



## Woven frames and modular Riesz bases in Hilbert $C^*$ -modules

Mohammad Reza Farmani<sup>1</sup>✉<sup>ID</sup>, Amir Khosravi<sup>2</sup><sup>ID</sup>

1. Corresponding Author, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Kharazmi University, 599 Taleghani Ave., Tehran 15618, Iran. Email: [mr.farmanis@gmail.com](mailto:mr.farmanis@gmail.com)
2. Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Kharazmi University, 599 Taleghani Ave., Tehran 15618, Iran. Email: [khosravi@khu.ac.ir](mailto:khosravi@khu.ac.ir)

---

---

### Article Info

### ABSTRACT

---

---

#### Article type:

Research Article

#### Article history:

Received: 3 May 2023

Received in revised form:

19 July 2023

Accepted: 22 July 2023

Published Online:

30 September 2023

#### Keywords:

Frame,

Woven frame,

P-woven frame,

Hilbert  $C^*$ -module

In this paper, we investigate woven frames,  $P$ -woven and  $CP$ -woven frames in Hilbert  $C^*$ -modules. We also study frames, Riesz bases, and modular Riesz bases in Hilbert  $C^*$ -modules. We show that modular Riesz bases share some properties with Riesz bases in Hilbert spaces. We generalize some main results in Hilbert spaces to Hilbert  $C^*$ -modules and we get some results about perturbation and redundancy of woven frames.

#### 2020 Mathematics Subject

#### Classification:

42C15

---

---

**Cite this article:** Farmani, M.R., & Khosravi, A. (2023). Woven frames and modular Riesz bases in Hilbert  $C^*$ -modules. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 22–35. <http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9392.1000>



©The Author(s).

**Publisher:** University of Qom

**DOI:** 10.22091/MAA.2023.9392.1000

# Extended Abstract

## Introduction

Hilbert space frames were originally introduced by Duffin and Schaeffer to deal with some problems in non-harmonic Fourier analysis [8], [7]. Frames can be viewed as redundant bases which are generalizations of Riesz bases [3], [4], [5], [6], [2], [12], [13],[17]. This redundancy property sometimes is extremely important in some applications such as signal and image processing, data compression, and sampling theory.

In recent years, many mathematicians get significant results by extending the theory of frames from Hilbert spaces to Hilbert  $C^*$ -modules. Hilbert  $C^*$ -modules are generalizations of Hilbert spaces by allowing the inner product to take values in a  $C^*$ -algebra rather than in the field of real or complex numbers. They were introduced and investigated initially by Kaplansky (see also [11, 15]). Frank and Larson [9] introduced the concept of frames in finitely or countably generated Hilbert  $C^*$ -modules over a unital  $C^*$ -algebra. The second author and B. Khosravi in [12] introduced modular Riesz bases in Hilbert  $C^*$ -modules and showed that they share many properties with Riesz bases in Hilbert spaces. Frames in Hilbert  $C^*$ -modules are called Hilbert  $C^*$ -modular frames or just simply modular frames. Recently, Bemrose, Casazza, Grochenig, Lammers, and Lynch in [3] (see also [5], [14], [18]) introduced the concept of weaving frames which is motivated by a problem regarding distributed signal processing.

Let  $\{f_i\}_{i \in I}$  and  $\{g_i\}_{i \in I}$  be two frames for a Hilbert space  $H$ .  $\{\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I}\}$  is said to be woven if there are universal constants  $A$  and  $B$  so that for every subset  $\sigma$  of  $I$ , the family  $\{f_i\}_{i \in \sigma} \cup \{g_i\}_{i \in \sigma^c}$ , is a frame for  $H$  with lower and upper frame bounds  $A$  and  $B$ , respectively. The family  $\{f_i\}_{i \in \sigma} \cup \{g_i\}_{i \in \sigma^c}$  is called a weaving, for more details see [5].  $\{\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I}\}$  is called partition-woven, or simply P-woven, if there exists a nonempty proper subset  $\sigma$  of  $I$  such that  $\{f_i\}_{i \in \sigma} \cup \{g_i\}_{i \in \sigma^c}$  is a frame (see [5]).

## Conclusion

In this paper, the following definitions are stated:

**Definition 0.1.** A pre-Hilbert  $A$ -module is a left  $A$ -module  $H$  equipped with an  $A$ -valued inner product  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow A$ , such that

- (i)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  for all  $x \in H$  and  $\langle x, x \rangle = 0$  if and only if  $x = 0$ ,
- (ii)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$  for all  $x, y \in H$ ,
- (iii)  $\langle ax + y, z \rangle = a\langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$  for all  $a \in A$  and  $x, y, z \in H$ .

**Definition 0.2.** Let  $A$  be a unital  $C^*$ -algebra. A sequence  $\{x_i : i \in I\}$  in  $H$  is called a frame for  $H$ , if there exist two constants  $0 < C \leq D < \infty$  such that

$$C|x|^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq D|x|^2,$$

for every  $x \in H$ , it is called a tight frame if  $C = D$ , is called a Parseval frame if  $C = D = 1$  and is called a Bessel sequence, if the right-hand side inequality is required.

**Definition 0.3.** (i) A frame  $\{x_i : i \in I\}$  for  $H$  is called a Riesz basis if  $x_i \neq 0$  for each  $i \in I$  and  $\sum_{i \in S} a_i x_i = 0$  for coefficients  $\{a_i : i \in S\} \subseteq A$ ,  $S \subseteq I$ , implies that  $a_i x_i = 0$  for each  $i \in S$ .

(ii) Let  $\{x_i : i \in I\} \subseteq H$  be a sequence in  $H$ . We say that  $\{x_i : i \in I\}$  is a modular Riesz basis, if there exists an invertible  $U \in B(\ell_1^2(A), H)$  such that for every  $\{a_i : i \in I\}$  in  $\ell_1^2(A)$ ,  $U(\sum_{i \in I} a_i e_i) = \sum_{i \in I} a_i x_i$ , where  $\{e_i : i \in I\}$  is the standard orthonormal basis of  $\ell_1^2(A)$ .

**Definition 0.4.** A sequence  $\{x_i : i \in I\}$  in  $H$  which is a frame for its closed  $A$ -linear hull is called a frame sequence. If every subsequence of  $\{x_i : i \in I\}$  is a frame sequence, we say that the frame has the subframe property. If  $\{x_i : i \in I\}$  is a frame for  $H$  with the subframe property and additionally there are uniform upper and lower frame bounds for all subsequences of the frame, then we call  $\{x_i : i \in I\}$  a Riesz frame.

