Measure Algebras and Applications

Some results on R-duals in Hilbert spaces

Farkhondeh Takhteh[1]

1. Persian Gulf University, Bushehr, Iran. Email: f.takhteh@pgu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 4 June 2023
Received in revised form:
12 July 2023
Accepted: 18 July 2023
Published Online:
30 September 2023

Keywords:
Hilbert space,
Frame,
R-dual,
Riesz basis

2020 Mathematics Subject Classification:
42C15

ABSTRACT

In this paper, the concept of R-duality with respect to Riesz bases is focused. In particular, some characterizations for frames and Riesz bases in terms of their R-dual sequences with respect to Riesz bases are given.

Cite this article: Takhteh, F. (2023). Some results on R-duals in Hilbert spaces. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), 13–21. http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9523.1008

Publisher: University of Qom

DOI: 10.22091/MAA.2023.9523.1008

Extended Abstract

Introduction

Let g be a function in $L^2(\mathbb{R})$ and a, b be two positive constants. The collection $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ where $E_{mb}f(x) = e^{2\pi imbx}f(x)$ and $T_{na}f(x) = f(x - na)$ is called a *Gabor frame* in $L^2(\mathbb{R})$ if it is a frame for the Hilbert space $L^2(\mathbb{R})$.

Gabor frames, introduced by D. Gabor in 1946 (see [7]), have been extensively studied. One of the most important results for Gabor frames is the Ron-Shen duality principle that precisely characterizes Gabor frames. It states that for every $g \in L^2(\mathbb{R})$ and $a, b > 0$ with $ab \leq 1$, $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ is a frame with bounds A, B for $L^2(\mathbb{R})$ if and only if $\{\frac{1}{\sqrt{ab}}E_{\frac{m}{a}}T_{\frac{n}{b}}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ is a Riesz sequence with bounds A, B.

For a generalization of the duality principle from Gabor frames to abstract frame theory, the concept of R-duality with respect to orthonormal bases was defined as follows (see [10]):

Let $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ and $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ be orthonormal bases for a separable Hilbert space $\mathcal{H}$. Let $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ be a sequence such that for every $j \in \mathbb{N}$, $\sum_{i\in\mathbb{N}} |\langle f_i, e_j\rangle|^2 < \infty$ and

$$\omega_j^f := \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle f_i, e_j\rangle h_i.$$

The sequence $(\omega_j^f)_{j\in\mathbb{N}}$ is called the R-dual sequence of $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ with respect to $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ and $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Conclusion

The main results of this paper are:

***Theorem* 0.1.** *Assume that $\mathcal{I}$ is a subset of $\mathbb{N}$. Let $(e_j)_{j\in\mathcal{I}}$ and $(h_i)_{i\in\mathcal{I}}$ be Riesz bases in $\mathcal{H}$ and $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ be a sequence such that $\sum_{i\in\mathcal{I}} |\langle f_i, e_j\rangle|^2 < \infty$, for every $j \in \mathcal{I}$. Then, the following statements hold:*

1. *For every $i \in \mathcal{I}$*
$$f_i = \sum_{j\in\mathcal{I}} \langle \omega_j^f, \widetilde{h_i}\rangle \widetilde{e_j},$$
where $(\widetilde{e_j})_{j\in\mathcal{I}}$ and $(\widetilde{h_i})_{i\in\mathcal{I}}$ are the canonical dual frames of $(e_j)_{j\in\mathcal{I}}$ and $(h_i)_{i\in\mathcal{I}}$, respectively.
2. *$(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ is the R-dual sequence of $(\omega_j^f)_{j\in\mathcal{I}}$ with respect to $(\widetilde{h_i})_{i\in\mathcal{I}}$ and $(\widetilde{e_j})_{j\in\mathcal{I}}$.*

***Theorem* 0.2.** *Let $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ be a Bessel sequence with Bessel bound A, $(h_i)_{i\in\mathcal{I}}$ and $(e_j)_{j\in\mathcal{I}}$ be Riesz bases in $\mathcal{H}$ and M be defined as*

$$M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

$$M(f) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \langle f_i, f\rangle h_i.$$

If $(\omega_j^f)_{j\in\mathcal{I}}$ is the R-dual of $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ with respect to $(h_i)_{i\in\mathcal{I}}$ and $(e_j)_{j\in\mathcal{I}}$, then $(\omega_j^f)_{j\in\mathcal{I}}$ is a Bessel sequence in $\mathcal{H}$. Moreover, the following statements are equivalent:

1. *$R(M)$ is closed and M is injective.*

2. M is bounded below.

3. $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ is a frame in $\mathcal{H}$.

