نمایید. از خاصیت قاب‌ها در حل برخی از مسائل کاربردی مانند پردازش سیگنال و تصویر، فشرده‌سازی داده‌ها و نظریهٔ نمونه‌گیری که دارای اهمیت بسیاری است، استفاده می‌شود.

در سال‌های اخیر، بسیاری از ریاضی‌دانان از جمله کاپلانسکی [1]، فرانک [2] و لارسون [3] [۱۱]، [۹]، [۱۰]، [۱۵] ، با تعمیم نظریهٔ قاب‌ها از فضاهای هیلبرت به C^*- مدول‌های هیلبرت به نتایج قابل توجهی دست یافته‌اند. یک C^*- مدول هیلبرت در واقع تعمیم یک فضای هیلبرت با یک ضرب داخلی است که برد آن به‌جای اینکه مقادیری از میدان اعداد حقیقی یا مختلط باشد، مقادیری از یک C^*- جبر است.
نویسندهٔ دوم مقاله و ب. خسروی در [۱۲] پایه‌های ریس مدولار در C^*- مدول‌های هیلبرت را معرفی نموده‌اند. قاب‌ها در فضاهای هیلبرت به‌طور طبیعی حالت ابتدایی یا اولیهٔ قاب‌ها در C^*- مدول‌های هیلبرت هستند. اخیراً، بمروسو، کاسازا، گراچین، لامرس و دیگران در [۳]، (مراجع [۵]، [۱۴]، [۱۸] را هم ملاحظه کنید) مفهوم جدیدی به نام قاب‌های درهم‌تنیده را مطرح و مورد بررسی قرار داده‌اند که موجب پردازش سیگنال‌های فرستاده‌شده می‌شود. برای مثال، پیام‌های ارسالی که به‌صورت چندین قاب هستند، در شبکهٔ حسگر بی‌سیم دریافت می‌شوند و مورد پردازش قرار می‌گیرند و از هم تفکیک می‌شوند و در نتیجه پیام اصلی تشخیص داده می‌شود.
$\{\{f_i\}_{i\in I},\{g_i\}_{i\in I}\}$ را یک قاب درهم‌تنیده گویند، هرگاه ثابت‌های جهانی A و B موجود باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ σ از I، خانوادهٔ $\{f_i\}_{i\in\sigma}\cup\{g_i\}_{i\in\sigma^c}$ یک قاب در H با کران‌های پایینی و بالایی به ترتیب A و B باشد. خانوادهٔ $\{f_i\}_{i\in\sigma}\cup\{g_i\}_{i\in\sigma^c}$ را تنیدگی گویند. جزئیات بیشتر در [۵] قابل مشاهده است. $\{\{f_i\}_{i\in I},\{g_i\}_{i\in I}\}$ را قاب افراز-درهم‌تنیده یا $P-$ درهم‌تنیده گویند، هرگاه زیرمجموعهٔ محض σ از I، موجود باشد به‌طوری‌که خانوادهٔ $\{f_i\}_{i\in\sigma}\cup\{g_i\}_{i\in\sigma^c}$ یک قاب در H باشد ([۵] را ملاحظه نمایید).
در این مقاله، ابتدا برخی از تعاریف و خواص پایه‌ای از C^*- مدول‌های هیلبرت، قاب‌های درهم‌تنیده و قاب‌های $P-$ درهم‌تنیده در C^*- مدول‌های هیلبرت را بیان خواهیم نمود. همچنین، قاب‌های درهم‌تنیده، قاب‌های $P-$ درهم‌تنیده و قاب‌های $CP-$ درهم‌تنیده روی تعداد متناهی از قاب‌ها را مورد بحث‌وبررسی قرار خواهیم داد و برخی از خواصی که در فضای هیلبرت برقرار است و به C^*- مدول‌های هیلبرت منتقل می‌شوند، را مطرح خواهیم کرد. علاوه‌بر این، پایه‌های ریس و پایه‌های ریس مدولار را در C^*- مدول‌های هیلبرت مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

در کل مقاله، I یک زیرمجموعهٔ متناهی یا نامتناهی از $\mathbb{N}$، A یک C^*- جبر یکدار و H، K_i، A- مدول‌های به‌طور متناهی یا شمارا تولیدشده هستند. به‌ازای هر $i\in I$ ، $B(H,K_i)$ نماد مجموعهٔ همهٔ عملگرهای الحاقی‌پذیر از H به K_i است. فرض کنید $\ell^2_I(A)$، A- مدول هیلبرت تعریف‌شده به‌صورت زیر باشد:

$$\ell^{2}_{I}(A)=\left\{\{a_i\}_{i\in I}\subseteq A \mid \ \text{با نرم همگرا باشد} \sum_{i\in I} a_i a_i^*\right\}.$$

تعریف ۱.۱. یک پیش A- مدول هیلبرت H عبارت است از یک A- مدول چپ H با ضرب داخلی A-مقداری $\langle .,.\rangle : H\times H\longrightarrow A$، به‌طوری‌که در شرایط زیر صدق نماید:
آ) به‌ازای هر $x\in H$، $\langle x,x\rangle\geq 0$ و $\langle x,x\rangle=0$ اگر و تنها اگر $x=0$.
ب) به‌ازای هر $x,y\in H$، $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle^*$.
ج) برای هر $a\in A$ و $x,y,z\in H$، $\langle ax+y,z\rangle=a\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$.