**Definition 0.5.** A family  $\{x_i^j : i \in I\}$  for  $j = 1, 2, \dots, m$  of frames in  $H$  is called woven, if there exist constants  $C, D > 0$  such that for every partition  $P = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$  of  $I$ ,  $\{x_i^j : i \in \sigma_j, j = 1, 2, \dots, m\}$  is a frame with bounds  $C, D$ . Each family  $\{x_i^j : i \in \sigma_j, j = 1, 2, \dots, m\}$  is called a weaving.

**Definition 0.6.** (i) A family  $\{x_i^j : i \in I\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  of Bessel sequences in  $H$  is called a  $P$ -woven frame, if there exists a partition  $P = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$  of  $I$  such that  $\{x_i^j : i \in \sigma_j, j = 1, 2, \dots, m\}$  is a frame for  $H$ .

(ii) A family  $\{x_i^j : i \in I\}$  for  $j = 1, 2, \dots, m$  of Bessel sequences in  $H$  is  $CP$ -woven, if there exists a partition  $P = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$  of  $I$  such that for each permutation  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  of  $\{1, 2, \dots, m\}$ ,  $\{x_i^j : i \in \sigma_{\lambda_j}, j = 1, 2, \dots, m\}$  is a frame for  $H$ .

Also, the next theorems and propositions are presented:

**Theorem 0.7.** Let  $\{x_i = Ue_i : i \in I\}$  be a modular Riesz basis. Then

(i)  $\{x_i : i \in I\}$  is a frame with synthesis operator  $U$  and with a unique dual frame  $\{(U^*)^{-1}(e_i) : i \in I\}$ , which is a modular Riesz basis.

(ii) If  $\sum_{i \in I} a_i x_i = 0$ , for some  $\{a_i : i \in I\} \subseteq A$ , then  $a_i = 0$  for each  $i \in I$ .

(iii) If  $\sum_{i \in I} a_i x_i$  converges for some  $\{a_i : i \in I\} \subseteq A$ , then  $\{a_i : i \in I\} \in \ell_1^2(A)$ .

(iv) There exist  $0 < A \leq B < \infty$  such that for every  $\{a_i : i \in I\} \in \ell_1^2(A)$ ,

$$A \left\| \sum_{i \in I} |a_i|^2 \right\| \leq \left\| \sum_{i \in I} a_i x_i \right\|^2 \leq B \left\| \sum_{i \in I} |a_i|^2 \right\|.$$

**Theorem 0.8.** Let  $\{x_i : i \in I\}$  be a frame for  $H$  with analysis operator  $T : H \rightarrow \ell_1^2(A)$ . Then the following are equivalent:

(i)  $\{x_i : i \in I\}$  is a modular Riesz basis.

(ii)  $T^* : \ell_1^2(A) \rightarrow H$  is one to one.

(iii)  $\{x_i : i \in I\}$  has a unique dual frame.

(iv) There exist positive constants  $A, B$  such that for every  $\{a_i : i \in I\}$  in  $\ell_1^2(A)$ ,

$$A \left\| \sum_{i \in I} |a_i|^2 \right\| \leq \left\| \sum_{i \in I} a_i x_i \right\|^2 \leq B \left\| \sum_{i \in I} |a_i|^2 \right\|.$$

**Proposition 0.9.** Every modular Riesz basis has the subframe property.

**Proposition 0.10.** Let  $\{x_i^j : i \in I\}$  for  $j = 1, 2, \dots, m$  be a woven frame for  $H$  and  $Q \in B(H)$  be surjective. Then  $\{Qx_i^j : i \in I\}$  for  $j = 1, 2, \dots, m$  is a woven frame.

**Theorem 0.11.** Let  $\{x_i^j : i \in I\}$  for  $j = 1, 2, \dots, m$  be a woven frame with bounds  $C, D$ . Suppose that  $J \subseteq I$  for which there exist a constant  $0 < E < C$  and a partition  $P = \{\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_m\}$  of  $J$  such that for every  $x \in H$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i \in \sigma'_j} |\langle x, x_i^j \rangle|^2 \leq E \|x\|^2.$$

Then  $\{x_i^j : i \in I \setminus J\}$  for  $j = 1, 2, \dots, m$  is a woven frame for  $H$ .

**Theorem 0.12.** Let  $\{x_i^j : i \in I\}$  be a frame with bounds  $C_j, D_j$  for each  $j = 1, 2, \dots, m$  such that there exist a constant  $0 < E < \sum_{j=1}^m C_j$  and a partition  $P = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$  of  $I$  such that

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i \in \sigma_j^c} |\langle x, x_i^j \rangle|^2 \leq E \|x\|^2 \quad (x \in H).$$

Then  $\{x_i^j : i \in I\}$  for  $j = 1, 2, \dots, m$  is a  $P$ -woven frame.

**Theorem 0.13.** Let  $\{x_i^j : i \in I\}$  be a frame for  $H$  with frame operator  $S_j$  for each  $j = 1, 2, \dots, m$ . Assume that there exist a constant  $0 < E < m$  and a partition  $P = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$  of  $I$  such that

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i \in \sigma_j^c} |\langle x, S_j^{-\frac{1}{2}} x_i^j \rangle|^2 \leq E \|x\|^2,$$

for every  $x \in H$ . Then the family  $\{S_j^{-\frac{1}{2}} x_i^j : i \in I\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  is a  $P$ -woven frame for  $H$ .