***Theorem* 0.3.** *Let $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ be a Bessel sequence in $\mathcal{H}$ and let $(h_i)_{i\in\mathcal{I}}$ be a Riesz basis in $\mathcal{H}$. Let M be*

$$M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

$$M(f) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \langle f_i, f\rangle h_i.$$

Then $M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ is an invertible anti-linear map if and only if $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ is a Riesz basis in $\mathcal{H}$.

***Theorem* 0.4.** *Let $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ and $\mathcal{G} = (g_i)_{i\in\mathcal{I}}$ be frames in $\mathcal{H}$ and $(h_i)_{i\in\mathcal{I}}$ and $(e_j)_{j\in\mathcal{I}}$ be Riesz bases for $\mathcal{H}$. Suppose that*

$$M_1(f) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \langle f_i, f\rangle h_i, \qquad M_2(f) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \langle g_i, f\rangle \widetilde{h}_i,$$

and

$$S_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(f) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \langle f, f_i\rangle g_i.$$

Then the following statements are equivalent:

1. $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ *is an alternate dual frame of* $\mathcal{G} = (g_i)_{i\in\mathcal{I}}$.

2. $S_{\mathcal{F},\mathcal{G}} = S_{\mathcal{G},\mathcal{F}} = Id_{\mathcal{H}}$.

3. $\langle M_1(e_j), M_2(\widetilde{e}_k)\rangle = \delta_{jk}$ *for every* $j, k \in \mathcal{I}$.

جبرهای اندازه و کاربردها
سال ۱۴۰۲، دوره ۱، شماره ۱، ص ۲۱-۱۳

نتایجی درمورد R-دوگان‌ها در فضاهای هیلبرت

فرخنده تخته [۱]

۱. گروه ریاضی، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران. رایانامه: f.takhteh@pgu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۳/۱۴
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۴/۲۱
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۴/۲۷
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۷/۸

کلمات کلیدی:
فضای هیلبرت،
قاب،
R-دوگان،
پایهٔ ریس

رده‌بندی ریاضی:
42C15

چکیده

در این مقاله، مفهوم R-دوگان‌های قاب‌ها در فضاهای هیلبرت را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به‌ویژه، R-دوگان‌های تعریف‌شده نسبت به پایه‌های ریس مورد توجه قرار می‌گیرند و ساختارسازی‌هایی از قاب‌ها و پایه‌های ریس برحسب R-دوگان‌های آن‌ها نسبت به پایه‌های ریس ارائه می‌شوند.

استناد: تخته، فرخنده. (۱۴۰۲). نتایجی درمورد R-دوگان‌ها در فضاهای هیلبرت. جبرهای اندازه و کاربردها، ۱(۱)، ۲۱-۱۳.
http://doi.org/10.22091/MAA.2023.9523.1008

ناشر: دانشگاه قم.

۱ مقدمه

فرض کنیم g یک تابع در $L^۲(\mathbb{R})$ و a, b دو عدد مثبت باشند. در این صورت، خانوادهٔ $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ که در آن $E_{mb}f(x) = e^{۲\pi imbx}f(x)$ و $T_{na}f(x) = f(x-na)$ یک قاب گابور نامیده می‌شود اگر آن یک قاب برای فضای هیلبرت $L^۲(\mathbb{R})$ باشد.

قاب‌های گابور در سال ۱۹۴۶ توسط **گابور** [1] در مرجع [۷] معرفی شدند و به‌طور وسیع مورد مطالعه قرار گرفتند، برای نمونه مراجع [۵، ۸] را مشاهده کنید.