فرض می‌کنیم اعمال خطی روی A و H شرکت‌پذیر هستند. یعنی به‌ازای هر $\lambda\in\mathbb{C}$، $a\in A$ و $x\in H$ ، $\lambda(ax)=(\lambda a)x$.
به‌ازای هر $x\in H$، تعریف می‌کنیم:

$$\|x\|=\|\langle x,x\rangle\|^{\frac{1}{2}},\quad |x|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

اگر پیش A- مدول هیلبرت H، $(H,\langle .,.\rangle)$ تحت نرم $\|.\|$ کامل باشد، آن را یک C^*- مدول هیلبرت نامند. در این مقاله بر C^*- مدول‌های هیلبرت به‌طور متناهی و شمارش‌پذیر تولیدشده روی C^*- جبر یکدار A متمرکز هستیم.
A- مدول هیلبرت H را به‌طور متناهی تولیدشده گوییم، هرگاه زیرمجموعهٔ متناهی $\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$ از H وجود داشته باشد، به‌طوری‌که

[1] Kaplansky
[2] Frank
[3] Larson

به‌ازای هر $x\in H$ بتوان آن را به‌وسیلهٔ پیمایهٔ $A-$ خطی با ضرایبی از جبر A بیان نمود. یعنی $a_i\in A\quad ,x=\sum_{i=1}^{m}a_ix_i$. برای دیدن جزئیات بیشتر [۱۵] را ملاحظه کنید.

اکنون تعاریف قاب و پایهٔ ریس در C^*- مدول‌های هیلبرت را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۲.۱. فرض کنیم A یک C^*-جبر و I مجموعهٔ اندیس‌گذار متناهی یا شمارا باشد. دنبالهٔ $\{x_i:i\in I\}$ از عناصر C^*- مدول هیلبرت H را قاب گویند، هرگاه ثابت‌های $0<C\le D<\infty$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر $x\in H$،

$$C\langle x,x\rangle\le\sum_{i\in I}\langle x,x_i\rangle\langle x_i,x\rangle\le D\langle x,x\rangle. \tag{۱.۱}$$

ثابت‌های مطلوب (یعنی، اینفیمم D و سوپریمم C) را کران‌های قاب گویند. اگر $C=D$، آنگاه قاب $\{x_i:i\in I\}$ را تنگ [1] نامند و درصورتی‌که $C=D=1$ قاب را پارسوال گویند. دنبالهٔ $\{x_i:i\in I\}$ را بسل گویند، هرگاه فقط نامساوی سمت راست بالا برقرار باشد. اگر سری ۱.۱ به‌ازای هر $x\in H$ در نرم همگرا باشد، آنگاه قاب را استاندارد گویند.

آرام بیسیک [۱] ثابت کرد که $\{x_i:i\in I\}\subseteq H$ یک قاب استاندارد است اگر و تنها اگر ثابت‌های $0<C\le D<\infty$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$C\|x\|^2\le\left\|\sum_{i\in I}|\langle x,x_i\rangle|^2\right\|\le D\|x\|^2,\qquad (x\in H). \tag{۲.۱}$$

توجه داشته باشید که می‌توانیم عملگر تحلیل، عملگر ترکیب و عملگر قاب را تعریف کنیم.

به‌ازای هر دنبالهٔ بسل $\{x_i:i\in I\}\subseteq H$، عملگر تحلیل $T:H\to\ell^2_I(A)$ به‌صورت $Tx=\{\langle x,x_i\rangle\}_{i\in I}$، تعریف می‌شود که عملگر الحاقی آن به‌صورت، $T^*:\ell^2(A)\to H$، $T^*\{a_i\}_{i\in I}=\sum_{i\in I}a_ix_i$ است، درصورتی‌که این دو عملگر را ترکیب کنیم، عملگر قاب $S:H\to H$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$Sx=T^*Tx=\sum_{i\in I}\langle x,x_i\rangle x_i\qquad (x\in H). \tag{۳.۱}$$

قاب $\{S^{-1}x_i:i\in I\}$ را دوگان کانونی قاب $\{x_i:i\in I\}$ گویند.

همچنین از معادله ۳.۱ به‌ازای هر $x\in H$ خواهیم داشت:

$$x=SS^{-1}x=\sum_{i\in I}\langle S^{-1}x,x_i\rangle x_i=\sum_{i\in I}\langle x,S^{-1}x_i\rangle x_i. \tag{۴.۱}$$

۲ پایه‌های ریس

در این بخش پایه‌های ریس و پایه‌های ریس مدولار مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

تعریف ۱.۲. آ) قاب $\{x_i:i\in I\}$ از H را پایهٔ ریس گویند، هرگاه به‌ازای هر $i\in I$, $x_i\ne 0$ و درصورتی‌که $\sum_{i\in S}a_ix_i=0$ که در آن $\{a_i:i\in S\}\subseteq A$ و $S\subseteq I$، بتوان نتیجه گرفت که $i\in S$، $a_ix_i=0$.