## قاب‌های درهم‌تنیده و پایه‌های ریس مدولار در $C^*$ -مدول‌های هیلبرت

محمدرضا فرمانی<sup>۱</sup>، امیر خسروی<sup>۲</sup>

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. رایانامه: [mr.farmanis@gmail.com](mailto:mr.farmanis@gmail.com)

۲. گروه ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. رایانامه: [khosravi@khu.ac.ir](mailto:khosravi@khu.ac.ir)

چکیده	اطلاعات مقاله
	نوع مقاله: مقاله پژوهشی
	تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۲/۱۳ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۴/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۴/۳۱ تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸
	کلمات کلیدی: قاب، قاب درهم‌تنیده، $P$ - قاب درهم‌تنیده، $C^*$ - مدول هیلبرت
در این مقاله، قاب‌ها، پایه‌های ریس و پایه‌های ریس مدولار در $C^*$ -مدول‌های هیلبرت را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. نشان خواهیم داد که برخی از خواص پایه‌های ریس از یک فضای هیلبرت به پایه‌های ریس مدولار قابل انتقال هستند. سپس قاب‌های درهم‌تنیده، قاب‌های $P$ - درهم‌تنیده و قاب‌های $CP$ - درهم‌تنیده در $C^*$ -مدول‌های هیلبرت مورد مطالعه و بحث قرار خواهند گرفت. علاوه بر این، برخی از نتایج به‌دست‌آمده در فضاهای هیلبرت را به $C^*$ -مدول‌های هیلبرت، تعمیم خواهیم داد و نتایجی در رابطه با آشفتگی و افزونگی قاب‌های درهم‌تنیده ارائه خواهیم کرد.	رده‌بندی ریاضی: 42C15

استناد: فرمانی، محمدرضا، خسروی، امیر. (۱۴۰۲). قاب‌های درهم‌تنیده و پایه‌های ریس مدولار در  $C^*$  -مدول‌های هیلبرت. جبرهای اندازه و کاربردها، (۱)۱، ۲۲-۳۵.

<http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9392.1000>



ناشر: دانشگاه قم.

© نویسندگان.

## ۱ تاریخچه و تعاریف

قاب‌ها در فضاهای هیلبرت برای اولین بار توسط دافین و شفر در حل برخی از مسائل آنالیز هارمونیک غیرهمساز معرفی و مورد استفاده قرار گرفتند [۸]، [۷]. قاب‌ها، در حقیقت توسیع‌یافته پایه‌های فضاهای برداری هستند که می‌توان آن‌ها را به پایه‌های ریس تعمیم داد. مراجع [۳]، [۴]، [۵]، [۶]، [۲]، [۱۲]، [۱۳]، [۱۷] را ملاحظه نمایید. از خاصیت قاب‌ها در حل برخی از مسائل کاربردی مانند پردازش سیگنال و تصویر، فشرده‌سازی داده‌ها و نظریه نمونه‌گیری که دارای اهمیت بسیاری است، استفاده می‌شود.

در سال‌های اخیر، بسیاری از ریاضی‌دانان از جمله کاپلانسکی<sup>۱</sup>، فرانک<sup>۲</sup> و لارسون<sup>۳</sup> [۱۱]، [۹]، [۱۰]، [۱۵]، با تعمیم نظریه قاب‌ها از فضاهای هیلبرت به  $C^*$ -مدول‌های هیلبرت به نتایج قابل توجهی دست یافته‌اند. یک  $C^*$ -مدول هیلبرت در واقع تعمیم یک فضای هیلبرت با یک ضرب داخلی است که برد آن به جای اینکه مقادیری از میدان اعداد حقیقی یا مختلط باشد، مقادیری از یک  $C^*$ -جبر است.

نویسنده دوم مقاله و ب. خسروی در [۱۲] پایه‌های ریس مدولار در  $C^*$ -مدول‌های هیلبرت را معرفی نموده‌اند. قاب‌ها در فضاهای هیلبرت به‌طور طبیعی حالت ابتدایی یا اولیه قاب‌ها در  $C^*$ -مدول‌های هیلبرت هستند. اخیراً، بروسو، کاسازا، گراچین، لامرس و دیگران در [۳]، (مراجع [۵]، [۱۴]، [۱۸] را هم ملاحظه کنید) مفهوم جدیدی به نام قاب‌های درهم‌تنیده را مطرح و مورد بررسی قرار داده‌اند که موجب پردازش سیگنال‌های فرستاده‌شده می‌شود. برای مثال، پیام‌های ارسالی که به‌صورت چندین قاب هستند، در شبکه حسگر بی‌سیم دریافت می‌شوند و مورد پردازش قرار می‌گیرند و از هم تفکیک می‌شوند و در نتیجه پیام اصلی تشخیص داده می‌شود.

از  $\{ \{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I} \}$  را یک قاب درهم‌تنیده گویند، هرگاه ثابت‌های جهانی  $A$  و  $B$  موجود باشند به طوری که به‌ازای هر زیرمجموعه  $\sigma$  از  $I$ ، خانواده  $\{f_i\}_{i \in \sigma} \cup \{g_i\}_{i \in \sigma^c}$  یک قاب در  $H$  با کران‌های پایینی و بالایی به ترتیب  $A$  و  $B$  باشد. خانواده  $\{f_i\}_{i \in \sigma} \cup \{g_i\}_{i \in \sigma^c}$  را تنیدگی گویند. جزئیات بیشتر در [۵] قابل مشاهده است.  $\{ \{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I} \}$  را قاب افزا-درهم‌تنیده یا  $P$ -درهم‌تنیده گویند، هرگاه زیرمجموعه محض  $\sigma$  از  $I$  موجود باشد به طوری که خانواده  $\{f_i\}_{i \in \sigma} \cup \{g_i\}_{i \in \sigma^c}$  یک قاب در  $H$  باشد ([۵] را ملاحظه نمایید). در این مقاله، ابتدا برخی از تعاریف و خواص پایه‌ای از  $C^*$ -مدول‌های هیلبرت، قاب‌های درهم‌تنیده و قاب‌های  $P$ -درهم‌تنیده در  $C^*$ -مدول‌های هیلبرت را بیان خواهیم نمود. همچنین، قاب‌های درهم‌تنیده، قاب‌های  $P$ -درهم‌تنیده و قاب‌های  $CP$ -درهم‌تنیده روی تعداد متناهی از قاب‌ها را مورد بحث و بررسی قرار خواهیم داد و برخی از خواصی که در فضای هیلبرت برقرار است و به  $C^*$ -مدول‌های هیلبرت منتقل می‌شوند، را مطرح خواهیم کرد. علاوه بر این، پایه‌های ریس و پایه‌های ریس مدولار را در  $C^*$ -مدول‌های هیلبرت مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