یکی از نتایج مهم در مورد قاب‌های گابور، اصل دوگانی **رن- شن** [2] است (مرجع [۹] را ملاحظه کنید) که دقیقاً قاب‌های گابور را ساختارسازی می‌کند. در واقع، بیان می‌کند که اگر $g \in L^۲(\mathbb{R})$، $a, b > ۰$ با $ab \leq ۱$، در این صورت $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ یک قاب با کران‌های A, B برای $L^۲(\mathbb{R})$ است اگر و فقط اگر $\{\frac{۱}{\sqrt{ab}}E_{\frac{m}{a}}T_{\frac{n}{b}}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ یک دنبالهٔ ریس با کران‌های A, B باشد.
برای تعمیم این اصل از قاب‌های گابور در $L^۲(\mathbb{R})$ به قاب‌ها در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، مفهوم یک R-دوگان نسبت به پایه‌های متعامدیکه در [۱] معرفی شد.

فرض کنیم $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ و $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ پایه‌های متعامدیکه برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند. همچنین فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ یک دنباله در $\mathcal{H}$ باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $j \in \mathbb{N}$، داشته باشیم $\sum_{i\in\mathbb{N}} |\langle f_i, e_j\rangle|^۲ < \infty$. در این صورت تعریف می‌کنیم $\omega_j^f := \sum_{i\in\mathbb{N}}\langle f_i, e_j\rangle h_i$ و دنبالهٔ $\{\omega_j^f\}_{j\in\mathbb{N}}$ یک R-دوگان $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ نسبت به پایه‌های متعامدیکه $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ و $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ نامیده می‌شود.
مفهوم R-دوگانی نسبت به پایه‌های متعامدیکه در مقالات زیادی مورد توجه قرار گرفته است، مقالات [۱]، [۲]، [۳] و [۴] را ملاحظه کنید.
در این مقاله، R-دوگان‌ها نسبت به پایه‌های ریس مورد بررسی و مطالعه قرار می‌گیرند و برخی از خواص آن‌ها به دست می‌آیند.

۲ نتایج اصلی

این بخش را با مفهوم یک R-دوگان نسبت به پایه‌های ریس آغاز می‌کنیم. این مفهوم در مرجع [۱۰] ارائه شده است.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ دو پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشند. فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ دنباله‌ای در $\mathcal{H}$ باشد به‌طوری‌که برای هر $j \in I$، $\sum_{i\in I} |\langle f_i, e_j\rangle|^۲ < \infty$. در این صورت، برای $\omega_j^f := \sum_{i\in I}\langle f_i, e_j\rangle h_i$، دنبالهٔ $(\omega_j^f)_{j\in I}$ را یک R-دوگان برای $\{f_i\}_{i\in I}$ نسبت به $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ می‌نامیم.

دقت کنید که اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل باشد، آن‌گاه برای هر $j \in I$، داریم $\sum_{i\in I} |\langle f_i, e_j\rangle|^۲ < \infty$. برای ارائهٔ مطالب در این مقاله، نیازمند تعریف یک عملگر مزدوج-خطی هستیم.
فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل در $\mathcal{H}$ با کران A و $\{h_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس با کران‌های $۰ < B_۱ \leq B_۲ < \infty$ باشد. در این صورت، عملگر مزدوج-خطی $M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ را به‌صورت

$$M(f) = \sum_{i\in I}\langle f_i, f\rangle h_i \qquad (۱.۲)$$

تعریف می‌کنیم. این عملگر خوش‌تعریف و کران‌دار است، زیرا برای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم

$$\|M(f)\|^۲ = \left\|\sum_{i\in I}\langle f_i, f\rangle h_i\right\|^۲ \leq B_۲\sum_{i\in I}|\langle f_i, f\rangle|^۲ \leq AB_۲\|f\|^۲$$

لذا

$$\|M\| \leq \sqrt{AB_۲}.$$

الحاقی M یعنی M^* یک عملگر مزدوج-خطی به‌صورت زیر است

$$\langle M^*(f), g\rangle = \langle M(g), f\rangle$$

[1] Gabor
[2] Ron-Shen

(مرجع [۶] را ملاحظه کنید). بنابراین برای هر $f, g \in \mathcal{H}$ داریم:

$$\begin{aligned}\langle M^*f, g\rangle &= \langle Mg, f\rangle = \left\langle \sum_{i\in I}\langle f_i, g\rangle h_i, f\right\rangle \\ &= \sum_{i\in I}\langle h_i, f\rangle\langle f_i, g\rangle = \left\langle \sum_{i\in I}\langle h_i, f\rangle f_i, g\right\rangle,\end{aligned}$$

بنابراین

$$M^*f = \sum_{i\in I}\langle h_i, f\rangle f_i.$$

ملاحظه ۲.۲. فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل، $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ دو پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشند. در این صورت، اگر M عملگر تعریف‌شده در (۱.۲) باشد، آن‌گاه $M(e_j) = \sum_{i\in I}\langle f_i, e_j\rangle h_i$، لذا $\omega_j^f = M(e_j)$ پس $\{M(e_j)\}_{j\in I}$ یک R-دوگان $\{f_i\}_{i\in I}$ نسبت به $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ است.