ب) دنبالهٔ $\{x_i:i\in I\}\subseteq H$ را یک پایهٔ ریس مدولار گویند هرگاه عملگر وارون‌پذیر $U\in B(\ell^2_I(A),H)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $\{a_i:i\in I\}\in\ell^2_I(A)$، $U(\sum_{i\in S}a_ie_i)=\sum_{i\in S}a_ix_i$، که در آن $\{e_i:i\in I\}$ پایهٔ متعامد استاندارد $\ell^2_I(A)$ است، یعنی $e_j=(\delta_{ij}1_A)_{i\in I}$.

قضیه ۲.۲. فرض کنید $\{x_i=Ue_i:i\in I\}$ یک پایهٔ ریس مدولار باشد. در این صورت،

آ) $\{x_i:i\in I\}\subseteq H$ یک قاب با عملگر ترکیب U و دوگان کانونی قاب $\{(U^*)^{-1}e_i:i\in I\}$ است که یک پایهٔ ریس مدولار است.

ب) اگر $\{a_i:i\in S\}\subseteq A$ موجود باشد به‌طوری‌که $\sum_{i\in S}a_ix_i=0$، آنگاه به‌ازای هر $i\in S$، $a_i=0$.

ج) اگر $\{a_i:i\in I\}\subseteq A$ موجود باشد به‌طوری‌که $\sum_{i\in I}a_ix_i$ همگرا باشد، آنگاه $\{a_i:i\in I\}\in\ell^2_I(A)$.

د) ثابت‌های $0<A\le B<\infty$ موجود هستند به‌طوری‌که به‌ازای هر $\{a_i:i\in S\}\in\ell^2_I(A)$،

$$A\left\|\sum_{i\in I}|a_i|^2\right\|\le\left\|\sum_{i\in I}a_ix_i\right\|^2\le B\|U\|^2\|x\|^2.$$

[1] tight

اثبات. آ) فرض کنید $x \in H$. آنگاه

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i\in I}|\langle x, Ue_i\rangle|^۲\right\| &= \left\|\sum_{i\in I}|\langle U^*(x), e_i\rangle|^۲\right\|\\ &= \|U^*x\|^۲\\ &\leq \|U\|^۲\|x\|^۲.\end{aligned}$$

همچنین

$$\left\|\sum_{i\in I}|\langle x, Ue_i\rangle|^۲\right\| = \|U^*x\|^۲ \geq \frac{۱}{\|U^{-۱}\|^۲}\|x\|^۲.$$

بنابراین $\{x_i : i \in I\}$ یک قاب با کران‌های $\|U\|^۲, \|U^{-۱}\|^{-۲}$ است و U عمگر ترکیب است. از سوی دیگر، $U^{-۱}x \in \ell^۲_I(A)$ و در نتیجه $U^{-۱}x = \sum_{i\in I}\langle U^{-۱}x, e_i\rangle e_i$. پس

$$U^{-۱}x = \sum_{i\in I}\langle x, (U^{-۱})^*e_i\rangle e_i, \qquad x = \sum_{i\in I}\langle x, (U^*)^{-۱}e_i\rangle x_i,$$

نشان می‌دهد که $\{(U^*)^{-۱}e_i : i \in I\}$ یک دوگان قاب برای $\{x_i : i \in I\}$ است که یک پایهٔ ریس مدولار است.

ب) اگر $\{a_i : i \in S\} \in \ell^۲_I(A)$ موجود باشد که $\sum_{i\in S} a_ix_i = ۰$، آنگاه $U(\sum_{i\in S} a_ie_i) = ۰$ و چون U عملگر یک‌به‌یک است $\sum_{i\in S} a_ie_i = ۰$ از سوی دیگر $\{e_i : i \in I\}$ پایهٔ متعامد است، پس به‌ازای هر $i \in S$، $a_i = ۰$، در نتیجه دوگان قاب منحصربه‌فرد است.

ج) فرض کنید $\{a_i : i \in I\} \subseteq A$ و $\sum_{i\in I} a_ix_i$ همگرا باشد. آنگاه به‌ازای هر زیرمجموعهٔ متناهی $J \subseteq I$، داریم

$$\begin{aligned}\frac{۱}{\|U^{-۱}\|^۲}\left\|\sum_{i\in J} a_ie_i\right\|^۲ &\leq \left\|\sum_{i\in J} a_ix_i\right\|^۲\\ &= \left\|U(\sum_{i\in J} a_ie_i)\right\|^۲\\ &\leq \|U\|^۲\left\|\sum_{i\in J} a_ie_i\right\|^۲.\end{aligned}$$

در نتیجه $\sum_{i\in I} a_ix_i$ همگرا است اگر و تنها اگر $\sum_{i\in I} a_ie_i$ همگرا باشد، بنابراین حکم ثابت می‌شود.

قسمت (د) از (ج) نتیجه می‌شود. □

می‌دانیم که در فضاهای هیلبرت، هر پایهٔ ریس دارای یک دوگان منحصربه‌فرد است که خود نیز یک پایهٔ ریس است، ولی در C^*- مدول‌های هیلبرت به دلیل مقسم صفر بودن، یک پایهٔ ریس لزوماً دارای دوگان پایهٔ ریس منحصربه‌فردی نیست. علاوه‌بر این در فضاهای هیلبرت، اگر $\{x_i : i \in I\}$ یک پایهٔ ریس و به‌ازای هر دنبالهٔ $\{c_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{C}$، سری $\sum_{i\in I} c_ix_i$ همگرا باشد، آنگاه $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^۲(I)$. ولی در C^*- مدول‌های هیلبرت مثال‌هایی در [۱۰] موجود هستند که نشان می‌دهند این گزاره برقرار نیست.