در کل مقاله،  $I$  یک زیرمجموعه متناهی یا نامتناهی از  $\mathbb{N}$ ،  $A$  یک  $C^*$ -جبر یک‌دار و  $H$ ،  $K_i$ ،  $A$ -مدول‌های به‌طور متناهی یا شمارا تولیدشده هستند. به‌ازای هر  $i \in I$ ،  $B(H, K_i)$  نماد مجموعه همه عملگرهای الحاقی‌پذیر از  $H$  به  $K_i$  است. فرض کنید  $\ell_I^1(A)$ ،  $A$ -مدول هیلبرت تعریف شده به‌صورت زیر باشد:

$$\ell_I^1(A) = \left\{ \{a_i\}_{i \in I} \subseteq A \mid \sum_{i \in I} a_i a_i^* \text{ با نرم همگرا باشد.} \right\}.$$

**تعریف ۱.۱.** یک پیش  $A$ -مدول هیلبرت  $H$  عبارت است از یک  $A$ -مدول چپ  $H$  با ضرب داخلی  $A$ -مقداری

$$A \times H \rightarrow H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \text{ به طوری که در شرایط زیر صدق نماید:}$$

$$(ا) \text{ به‌ازای هر } x \in H, \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ و } \langle x, x \rangle = 0 \text{ اگر و تنها اگر } x = 0.$$

$$(ب) \text{ به‌ازای هر } x, y \in H, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*.$$

$$(ج) \text{ برای هر } a \in A \text{ و } x, y, z \in H, \langle ax + y, z \rangle = a \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

فرض می‌کنیم اعمال خطی روی  $A$  و  $H$  شرکت‌پذیر هستند. یعنی به‌ازای هر  $a \in A$ ،  $x \in H$  و  $\lambda \in \mathbb{C}$ ،  $\lambda(ax) = (\lambda a)x$ ، به‌ازای هر  $x \in H$ ،  $\|x\|$ ،  $\langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ ،  $|x| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ ،  $\|x\| = \|\langle x, x \rangle\|^{\frac{1}{2}}$ ،  $|x| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ .

اگر پیش  $A$ -مدول هیلبرت  $H$ ،  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  تحت نرم  $\|\cdot\|$  کامل باشد، آن را یک  $C^*$ -مدول هیلبرت نامند. در این مقاله بر  $C^*$ -مدول‌های هیلبرت به‌طور متناهی و شمارش‌پذیر تولیدشده روی  $C^*$ -جبر یک‌دار  $A$  متمرکز هستیم.

$A$ -مدول هیلبرت  $H$  را به‌طور متناهی تولیدشده گوئیم، هرگاه زیرمجموعه متناهی  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  از  $H$  وجود داشته باشد، به طوری که

<sup>1</sup>Kaplansky

<sup>2</sup>Frank

<sup>3</sup>Larson

به‌ازای هر  $x \in H$  بتوان آن را به‌وسیلهٔ پیمایهٔ  $-A$  خطی با ضرایبی از جبر  $A$  بیان نمود. یعنی  $a_i \in A$ ،  $x = \sum_{i=1}^m a_i x_i$  برای دیدن جزئیات بیشتر [۱۵] را ملاحظه کنید.

اکنون تعاریف قاب و پایهٔ ریس در  $C^*$ -مدول‌های هیلبرت را ارائه می‌دهیم.

**تعریف ۲.۱.** فرض کنیم  $A$  یک  $C^*$ -جبر و  $I$  مجموعهٔ اندیس‌گذار متناهی یا شمارا باشد. دنبالهٔ  $\{x_i : i \in I\}$  از عناصر  $C^*$ -مدول هیلبرت  $H$  را قاب گویند، هرگاه ثابت‌های  $0 < C \leq D < \infty$  وجود داشته باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر  $x \in H$

$$C\langle x, x \rangle \leq \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle \langle x_i, x \rangle \leq D\langle x, x \rangle. \quad (۱.۱)$$

ثابت‌های مطلوب (یعنی، اینفیمم  $D$  و سوپریمم  $C$ ) را کران‌های قاب گویند. اگر  $C = D$ ، آنگاه قاب  $\{x_i : i \in I\}$  را تنگ<sup>۱</sup> نامند و در صورتی‌که  $C = D = ۱$  قاب را پارسوال گویند. دنبالهٔ  $\{x_i : i \in I\}$  را بسل گویند، هرگاه فقط نامساوی سمت بالا برقرار باشد. اگر سری ۱.۱ به‌ازای هر  $x \in H$  در نرم همگرا باشد، آنگاه قاب را استاندارد گویند.

آرام بیسیک [۱] ثابت کرد که  $\{x_i : i \in I\} \subseteq H$  یک قاب استاندارد است اگر و تنها اگر ثابت‌های  $0 < C \leq D < \infty$  وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$C\|x\|^2 \leq \left\| \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2 \right\| \leq D\|x\|^2, \quad (x \in H). \quad (۲.۱)$$

توجه داشته باشید که می‌توانیم عملگر تحلیل، عملگر ترکیب و عملگر قاب را تعریف کنیم. به‌ازای هر دنبالهٔ بسل  $\{x_i : i \in I\} \subseteq H$ ، عملگر تحلیل  $T : H \rightarrow \ell_I^2(A)$  به‌صورت  $Tx = \{\langle x, x_i \rangle\}_{i \in I}$  تعریف می‌شود که عملگر الحاقی آن به‌صورت،  $T^* : \ell^2(A) \rightarrow H$ ،  $T^*\{a_i\}_{i \in I} = \sum_{i \in I} a_i x_i$  است، در صورتی‌که این دو عملگر را ترکیب کنیم، عملگر قاب  $S : H \rightarrow H$  به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$Sx = T^*Tx = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i \quad (x \in H). \quad (۳.۱)$$

قاب  $\{S^{-1}x_i : i \in I\}$  را دوگان کانونی قاب  $\{x_i : i \in I\}$  گویند.

همچنین از معادله ۳.۱ به‌ازای هر  $x \in H$  خواهیم داشت:

$$x = SS^{-1}x = \sum_{i \in I} \langle S^{-1}x, x_i \rangle x_i = \sum_{i \in I} \langle x, S^{-1}x_i \rangle x_i. \quad (۴.۱)$$

## ۲ پایه‌های ریس

در این بخش پایه‌های ریس و پایه‌های ریس مدولار مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

**تعریف ۱.۲.** (ا) قاب  $\{x_i : i \in I\}$  از  $H$  را پایهٔ ریس گویند، هرگاه به‌ازای هر  $i \in I$ ،  $x_i \neq 0$  و در صورتی‌که  $\sum_{i \in S} a_i x_i = 0$  در آن  $\{a_i : i \in S\} \subseteq A$  و  $S \subseteq I$ ، بتوان نتیجه گرفت که  $a_i = 0$ .