در قضیهٔ زیر، الگوریتمی را معرفی می‌کنیم که $\{f_i\}_{i\in I}$ را برحسب یک R-دوگانش نسبت به پایه‌های ریس نمایش دهد (مراجع [۱، ۱۲] را ملاحظه کنید).

قضیه ۳.۲. فرض کنیم $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ دو پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشند و $\{f_i\}_{i\in I}$ دنباله‌ای در $\mathcal{H}$ باشد به‌طوری‌که برای هر $j \in I$ داشته باشیم $\sum_{i\in I}|\langle f_i, e_j\rangle|^2 < \infty$. در این صورت، شرایط زیر برقرار هستند:

(الف) برای هر $i \in I$ داریم:

$$f_i = \sum_{j\in I}\langle \omega_j^f, \widetilde{h_i}\rangle \widetilde{e_j},$$

که در آن، $\{\widetilde{e_j}\}_{j\in I}$ و $\{\widetilde{h_i}\}_{i\in I}$ به‌ترتیب دوگان‌های کانونی $\{e_j\}_{j\in I}$ و $\{h_i\}_{i\in I}$ هستند.

(ب) $\{f_i\}_{i\in I}$ یک R-دوگان $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ نسبت به $\{\widetilde{h_i}\}_{i\in I}$ و $\{\widetilde{e_j}\}_{j\in I}$ است.

اثبات. (الف) چون $\{h_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس است، پس برای هر $i, j \in I$، $\langle h_i, \widetilde{h_j}\rangle = \delta_{i,j}$ لذا داریم $\langle \omega_j^f, \widetilde{h_i}\rangle = \langle f_i, e_j\rangle$. بنابراین، برای هر $i \in I$ داریم

$$f_i = \sum_{j\in I}\langle f_i, e_j\rangle \widetilde{e_j} = \sum_{j\in I}\langle \omega_j^f, \widetilde{h_i}\rangle \widetilde{e_j}.$$

(ب) چون برای هر $i, j \in I$ داریم $\langle \omega_j^f, \widetilde{h_i}\rangle = \langle f_i, e_j\rangle$، پس $\sum_{j\in I}|\langle \omega_j^f, \widetilde{h_i}\rangle|^2 < \infty$. اکنون نتیجه با استفاده از قسمت (الف) به دست می‌آید.

□

قضیه ۴.۲. فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل با کران A باشد، $\{h_i\}_{i\in I}$ و $\{e_j\}_{j\in I}$ دو پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشند و M را عملگر تعریف‌شده در (۱.۲) در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ یک R-دوگان $\{f_i\}_{i\in I}$ نسبت به $\{h_i\}_{i\in I}$ و $\{e_j\}_{j\in I}$ باشد. در این صورت، $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ یک دنبالهٔ بسل در $\mathcal{H}$ است. علاوه‌بر این، گزاره‌های زیر معادل هستند.

(۱) $R(M)$ (برد M) بسته است و M یک‌به‌یک است.

(۲) M از پایین کران‌دار است.

(۳) $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ است.

اثبات. فرض کنیم M عملگر تعریف‌شده در (۱.۲) باشد و $0 < B_1 \leq B_2 < \infty$ و $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ به‌ترتیب کران‌های $\{h_i\}_{i\in I}$ و $\{e_j\}_{j\in I}$ باشند. در این صورت، به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I}|\langle \omega_j^f, f\rangle|^2 &= \sum_{j\in I}|\langle M(e_j), f\rangle|^2 = \sum_{j\in I}|\langle M^*(f), e_j\rangle|^2 \leq B_2\|M^*(f)\|^2 \\ &= B_2\left\|\sum_{i\in I}\langle h_i, f\rangle f_i\right\|^2 \leq AB_2\sum_{i\in I}|\langle h_i, f\rangle|^2 \leq AB_2C_2\|f\|^2.\end{aligned}$$

بنابراین $\{\omega_j^f\}_{j\in I}$ یک دنبالهٔ بسل برای $\mathcal{H}$ است.