مثال ۳.۲. فرض کنید $A = M_{۲\times۲}(\mathbb{C})$، C^*- جبر همهٔ ماتریس‌های ۲ × ۲ باشد. آنگاه $H := A$ ، A- مدول با ضرب داخلی $\langle A, B\rangle = AB^*$ است. بنابر مثال [۱۰، مثال ۴.۳]، ماتریس $E_{i,j}$ که در آن، (i, j)-درایهٔ ماتریس ۱ و سایر درایه‌ها ۰ باشند، را در نظر می‌گیریم. در این صورت، $x = \{E_{۱,۱}, E_{۲,۲}\}$ یک پایهٔ ریس با دوگان قاب $\{E_{۱,۱} + E_{۲,۱}, E_{۲,۲}\}$ است. به‌وضوح، دوگان x، پایهٔ ریس مدولار نیست.

مثال ۴.۲. فرض کنید $A = l^\infty$ مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های کران‌دار مختلط مقدار باشد. به‌ازای هر $x = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ و $y = \{y_i : i \in \mathbb{N}\}$ تعریف می‌کنیم $xy = \{x_iy_i : i \in \mathbb{N}\}$، $x^* = \{\bar{x}_i : i \in \mathbb{N}\}$ و $\|x\| = \sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i|$. در نتیجه، A یک C^*- جبر است. فرض کنید $H = c_۰$ مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های همگرا به صفر باشد. آنگاه H ، A- مدول با ضرب داخلی

است. در [۱۰]، مثال ۲.۳ و ۶.۳]، مشاهده می‌شود که اگر به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$ قرار دهیم $e_i = \{\delta_{i,j}\mathbf{1} : j \in \mathbb{N}\}$ و $\langle u, v\rangle = uv^*$ قرار دهیم $\{x_i = e_i : i \in \mathbb{N}\}$ و $\{y_i : i \in \mathbb{N}\}$، $y_1 = y_2 = e_1 + e_2$ و به‌ازای $i \geq 3$، $y_i = e_i$، آنگاه $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ یک پایهٔ ریس است و $\{y_i : i \in \mathbb{N}\}$ دوگان قاب $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ است. درحالی‌که $\{y_i : i \in \mathbb{N}\}$ پایهٔ ریس نیست؛ بنابراین $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ پایهٔ ریس مدولار نیست.

دنبالهٔ $\{x_i : i \in I\}$ در C^*-مدول هیلبرت H را دنبالهٔ قاب گویند، هرگاه یک قاب برای بستار A- خطی خود باشد. اگر هر زیردنباله از $\{x_i : i \in I\}$ یک دنبالهٔ قاب باشد، آنگاه قاب را دارای خاصیت زیرقاب گویند. درصورتی‌که $\{x_i : i \in I\}$ یک قاب H با خاصیت زیرقاب باشد، علاوه‌بر این، کران‌های یکنواخت بالایی و پایینی برای همهٔ زیردنباله‌ها از قاب وجود داشته باشند، آنگاه $\{x_i : i \in I\}$ را یک قاب ریس گویند.

قضیه ۵.۲. فرض کنید $\{x_i : i \in I\}$ یک قاب H با عملگر تحلیل $T : H \to \ell^2_I(A)$ باشد. در این صورت، احکام زیر معادل هستند:

آ) $\{x_i : i \in I\}$ یک پایهٔ ریس مدولار است.

ب) $T^* : \ell^2_I(A) \to H$ یک‌به‌یک است.

ج) $\{x_i : i \in I\}$ دارای یک دوگان قاب منحصربه‌فرد است.

د) ثابت‌های مثبت A, B موجود هستند به‌طوری‌که به‌ازای هر $\{a_i : i \in I\}$ در $\ell^2_I(A)$ رابطهٔ

$$A\left\|\sum_{i\in I}|a_i|^2\right\| \leq \left\|\sum_{i\in I}a_ix_i\right\|^2 \leq B\left\|\sum_{i\in I}|a_i|^2\right\|$$

برقرار است.

اثبات. (آ) $\Leftarrow$ (ب). بنابر قضیه ۲.۲ حکم برقرار است.

(ب) $\Leftrightarrow$ (ج). بنابر قضیه ۱۰.۳ در [۱۰] حکم ثابت می‌شود، زیرا T^* یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر

$$\sum_{i\in I}a_ix_i = T^*(\sum_{i\in I}a_ie_i) = 0$$

ایجاب کند که به‌ازای هر $i \in I$، $a_i = 0$.

(ب) $\Leftarrow$ (د). چون $\{x_i : i \in I\}$ یک قاب است، T^* پوشاست، بنابراین T^* یک عملگر وارون‌پذیر است و چون به‌ازای هر $i \in I$، $T^*(e_i) = x_i$، $\{x_i : i \in I\}$ یک پایهٔ ریس مدولار است و بنابر قسمت (د) قضیه ۲.۲، حکم به دست می‌آید.