(ب) دنبالهٔ  $\{x_i : i \in I\} \subseteq H$  را یک پایهٔ ریس مدولار گویند هرگاه عملگر وارون‌پذیر  $U \in B(\ell_I^2(A), H)$  وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر  $\{a_i : i \in I\} \in \ell_I^2(A)$ ،  $U(\sum_{i \in S} a_i e_i) = \sum_{i \in S} a_i x_i$ ، که در آن  $\{e_i : i \in I\}$  پایهٔ متعامد استاندارد  $\ell_I^2(A)$  است، یعنی  $e_j = (\delta_{ij})_{i \in I}$ .

**قضیه ۲.۲.** فرض کنید  $\{x_i = Ue_i : i \in I\}$  یک پایهٔ ریس مدولار باشد. در این صورت، (ا)  $\{x_i : i \in I\} \subseteq H$  یک قاب با عملگر ترکیب  $U$  و دوگان کانونی قاب  $\{(U^*)^{-1}e_i : i \in I\}$  است که یک پایهٔ ریس مدولار است.

(ب) اگر  $\{a_i : i \in S\} \subseteq A$  موجود باشد به‌طوری‌که  $\sum_{i \in S} a_i x_i = 0$ ، آنگاه به‌ازای هر  $a_i = 0$ ،  $a_i \in S$ .

(ج) اگر  $\{a_i : i \in I\} \subseteq A$  موجود باشد به‌طوری‌که  $\sum_{i \in I} a_i x_i$  همگرا باشد، آنگاه  $\{a_i : i \in I\} \in \ell_I^2(A)$ .

(د) ثابت‌های  $0 < A \leq B < \infty$  موجود هستند به‌طوری‌که به‌ازای هر  $\{a_i : i \in S\} \in \ell_I^2(A)$ ،

$$A \left\| \sum_{i \in I} |a_i|^2 \right\| \leq \left\| \sum_{i \in I} a_i x_i \right\|^2 \leq B \|U\|^2 \|x\|^2.$$

<sup>1</sup>tight

اثبات. آ) فرض کنید  $x \in H$  آنگاه

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in I} |\langle x, Ue_i \rangle|^2 \right\| &= \left\| \sum_{i \in I} |\langle U^*(x), e_i \rangle|^2 \right\| \\ &= \|U^*x\|^2 \\ &\leq \|U\|^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

همچنین

$$\left\| \sum_{i \in I} |\langle x, Ue_i \rangle|^2 \right\| = \|U^*x\|^2 \geq \frac{1}{\|U^{-1}\|^2} \|x\|^2.$$

بنابراین  $\{x_i : i \in I\}$  یک قاب با کران‌های  $\|U\|^2$ ،  $\|U^{-1}\|^{-2}$  است و  $U$  عمگر ترکیب است. از سوی دیگر،  $U^{-1}x \in \ell_I^2(A)$  و در نتیجه  $U^{-1}x = \sum_{i \in I} \langle U^{-1}x, e_i \rangle e_i$  پس

$$U^{-1}x = \sum_{i \in I} \langle x, (U^{-1})^* e_i \rangle e_i, \quad x = \sum_{i \in I} \langle x, (U^*)^{-1} e_i \rangle x_i,$$

نشان می‌دهد که  $\{(U^*)^{-1}e_i : i \in I\}$  یک دوگان قاب برای  $\{x_i : i \in I\}$  است که یک پایه ریس مدولار است. ب) اگر  $\{a_i : i \in S\} \in \ell_I^2(A)$  موجود باشد که  $\sum_{i \in S} a_i x_i = 0$ ، آنگاه  $\sum_{i \in S} a_i e_i = 0$  و چون  $U$  عملگر یک‌به‌یک است  $\sum_{i \in S} a_i e_i = 0$  از سوی دیگر  $\{e_i : i \in I\}$  پایه متعامد است، پس به‌ازای هر  $i \in S$ ،  $a_i = 0$ ، در نتیجه دوگان قاب منحصربه‌فرد است.

ج) فرض کنید  $\{a_i : i \in I\} \subseteq A$  و  $\sum_{i \in I} a_i x_i$  همگرا باشد. آنگاه به‌ازای هر زیرمجموعه متناهی  $J \subseteq I$ ، داریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|U^{-1}\|^2} \left\| \sum_{i \in J} a_i e_i \right\|^2 &\leq \left\| \sum_{i \in J} a_i x_i \right\|^2 \\ &= \left\| U \left( \sum_{i \in J} a_i e_i \right) \right\|^2 \\ &\leq \|U\|^2 \left\| \sum_{i \in J} a_i e_i \right\|^2. \end{aligned}$$

در نتیجه  $\sum_{i \in I} a_i x_i$  همگرا است اگر و تنها اگر  $\sum_{i \in I} a_i e_i$  همگرا باشد، بنابراین حکم ثابت می‌شود.

□

قسمت (د) از (ج) نتیجه می‌شود.

می‌دانیم که در فضاهای هیلبرت، هر پایه ریس دارای یک دوگان منحصربه‌فرد است که خود نیز یک پایه ریس است، ولی در  $C^*$ -مدول‌های هیلبرت به دلیل مقسم صفر بودن، یک پایه ریس لزوماً دارای دوگان پایه ریس منحصربه‌فردی نیست. علاوه بر این در فضاهای هیلبرت، اگر  $\{x_i : i \in I\}$  یک پایه ریس و به‌ازای هر دنباله  $\{c_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{C}$ ، سری  $\sum_{i \in I} c_i x_i$  همگرا باشد، آنگاه  $\{c_i\}_{i \in I} \in \ell^2(I)$ ، ولی در  $C^*$ -مدول‌های هیلبرت مثال‌هایی در [۱۰] موجود هستند که نشان می‌دهند این گزاره برقرار نیست.

**مثال ۳.۲.** فرض کنید  $A = M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ ،  $C^*$ -جبر همه ماتریس‌های  $2 \times 2$  باشد. آنگاه  $H := A$ ،  $A$ -مدول با ضرب داخلی  $\langle A, B \rangle = AB^*$  است. بنابر مثال [۱۰]، مثال [۴.۳]، ماتریس  $E_{i,j}$  که در آن،  $(i,j)$ -درایه ماتریس ۱ و سایر درایه‌ها ۰ باشند، را در نظر می‌گیریم. در این صورت،  $x = \{E_{1,1}, E_{2,2}\}$  یک پایه ریس با دوگان قاب  $\{E_{1,1}, E_{2,2}\}$  است. به‌وضوح، دوگان  $x$ ، پایه ریس مدولار نیست.