(۱) ⇐ (۲). فرض کنیم $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ متعامدیکه برای $\mathcal{H}$ باشد. عملگر خطی $\overline{M} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ را به‌صورت $\overline{M}(\alpha\varepsilon_i) = \alpha\overline{M(\varepsilon_i)}$، که در آن $\overline{M(\varepsilon_i)} = \sum_{j\in I}\langle \varepsilon_i, f_j\rangle h_j$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، تعریف می‌کنیم. چون $R(M)$ بسته است و M یک‌به‌یک است، پس $\overline{M}$ یک عملگر یک‌به‌یک با برد بسته است، لذا دارای وارون چپی مانند M' است. اکنون اگر $\overline{M'}$ را به‌صورت $\overline{M'} : R(\overline{M}) \to \mathcal{H}$، $\overline{M'}(\alpha\varepsilon_i) = \overline{\alpha}M'(\varepsilon_i)$ تعریف کنیم، آن‌گاه به‌سادگی به دست می‌آید که $\overline{M'}$ یک وارون چپ M است، لذا M از پایین کران‌دار است و (۲) به دست می‌آید.

استلزام (۲) ⇐ (۱) واضح است.

(۲) ⇐ (۳). فرض کنیم $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ کران‌های ریس $\{h_i\}_{i\in I}$ باشند و فرض کنیم M از پایین کران‌دار باشد؛ لذا اعداد مثبت A_1 و A_2 موجودند به‌طوری‌که برای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم:

$$A_1\|f\|^2 \leq \|M(f)\|^2 \leq A_2\|f\|^2,$$

لذا

$$\sum_{i\in I}|\langle f, f_i\rangle|^2 \geq \frac{1}{C_2}\left\|\sum_{i\in I}\langle f_i, f\rangle h_i\right\|^2 = \frac{1}{C_2}\|M(f)\|^2 \geq \frac{A_1}{C_2}\|f\|^2.$$

اکنون چون $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل است، نتیجه می‌گیریم که $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب است و (۳) به دست می‌آید.

(۳) ⇐ (۲). فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب با کران‌های $0 < A_1 \leq A_2 < \infty$ باشد و $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ کران‌های ریس $\{h_i\}_{i\in I}$ باشند. در این صورت، برای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم:

$$\|M(f)\|^2 = \left\|\sum_{i\in I}\langle f_i, f\rangle h_i\right\|^2 \leq C_2\sum_{i\in I}|\langle f_i, f\rangle|^2 \leq A_2C_2\|f\|^2.$$

به‌طور مشابه می‌توان به دست آورد که $\|M(f)\|^2 \geq A_1C_1\|f\|^2$ و (۲) حاصل می‌شود. □

در قضیهٔ زیر، با استفاده از عملگر مزدوج-خطی M، یک ساختارسازی برای پایه‌های ریس ارائه می‌شود.

قضیه ۵.۲ فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنبالهٔ بسل و $\{h_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت، عملگر مزدوج-خطی $M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ (تعریف‌شده در (۱.۲)) وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس باشد.

اثبات. فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس باشد، لذا $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب است و بنابر قضیه ۴.۲، M یک‌به‌یک است و $R(M)$ بسته است. اکنون نشان می‌دهیم M پوشا است. چون $\{f_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس است، برای هر $i, j \in I$ داریم $\langle f_i, \widetilde{f_j}\rangle = \delta_{ij}$، لذا برای هر $j \in I$ خواهیم داشت:

$$h_j = \sum_{i\in I}\langle f_i, \widetilde{f_j}\rangle h_i = M(\widetilde{f_j}) \in R(M).$$

حال، با در نظر گرفتن این نکته که $\{h_i\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ است و $R(M)$ در $\mathcal{H}$ بسته است، نتیجه می‌گیریم که M پوشا است، لذا M وارون‌پذیر است.