(د) $\Leftarrow$ (آ). به‌وضوح (ب) برقرار است پس T^* یک‌به‌یک و از پایین کران‌دار است. بنابراین $\{x_i : i \in I\}$ یک پایهٔ ریس مدولار است و اثبات کامل می‌شود. □

قضیه ۶.۲. هر پایهٔ ریس مدولار دارای خاصیت زیرقاب است.

اثبات. فرض کنیم $\{x_i : i \in I\}$ یک پایهٔ ریس مدولار H باشد. بنابراین عملگر وارون‌پذیر $U : \ell^2_I(A) \to H$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $i \in I$، $U(e_i) = x_i$ که در آن $\{e_i : i \in I\}$ پایهٔ متعامد $\ell^2_I(A)$ است. در نتیجه، برای هر $J \subseteq I$، $U' : \ell^2_J(A) \to H_J$ عملگری وارون‌پذیر است و به‌ازای هر $i \in J$، $U'(f_i) = U(e_i) = x_i$ که در آن H_J بستار A-خطی از $\{x_i : i \in J\}$ است و به‌ازای هر $i \in J$، $f_i = (\delta_{ik}\mathbf{1}_A)_{k\in J}$، $\{f_i : i \in J\}$ پایهٔ متعامد $\ell^2_J(A)$ است. بنابراین $\{x_i : i \in J\}$ یک پایهٔ ریس مدولار است. در نتیجه $\{x_i : i \in I\}$ دارای خاصیت زیرقاب است. □

۳ قاب درهم‌تنیده

ابتدا به‌طور مختصر، تعاریف و ویژگی‌های اساسی یک قاب درهم‌تنیده را یادآوری می‌کنیم. برای جزئیات بیشتر و مفاهیم اصلی نظریهٔ قاب درهم‌تنیده، [۳]، [۴]، [۵]، [۱۴] را ملاحظه کنید.

تعریف ۱.۳. خانوادهٔ $\{x_i^j : i \in I\}$، $j = 1, 2, \dots, m$ در H را قاب درهم‌تنیده گویند، هرگاه ثابت‌های A, B موجود باشند که به‌ازای هر افراز $P = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$ از I دنبالهٔ $\{x_i^j : i \in \sigma_j, j = 1, 2, \dots, m\}$ یک قاب در H با کران‌های A و B باشد. هر خانوادهٔ $\{x_i^j : i \in \sigma_j, j = 1, 2, \dots, m\}$ را یک تنیدگی گوییم.

تعریف ۲.۳. $\{x_i^j : i \in I\}$ ، $j = 1, 2, ..., m$ در H ، $P-$ درهم‌تنیده است، اگر افرازی مانند $P = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ از I وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $\{x_i^j : i \in \sigma_j, j = 1, 2, ..., m\}$ یک قاب در H باشد.

تعریف ۳.۳. $\{x_i^j : i \in I\}$، $j = 1, 2, ..., m$ در H، $CP-$ درهم‌تنیده است، هرگاه افرازی از I مانند $P = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ از I وجود داشته باشد، به‌طوری‌که برای هر جایگشت $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ از $\{1, 2, ..., m\}$، $\{x_i^j : i \in \sigma_{\lambda_j}, j = 1, 2, ..., m\}$ یک قاب در H باشد.

قضیه ۴.۳. فرض کنیم $\{x_i : i \in I\}$ قابی در H و $Q \in B(H)$ پوشا باشد. در این صورت، $\{Qx_i : i \in I\}$ یک قاب در H است.

اثبات. چون $Q \in B(H)$ پوشاست، پس Q^* یک‌به‌یک و با برد بسته است؛ بنابراین $m > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in H$، $\|Q^*x\| \geq m\|x\|$. اکنون، اگر $\{x_i : i \in I\}$ یک قاب با کران‌های A, B باشد، آنگاه برای هر $x \in H$ داریم

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{i\in I} |\langle x, Qx_i\rangle|^2\right\| &= \left\|\sum_{i\in I} |\langle Q^*x, x_i\rangle|^2\right\| \\ &\leq B\|Q^*x\|^2 \\ &\leq B\|Q^*\|^2\|x\|^2. \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{i\in I} |\langle x, Qx_i\rangle|^2\right\| &= \left\|\sum_{i\in I} |\langle Q^*x, x_i\rangle|^2\right\| \\ &\geq A\|Q^*x\|^2 \\ &\geq Am^2\|x\|^2, \end{aligned}$$

و نتیجه به دست می‌آید. □

قضیه ۵.۳. فرض کنیم $\{x_i^j : i \in I\}$، $j = 1, 2, ..., m$ یک قاب درهم‌تنیده و $Q \in B(H)$ پوشا باشد. در این صورت، $\{Qx_i^j : i \in I\}$ ، $j = 1, 2, ..., m$ یک قاب درهم‌تنیده است.