**مثال ۴.۲.** فرض کنید  $A = l^\infty$  مجموعه همه دنباله‌های کران‌دار مختلط مقدار باشد. به‌ازای هر  $x = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$  و  $y = \{y_i : i \in \mathbb{N}\}$  تعریف می‌کنیم  $xy = \{x_i y_i : i \in \mathbb{N}\}$ ،  $x^* = \{\bar{x}_i : i \in \mathbb{N}\}$  و  $\|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$ . در نتیجه،  $A$  یک  $C^*$ -جبر است. فرض کنید  $H = c$  مجموعه همه دنباله‌های همگرا به صفر باشد. آنگاه  $H$ ،  $A$ -مدول با ضرب داخلی





**تعریف ۲.۳.**  $\{x_i^j : i \in I\}$ ،  $j = 1, 2, \dots, m$  در  $H$ ،  $-P$  درهم‌تنیده است، اگر افزایی مانند  $P = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$  از  $I$  وجود داشته باشد، به طوری که  $\{x_i^j : i \in \sigma_j, j = 1, 2, \dots, m\}$  یک قاب در  $H$  باشد.

**تعریف ۳.۳.**  $\{x_i^j : i \in I\}$ ،  $j = 1, 2, \dots, m$  در  $H$ ،  $-CP$  درهم‌تنیده است، هرگاه افزایی از  $I$  مانند  $P = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$  از  $\{1, 2, \dots, m\}$ ،  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$  از  $\{1, 2, \dots, m\}$ ،  $\{x_i^j : i \in \sigma_{\lambda_j}, j = 1, 2, \dots, m\}$  یک قاب در  $H$  باشد.

**قضیه ۴.۳.** فرض کنیم  $\{x_i : i \in I\}$  قابی در  $H$  و  $Q \in B(H)$  پوشا باشد. در این صورت،  $\{Qx_i : i \in I\}$  یک قاب در  $H$  است.

اثبات. چون  $Q \in B(H)$  پوشاست، پس  $Q^*$  یک‌به‌یک و با برد بسته است؛ بنابراین  $m > 0$  وجود دارد به طوری که به ازای هر  $x \in H$   $m\|x\| \leq \|Q^*x\|$  اکنون، اگر  $\{x_i : i \in I\}$  یک قاب با کران‌های  $A, B$  باشد، آنگاه برای هر  $x \in H$  داریم

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in I} |\langle x, Qx_i \rangle|^2 \right\| &= \left\| \sum_{i \in I} |\langle Q^*x, x_i \rangle|^2 \right\| \\ &\leq B\|Q^*x\|^2 \\ &\leq B\|Q^*\|^2\|x\|^2. \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in I} |\langle x, Qx_i \rangle|^2 \right\| &= \left\| \sum_{i \in I} |\langle Q^*x, x_i \rangle|^2 \right\| \\ &\geq A\|Q^*x\|^2 \\ &\geq Am^2\|x\|^2, \end{aligned}$$

و نتیجه به دست می‌آید.  $\square$

**قضیه ۵.۳.** فرض کنیم  $\{x_i^j : i \in I\}$ ،  $j = 1, 2, \dots, m$  یک قاب درهم‌تنیده و  $Q \in B(H)$  پوشا باشد. در این صورت،  $\{Qx_i^j : i \in I\}$ ،  $j = 1, 2, \dots, m$  یک قاب درهم‌تنیده است.

اثبات. چون  $\{x_i^j : i \in I\}$ ،  $j = 1, 2, \dots, m$  یک قاب درهم‌تنیده است، ثابت‌های  $A, B > 0$  وجود دارند به طوری که برای هر افزایی از  $P = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$  از  $I$ ، دنباله  $\{x_i^j : i \in \sigma_j, j = 1, 2, \dots, m\}$  یک قاب در  $H$  با کران‌های  $A$  و  $B$  باشد. از سوی دیگر  $Q \in B(H)$  پوشاست، بنا بر اثبات قضیه ۴.۳، ثابت  $m > 0$  وجود دارد به طوری که برای هر  $x \in H$   $m\|x\| \leq \|Q^*x\|$  اکنون بنا بر قضیه ۴.۳، به ازای هر افزایی از  $P = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$  از  $I$ ، دنباله  $\{Qx_i^j : i \in \sigma_j, j = 1, 2, \dots, m\}$  یک قاب برای  $H$  با کران‌های  $Am^2, B\|Q^*\|^2$  است و حکم ثابت می‌شود.  $\square$

**نتیجه ۶.۳.** فرض کنیم  $\{x_i^j : i \in I\}$ ،  $j = 1, 2, \dots, m$  یک قاب  $-P$  درهم‌تنیده ( $-CP$ -درهم‌تنیده) و  $Q \in B(H)$  پوشا باشد. در این صورت  $\{Qx_i^j : i \in I\}$ ،  $j = 1, 2, \dots, m$  یک قاب  $-P$  درهم‌تنیده ( $-CP$ -درهم‌تنیده) است.

**ملاحظه ۷.۳.** فرض کنیم  $\{a_i : i \in I\}$ ،  $\{b_i : i \in I\}$  زیرمجموعه‌های  $C^*$ -جبر  $A$  باشند و  $\sigma \subset I$  اگر

$$\sum_{i \in \sigma} [(a_i^* - b_i^*)b_i + b_i^*(a_i - b_i)] \geq 0, \quad (۱.۳)$$

آنگاه

$$\left\| \sum_{i \in \sigma} |a_i - b_i|^2 \right\| + \left\| \sum_{i \in \sigma} |b_i|^2 \right\| \geq \left\| \sum_{i \in \sigma} |a_i|^2 \right\|.$$