اثبات. چون $\{x_i^j : i \in I\}$، $j = 1, 2, ..., m$ یک قاب درهم‌تنیده است، ثابت‌های $A, B > 0$ وجود دارند به‌طوری‌که برای هر افراز $P = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ از I، دنبالهٔ $\{x_i^j : i \in \sigma_j, j = 1, 2, ..., m\}$ یک قاب در H با کران‌های A و B باشد.
از سوی دیگر $Q \in B(H)$ پوشاست، بنابر اثبات قضیه ۴.۳، ثابت $m > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $x \in H$، $\|Q^*x\| \geq m\|x\|$.
اکنون بنابر قضیه ۴.۳، به‌ازای هر افراز $P = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ از I، دنبالهٔ $\{Qx_i^j : i \in \sigma_j, j = 1, 2, ..., m\}$ یک قاب برای H با کران‌های $Am^2, B\|Q^*\|^2$ است و حکم ثابت می‌شود. □

نتیجه ۶.۳. فرض کنیم $\{x_i^j : i \in I\}$، $j = 1, 2, ..., m$ یک قاب $P-$ درهم‌تنیده ($CP-$درهم‌تنیده) و $Q \in B(H)$ پوشا باشد. در این صورت $\{Qx_i^j : i \in I\}$ ، $j = 1, 2, ..., m$ یک قاب $P-$ درهم‌تنیده ($CP-$درهم‌تنیده) است.

ملاحظه ۷.۳. فرض کنیم $\{a_i : i \in I\}$، $\{b_i : i \in I\}$ زیرمجموعه‌های C^*- جبر A باشند و $\sigma \subset I$. اگر

$$\sum_{i\in\sigma} [(a_i^* - b_i^*)b_i + b_i^*(a_i - b_i)] \geq 0, \tag{۱.۳}$$

آنگاه

$$\left\|\sum_{i\in\sigma} | a_i - b_i |^2\right\| + \left\|\sum_{i\in\sigma} | b_i |^2\right\| \geq \left\|\sum_{i\in\sigma} | a_i |^2\right\|.$$

زیرا بنابر قضیه ۵.۲.۲ در [۱۶] خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in\sigma}[(b_i^*-a_i^*)b_i+b_i^*(b_i-a_i)]\geq 0\\
&\Leftrightarrow\ 2\sum_{i\in\sigma}b_i^*b_i-\sum_{i\in\sigma}(a_i^*b_i+b_i^*a_i)\geq 0\\
&\Leftrightarrow\ 2\sum_{i\in\sigma}b_i^*b_i-\sum_{i\in\sigma}(a_i^*b_i+b_i^*a_i)+\sum_{i\in\sigma}a_i^*a_i\geq\sum_{i\in\sigma}a_i^*a_i\\
&\Leftrightarrow\ \sum_{i\in\sigma}|a_i-b_i|^2+\sum_{i\in\sigma}|b_i|^2\geq\sum_{i\in\sigma}|a_i|^2\\
&\Rightarrow\ \left\|\sum_{i\in\sigma}|a_i-b_i|^2\right\|+\left\|\sum_{i\in\sigma}|b_i|^2\right\|\geq\left\|\sum_{i\in\sigma}|a_i|^2\right\|.
\end{aligned}$$

قضیه ۸.۳. فرض کنیم $\{\{x_i : i\in I\},\{y_i : i\in I\}\}$ یک قاب درهم‌تنیده با کران‌های C و D در C^*- مدول هیلبرت H باشد. فرض کنیم $Q_1,Q_2\in B(H)$ و Q_1 وارون‌پذیر باشد. اگر به‌ازای هر $x\in H$ دو مجموعهٔ $\{\langle Q_1^*x,y_i\rangle : i\in I\}$، و $\{\langle(Q_1^*-Q_2^*)x,y_i\rangle : i\in I\}$ در شرط (۱.۳) صدق نمایند و $\| Q_1^{-1}\|\| Q_1-Q_2\|<\sqrt{\frac{C}{D}}$، آنگاه $\{\{Q_1x_i : i\in I\},\{Q_2y_i : i\in I\}\}$ یک قاب درهم‌تنیده است.

اثبات. چون $\|I-Q_1^{-1}Q_2\|<\sqrt{\frac{C}{D}}<1$، در نتیجه Q_2 وارون‌پذیر است. بنابراین $\{Q_2y_i : i\in I\}$ قاب است. اکنون به‌ازای هر $\sigma\subseteq I$ و به‌ازای هر $x\in H$ قرار می‌دهیم

$$M:=\left\|\sum_{i\in\sigma}|\langle x,Q_1x_i\rangle|^2+\sum_{i\in\sigma^c}|\langle x,Q_2y_i\rangle|^2\right\|.$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}
M&=\left\|\sum_{i\in\sigma}|\langle Q_1^*x,x_i\rangle|^2+\sum_{i\in\sigma^c}|\langle Q_2^*x,y_i\rangle|^2\right\|\\
&=\left\|\sum_{i\in\sigma}|\langle Q_1^*x,x_i\rangle|^2+\sum_{i\in\sigma^c}|\langle Q_1^*x+(Q_2^*-Q_1^*)x,y_i\rangle|^2\right\|.
\end{aligned}$$

بنابر فرض و شرط (۱.۳) داریم

$$M\geq\left\|\sum_{i\in\sigma}|\langle Q_1^*x,x_i\rangle|^2+\sum_{i\in\sigma^c}|\langle Q_1^*x,y_i\rangle|^2\right\|-\left\|\sum_{i\in\sigma^c}|\langle(Q_2^*-Q_1^*)x,y_i\rangle|^2\right\|,$$

چون $\{y_i : i\in I\}$ دنبالهٔ بسل با کران D است، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
M&\geq C\|Q_1^*x\|^2-D\|Q_2^*-Q_1^*\|^2\|x\|^2\\
&\geq\left(\frac{C}{\|Q_1^{*^{-1}}\|^2}-D\|Q_2^*-Q_1^*\|^2\right)\|x\|^2,
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
M&=\left\|\sum_{i\in\sigma}|\langle x,Q_1x_i\rangle|^2+\sum_{i\in\sigma^c}|\langle x,Q_2y_i\rangle|^2\right\|\\
&\leq D\left(\|Q_1^*\|^2+\|Q_2^*\|^2\right)\|x\|^2.
\end{aligned}$$

□

نتیجه ۹.۳. فرض کنیم $\{\{x_i : i \in I\}, \{y_i : i \in I\}\}$ یک قاب درهم‌تنیده در C^*- مدول هیلبرت H با کران‌های D, C باشد و عملگرهای قاب $\{x_i : i \in I\}$ و $\{y_i : i \in I\}$ به‌ترتیب S, S' باشند. در این صورت، $\{\{S^{-1}x_i : i \in I\}, \{S'^{-1}y_i : i \in I\}\}$ درهم‌تنیده است، وقتی که

$$\| S - S' \| < \sqrt{\frac{C}{D}} \| S^{-1} \|^{-1},$$

و به‌ازای هر $x \in H$، دو مجموعهٔ $\{\langle Sx, y_i\rangle : i \in I\}$ و $\{\langle (S - S')x, y_i\rangle : i \in I\}$ در شرط (۱.۳) صدق کنند.

قضیه ۱۰.۳. فرض کنیم $\{x_i^j : i \in I\}$، $j = 1, 2, ..., m$ یک قاب درهم‌تنیده با کران‌های C, D باشد. فرض کنیم که $J \subseteq I$، ثابت $0 < E < C$ و افراز $P = \{\sigma_1', \sigma_2', ..., \sigma_m'\}$ از J موجود باشند، به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in H$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i\in\sigma_j'} | \langle x, x_i^j\rangle |^2 \leq E | x |^2 .$$

در این صورت، $\{x_i^j : i \in I \setminus J\}$ ، $j = 1, 2, ..., m$ یک قاب درهم‌تنیده است.

اثبات. فرض کنیم $P = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ افرازی از $I \setminus J$ باشد. در این صورت، $P'' = \{\sigma_1'', \sigma_2'', ..., \sigma_m''\}$ افرازی از I است، که در آن به‌ازای هر $j = 1, 2, ..., m$ قرار می‌دهیم $\sigma_j'' = \sigma_j \cup \sigma_j'$. به‌ازای هر $x \in H$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i\in\sigma_j} | \langle x, x_i^j\rangle |^2 \leq D | x |^2,$$

و

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=1}^{m} \sum_{i\in\sigma_j} | \langle x, x_i^j\rangle |^2\right\| &= \left\|\sum_{j=1}^{m} \sum_{i\in\sigma_j''} | \langle x, x_i^j\rangle |^2 - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i\in\sigma_j'} | \langle x, x_i^j\rangle |^2\right\| \\
&\geq \left\|\sum_{j=1}^{m} \sum_{i\in\sigma_j''} | \langle x, x_i^j\rangle |^2\right\| - \left\|\sum_{j=1}^{m} \sum_{i\in\sigma_j'} | \langle x, x_i^j\rangle |^2\right\| \\
&\geq (C - E)\|x\|^2
\end{aligned}$$

و نتیجه حاصل می‌شود. □

اکنون می‌توانیم قضیه ۱.۳ در [۴] را به C^*- مدول‌های هیلبرت تعمیم دهیم.

قضیه ۱۱.۳. فرض کنیم به‌ازای هر $j = 1, 2, ..., m$، $\{x_i^j : i \in I\}$ یک قاب با کران‌های C_j, D_j باشد. همچنین ثابت $0 < E < \sum_{j=1}^m C_j$ و افراز $P = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ از I موجود باشند به‌طوری‌که

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i\in\sigma_j^c} | \langle x, x_i^j\rangle |^2 \leq E | x |^2 \qquad (x \in H).$$

در این صورت، $\{x_i^j : i \in I\}$، $j = 1, 2, ..., m$، P- درهم‌تنیده است.

اثبات. فرض کنیم $x \in H$. برای هر $j = 1, 2, ..., m$ داریم

$$\sum_{i\in\sigma_j} | \langle x, x_i^j\rangle |^2 = \sum_{i\in I} | \langle x, x_i^j\rangle |^2 - \sum_{i\in\sigma_j^c} | \langle x, x_i^j\rangle |^2 .$$

در نتیجه به‌وضوح

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=۱}^{m}\sum_{i\in\sigma_j} \mid \langle x, x_i^j\rangle \mid^۲\right\| &\leq \left\|\sum_{j=۱}^{m}\sum_{i\in I} \mid \langle x, x_i^j\rangle \mid^۲\right\| \\ &\leq \left(\sum_{j=۱}^{m} D_j\right)\|x\|^۲,\end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=۱}^{m}\sum_{i\in\sigma_j} \mid \langle x, x_i^j\rangle \mid^۲\right\| &= \left\|\sum_{j=۱}^{m}\sum_{i\in I} \mid \langle x, x_i^j\rangle \mid^۲ - \sum_{j=۱}^{m}\sum_{i\in\sigma_j^c} \mid \langle x, x_i^j\rangle \mid^۲\right\| \\ &\geq \left\|\sum_{j=۱}^{m}\sum_{i\in I} \mid \langle x, x_i^j\rangle \mid^۲\right\| - \left\|\sum_{j=۱}^{m}\sum_{i\in\sigma_j^c} \mid \langle x, x_i^j\rangle \mid^۲\right\| \\ &\geq \left[\left(\sum_{j=۱}^{m} C_j\right) - E\right]\|x\|^۲,\end{aligned}$$