زیرا بنابر قضیه ۵.۲.۲ در [۱۶] خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \sigma} [(b_i^* - a_i^*)b_i + b_i^*(b_i - a_i)] &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i \in \sigma} b_i^*b_i - \sum_{i \in \sigma} (a_i^*b_i + b_i^*a_i) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i \in \sigma} b_i^*b_i - \sum_{i \in \sigma} (a_i^*b_i + b_i^*a_i) + \sum_{i \in \sigma} a_i^*a_i &\geq \sum_{i \in \sigma} a_i^*a_i \\ \Leftrightarrow \sum_{i \in \sigma} |a_i - b_i|^2 + \sum_{i \in \sigma} |b_i|^2 &\geq \sum_{i \in \sigma} |a_i|^2 \\ \Rightarrow \left\| \sum_{i \in \sigma} |a_i - b_i|^2 \right\| + \left\| \sum_{i \in \sigma} |b_i|^2 \right\| &\geq \left\| \sum_{i \in \sigma} |a_i|^2 \right\|. \end{aligned}$$

**قضیه ۸.۳.** فرض کنیم  $\{\{x_i : i \in I\}, \{y_i : i \in I\}\}$  یک قاب درهم‌تنیده با کران‌های  $C$  و  $D$  در  $C^*$ -مدول هیلبرت  $H$  باشد. فرض کنیم  $Q_1, Q_2 \in B(H)$  وارون‌پذیر باشد. اگر به‌ازای هر  $x \in H$  دو مجموعه  $\{\langle Q_1^*x, y_i \rangle : i \in I\}$  و  $\{\langle (Q_1^* - Q_2^*)x, y_i \rangle : i \in I\}$  در شرط (۱.۳) صدق نمایند و  $\|Q_1^{-1}\| \|Q_1 - Q_2\| < \sqrt{\frac{C}{D}}$ ، آنگاه  $\{\{Q_1x_i : i \in I\}, \{Q_2y_i : i \in I\}\}$  یک قاب درهم‌تنیده است.

اثبات. چون  $\|I - Q_1^{-1}Q_2\| < \sqrt{\frac{C}{D}} < 1$ ، در نتیجه  $Q_2$  وارون‌پذیر است. بنابراین  $\{Q_2y_i : i \in I\}$  قاب است. اکنون به‌ازای هر  $x \in H$  و به‌ازای هر  $\sigma \subseteq I$  قرار می‌دهیم

$$M := \left\| \sum_{i \in \sigma} |\langle x, Q_1x_i \rangle|^2 + \sum_{i \in \sigma^c} |\langle x, Q_2y_i \rangle|^2 \right\|.$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} M &= \left\| \sum_{i \in \sigma} |\langle Q_1^*x, x_i \rangle|^2 + \sum_{i \in \sigma^c} |\langle Q_2^*x, y_i \rangle|^2 \right\| \\ &= \left\| \sum_{i \in \sigma} |\langle Q_1^*x, x_i \rangle|^2 + \sum_{i \in \sigma^c} |\langle Q_1^*x + (Q_2^* - Q_1^*)x, y_i \rangle|^2 \right\|. \end{aligned}$$

بنابر فرض و شرط (۱.۳) داریم

$$M \geq \left\| \sum_{i \in \sigma} |\langle Q_1^*x, x_i \rangle|^2 + \sum_{i \in \sigma^c} |\langle Q_1^*x, y_i \rangle|^2 \right\| - \left\| \sum_{i \in \sigma^c} |\langle (Q_2^* - Q_1^*)x, y_i \rangle|^2 \right\|,$$

چون  $\{y_i : i \in I\}$  دنبالهٔ بسل با کران  $D$  است، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} M &\geq C\|Q_1^*x\|^2 - D\|Q_2^* - Q_1^*\|^2\|x\|^2 \\ &\geq \left( \frac{C}{\|Q_1^*\|^2} - D\|Q_2^* - Q_1^*\|^2 \right) \|x\|^2, \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned} M &= \left\| \sum_{i \in \sigma} |\langle x, Q_1x_i \rangle|^2 + \sum_{i \in \sigma^c} |\langle x, Q_2y_i \rangle|^2 \right\| \\ &\leq D(\|Q_1^*\|^2 + \|Q_2^*\|^2) \|x\|^2. \end{aligned}$$

□

**نتیجه ۹.۳.** فرض کنیم  $\{x_i : i \in I\}, \{y_i : i \in I\}$  یک قاب درهم‌تنیده در  $-C^*$  -مدول هیلبرت  $H$  با کران‌های  $D, C$  باشد و عملگرهای قاب  $\{x_i : i \in I\}$  و  $\{y_i : i \in I\}$  به ترتیب  $S, S'$  باشند. در این صورت،  $\{S^{-1}x_i : i \in I\}, \{S'^{-1}y_i : i \in I\}$  درهم‌تنیده است، وقتی که

$$\|S - S'\| < \sqrt{\frac{C}{D}} \|S^{-1}\|^{-1},$$

و به‌ازای هر  $x \in H$  دو مجموعه  $\{(S - S')x, y_i : i \in I\}$  و  $\{Sx, y_i : i \in I\}$  در شرط (۱.۳) صدق کنند.

**قضیه ۱۰.۳.** فرض کنیم  $\{x_i^j : i \in I\}, j = 1, 2, \dots, m$  یک قاب درهم‌تنیده با کران‌های  $C, D$  باشد. فرض کنیم که  $J \subseteq I$ ، ثابت  $0 < E < C$  و افراز  $P = \{\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_m\}$  از  $J$  موجود باشند، به‌طوری‌که به‌ازای هر  $x \in H$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i \in \sigma'_j} |\langle x, x_i^j \rangle|^2 \leq E \|x\|^2.$$

در این صورت،  $\{x_i^j : i \in I \setminus J\}, j = 1, 2, \dots, m$  یک قاب درهم‌تنیده است.

اثبات. فرض کنیم  $P = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$  افزازی از  $I \setminus J$  باشد. در این صورت،  $P'' = \{\sigma''_1, \sigma''_2, \dots, \sigma''_m\}$  افزازی از  $I$  است، که در آن به‌ازای هر  $j = 1, 2, \dots, m$  قرار می‌دهیم  $\sigma_j = \sigma'_j \cup \sigma''_j$ . به‌ازای هر  $x \in H$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i \in \sigma_j} |\langle x, x_i^j \rangle|^2 \leq D \|x\|^2,$$

و

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^m \sum_{i \in \sigma_j} |\langle x, x_i^j \rangle|^2 \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^m \sum_{i \in \sigma''_j} |\langle x, x_i^j \rangle|^2 - \sum_{j=1}^m \sum_{i \in \sigma'_j} |\langle x, x_i^j \rangle|^2 \right\| \\ &\geq \left\| \sum_{j=1}^m \sum_{i \in \sigma''_j} |\langle x, x_i^j \rangle|^2 \right\| - \left\| \sum_{j=1}^m \sum_{i \in \sigma'_j} |\langle x, x_i^j \rangle|^2 \right\| \\ &\geq (C - E) \|x\|^2 \end{aligned}$$

□

و نتیجه حاصل می‌شود.