و نتیجه به دست می‌آید. $\square$

قضیه ۱۲.۳. فرض کنیم به‌ازای هر $j = ۱, ۲, ..., m$، $\{x_i^j : i \in I\}$ یک قاب با عملگر قاب S_j باشد. فرض کنید ثابت $۰ < E < m$ و افراز $P = \{\sigma_۱, \sigma_۲, ..., \sigma_m\}$ از I وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای $x \in H$

$$\sum_{j=۱}^{m}\sum_{i\in\sigma_j^c} \mid \langle x, S_j^{-\frac{۱}{۲}} x_i^j\rangle \mid^۲ \leq E \mid x \mid^۲ .$$

در این صورت، $j = ۱, ۲, ..., m$، $\{S_j^{-\frac{۱}{۲}} x_i^j : i \in I\}$، یک قاب P- درهم‌تنیده است.

اثبات. چون به‌ازای هر $j = ۱, ۲, ..., m$، $\{S_j^{-\frac{۱}{۲}} x_i^j : i \in I\}$ یک قاب پارسوال است؛ بنابراین $C_j = D_j = ۱$. اکنون حکم از قضیهٔ فوق نتیجه می‌شود. $\square$

References

[1] Arambasic, L. (2007). On frames for countably generated Hilbert C^*-modules. *Proc. Amer. Math. Soc*, 135, 469–478. DOI: https://doi.org/10.1090/s0002-9939-06-08498-x.

[2] Asgari, M.S., & Khosravi, A. (2005). Frames and bases of subspaces in Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl*, 308, 541–553. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.11.036.

[3] Bemrose, T., Casazza, P.G., Grochenig, K., Lammers, M.C., & Lynch, R.G. (2016). Weaving Frames. *Operators and Matrices*, 10, 1093–1110. DOI: https://doi.org/10.7153/oam-10-61.

[4] Bibak Hafshejani, A., & Dehghan, M.A. (2019). P-woven frames. *J. Math. Anal. Appl*, 479, 673–687. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.06.044.

[5] Casazza, P.G., Freeman, D., & Lynch, R.G. (2016). Weaving Schauder frames. *J. Approx. Theory*, 211, 42–60. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jat.2016.07.001.

[6] Casazza, P.G., & Kutyniok, G. (2013). Finite Frames: Theory and Applications. *Birkhauser, New York*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8373-3.

[7] Daubechies, I., Grossmann, A., & Meyer, Y. (1986). Painless nonorthogonal expansions. *J. Math. Phys*, 27, 1271–1286. DOI: https://doi.org/10.1063/1.527388.

[8] Duffin, R.J., & Schaeffer, A.C. (1952). A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Am. Math. Soc*, 72, 341–366. DOI: https://doi.org/10.2307/1990760.

[9] Frank, M., & Larson, D.R. (2002). Frames in Hilbert C^*-modules and C^*-algebras. *J. Operator Theory*, 48, 273–314.

[10] Jing, W. (2006). Frames in Hilbert C^*-modules. *Ph.D. Thesis, University of Central Florida*.

[11] Kasparov, G. (1980). Hilbert C^*-modules: The theorem of Stinespring and Voiculescu. *J. Operator Theory*, 4, 133–150. DOI: https://www.jstor.org/stable/24713855.

[12] Khosravi, A., & Khosravi, B. (2012). G-frames and modular Riesz bases in Hilbert C^*-modules. *Int. J. Wavelets, Multiresolut. Inf. Process*, 10, 1250013 (12 pages).DOI: https://doi.org/10.1142/S0219691312500130.

[13] Khosravi, A., & Mirzaee Azandaryani, M. (2014). Approximate duality of g-frames in Hilbert spaces. *Acta Math. Sci*, 34, 639–652. DOI: https://doi.org/10.1016/S0252-9602(14)60036-9.

[14] Khosravi, A., & Sohrabi, J. (2019). Weaving g-frames and weaving fusion frames. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc*, 42, 3111–3129. DOI: https://doi.org/10.1007/s40840-018-0647-4.

[15] Lance, E.C. (1995). Hilbert C^*-modules-A toolkit for Operator Algebraists. *London Math. Soc. Lecture Note Ser*, Vol. 210, *Cambridge Univ. Press*.

[16] Murphy, G.J. (1990). C^*-Algebras and Operator Theory. *Academic Press, San Diego*. DOI: https://doi.org/10.1016/C2009-0-22289-6.

[17] Sun, W. (2006). G-frames and g-Riesz bases. *J. Math. Anal. Appl*, 322, 437–452. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.09.039.

[18] Zhao, X., & Li, P. (2021). Weaving frames in Hilbert C^*-modules. *J. Math*, 2021, 2228397 (13 pages). DOI: https://doi.org/10.1155/2021/2228397.