اکنون می‌توانیم قضیه ۱.۳ در [۴] را به  $-C^*$  -مدول‌های هیلبرت تعمیم دهیم.

**قضیه ۱۱.۳.** فرض کنیم به‌ازای هر  $j = 1, 2, \dots, m$ ،  $\{x_i^j : i \in I\}$  یک قاب با کران‌های  $C_j, D_j$  باشد. همچنین ثابت  $0 < E < \sum_{j=1}^m C_j$  و افراز  $P = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$  از  $I$  موجود باشند به‌طوری‌که

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i \in \sigma_j^c} |\langle x, x_i^j \rangle|^2 \leq E \|x\|^2 \quad (x \in H).$$

در این صورت،  $-P, j = 1, 2, \dots, m, \{x_i^j : i \in I\}$  درهم‌تنیده است.

اثبات. فرض کنیم  $x \in H$  برای هر  $j = 1, 2, \dots, m$  داریم

$$\sum_{i \in \sigma_j} |\langle x, x_i^j \rangle|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i^j \rangle|^2 - \sum_{i \in \sigma_j^c} |\langle x, x_i^j \rangle|^2.$$

در نتیجه به‌وضوح

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^m \sum_{i \in \sigma_j} |\langle x, x_i^j \rangle|^2 \right\| &\leq \left\| \sum_{j=1}^m \sum_{i \in I} |\langle x, x_i^j \rangle|^2 \right\| \\ &\leq \left( \sum_{j=1}^m D_j \right) \|x\|^2, \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^m \sum_{i \in \sigma_j} |\langle x, x_i^j \rangle|^2 \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^m \sum_{i \in I} |\langle x, x_i^j \rangle|^2 - \sum_{j=1}^m \sum_{i \in \sigma_j^c} |\langle x, x_i^j \rangle|^2 \right\| \\ &\geq \left\| \sum_{j=1}^m \sum_{i \in I} |\langle x, x_i^j \rangle|^2 \right\| - \left\| \sum_{j=1}^m \sum_{i \in \sigma_j^c} |\langle x, x_i^j \rangle|^2 \right\| \\ &\geq \left[ \left( \sum_{j=1}^m C_j \right) - E \right] \|x\|^2, \end{aligned}$$

□

و نتیجه به دست می‌آید.

**قضیه ۱۲.۳.** فرض کنیم به‌ازای هر  $j = 1, 2, \dots, m$  یک قاب با عملگر قاب  $S_j$  باشد. فرض کنید ثابت  $0 < E < m$  و افراز  $P = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$  از  $I$  وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای  $x \in H$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i \in \sigma_j^c} |\langle x, S_j^{-\frac{1}{2}} x_i^j \rangle|^2 \leq E \|x\|^2.$$

در این صورت،  $\{S_j^{-\frac{1}{2}} x_i^j : i \in I\}$ ، یک قاب  $P$ -درهم‌تنیده است.

اثبات. چون به‌ازای هر  $j = 1, 2, \dots, m$  یک قاب پارسوال است؛ بنابراین  $C_j = D_j = 1$ . اکنون حکم از قضیه فوق نتیجه می‌شود. □

## References

- [1] Arambasic, L. (2007). On frames for countably generated Hilbert  $C^*$ -modules. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135, 469–478.
- [2] Asgari, M.S., & Khosravi, A. (2005). Frames and bases of subspaces in Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 308, 541–553.
- [3] Bemrose, T., Casazza, P.G., Grochenig, K., Lammers, M.C., & Lynch, R.G. (2016). Weaving Frames. *Operators and Matrices*, 10, 1093–1110.
- [4] Bibak Hafshejani, A., & Dehghan, M.A. (2019). P-woven frames. *J. Math. Anal. Appl.*, 479, 673–687.
- [5] Casazza, P.G., Freeman, D., & Lynch, R.G. (2016). Weaving Schauder frames. *J. Approx. Theory*, 211, 42–60.

- [6] Casazza, P.G., & Kutyniok, G. (2013). *Finite Frames: Theory and Applications*. Birkhauser, New York.
- [7] Daubechies, I., Grossmann, A., & Meyer, Y. (1986). Painless nonorthogonal expansions. *J. Math. Phys*, 27, 1271–1286.
- [8] Duffin, R.J., & Schaeffer, A.C. (1952). A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Am. Math. Soc*, 72, 341–366.
- [9] Frank, M., & Larson, D.R. (2002). Frames in Hilbert  $C^*$ -modules and  $C^*$ -algebras. *J. Operator Theory*, 48, 273–314.
- [10] Jing, W. (2006). *Frames in Hilbert  $C^*$ -modules*. Ph.D. Thesis, University of Central Florida.
- [11] Kasparov, G. (1980). Hilbert  $C^*$ -modules: The theorem of Stinespring and Voiculescu. *J. Operator Theory*, 4, 133–150.
- [12] Khosravi, A., & Khosravi, B. (2012). G-frames and modular Riesz bases in Hilbert  $C^*$ -modules. *Int. J. Wavelets, Multiresolut. Inf. Process*, 10, 1250013 (12 pages).
- [13] Khosravi, A., & Mirzaee Azandaryani, M. (2014). Approximate duality of g-frames in Hilbert spaces. *Acta Math. Sci*, 34, 639–652.
- [14] Khosravi, A., & Sohrabi, J. (2019). Weaving g-frames and weaving fusion frames. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc*, 42, 3111–3129.
- [15] Lance, E.C. (1995). *Hilbert  $C^*$ -modules-A toolkit for Operator Algebraists*. London Math. Soc. Lecture Note Ser, Vol. 210, Cambridge Univ. Press.
- [16] Murphy, G.J. (1990).  *$C^*$ -Algebras and Operator Theory*. Academic Press, San Diego.
- [17] Sun, W. (2006). G-frames and g-Riesz bases. *J. Math. Anal. Appl*, 322, 437–452.
- [18] Zhao, X., & Li, P. (2021). Weaving frames in Hilbert  $C^*$ -modules. *J. Math*, 2021, 2228397 (13 pages).