برعکس، فرض کنیم M وارون‌پذیر و $0 < A_1 \leq A_2 < \infty$ کران‌های ریس $\{h_i\}_{i\in I}$ باشند. در این صورت، برای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم:

$$\sum_{i\in I}|\langle f_i, f\rangle|^2 \geq \frac{1}{A_2}\left\|\sum_{i\in I}\langle f_i, f\rangle h_i\right\|^2 = \frac{1}{A_2}\|M(f)\|^2 \geq \frac{1}{A_2}\frac{1}{\|M^{-1}\|^2}\|f\|^2.$$

بنابراین، $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ است. برای کامل‌کردن برهان، کافی است نشان دهیم که اگر $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$ به‌طوری‌که $\sum_{i\in I} c_i f_i = 0$، آن‌گاه به‌ازای هر $i \in I$ داریم $c_i = 0$. چون $M^*(f) = \sum_{j\in I}\langle h_j, f\rangle f_j$، پس به‌ازای هر $i \in I$ داریم $f_i = M^*(\widetilde{h_i})$ و چون M^* پیوسته است پس

$$\sum_{i\in I} c_i f_i = M^*\left(\sum_{i\in I}\overline{c_i}\widetilde{h_i}\right) = 0.$$

اما چون M پوشا است، M^* یک‌به‌یک است، لذا خواهیم داشت $\sum_{i\in I}\overline{c_i}\widetilde{h_i} = 0$ و چون $\{\widetilde{h_i}\}_{i\in I}$ یک پایهٔ ریس است، به‌ازای هر $i \in I$ داریم $c_i = 0$ و حکم ثابت می‌شود. □

ملاحظه ۶.۲. فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب با عملگر S باشد. اگر $\{\omega_j^*\}_{j\in I}$ یک R-دوگان $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ نسبت به دو پایهٔ ریس $\{\widetilde{e_j}\}_{j\in I}$ و $\{\widetilde{h_i}\}_{i\in I}$ باشد، آن‌گاه برای هر $j,k \in I$ داریم:

$$\begin{aligned}
\langle \omega_j^f, \omega_k^*\rangle &= \left\langle \sum_{i\in I}\langle f_i, e_j\rangle h_i, \sum_{l\in I}\langle S^{-1}f_l, \widetilde{e_k}\rangle \widetilde{h_l}\right\rangle \\
&= \sum_{i\in I}\langle f_i, e_j\rangle\langle \widetilde{e_k}, S^{-1}f_i\rangle \\
&= \left\langle \widetilde{e_k}, \sum_{i\in I}\langle e_j, f_i\rangle S^{-1}f_i\right\rangle \\
&= \langle \widetilde{e_k}, e_j\rangle = \delta_{jk}.
\end{aligned}$$

قضیهٔ زیر را که در واقع تعمیمی از نکتهٔ فوق است، می‌توان به‌عنوان روابط دومتعامدی **وِکسلِر- راز** [1] [۱۱] در نظریهٔ قاب‌های مجرد دانست.

قضیه ۷.۲. فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ و $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in I}$ دو قاب و $\{h_i\}_{i\in I}$ ، $\{e_j\}_{j\in I}$ دو پایهٔ ریس برای $\mathcal{H}$ باشند. همچنین فرض می‌کنیم M_1، M_2 و $S_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ روی $\mathcal{H}$ به‌صورت زیر تعریف شوند:

$$M_1(f) = \sum_{i\in I}\langle f_i, f\rangle h_i, \qquad M_2(f) = \sum_{i\in I}\langle g_i, f\rangle \widetilde{h}_i, \qquad S_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(f) = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle g_i,$$

در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

(۱) $\mathcal{F}$ یک دوگان برای $\mathcal{G}$ است.

(۲) $S_{\mathcal{F},\mathcal{G}} = S_{\mathcal{G},\mathcal{F}} = Id_{\mathcal{H}}$.

(۳) برای هر $j,k \in I$ داریم $\langle M_1(e_j), M_2(\widetilde{e}_k)\rangle = \delta_{jk}$.

اثبات. با توجه به تعریف دوگان یک قاب، هم ارزی (۱) و (۲) واضح است.
(۲) ⇐ (۳). چون $S_{\mathcal{F},\mathcal{G}} = S_{\mathcal{G},\mathcal{F}} = Id_{\mathcal{H}}$ و با در نظر گرفتن اینکه $\{h_i\}_{i\in I}$ و $\{\widetilde{h}_i\}_{i\in I}$ دومتعامد هستند، داریم

$$\langle M_1(f), M_2(g)\rangle = \langle g, f\rangle.$$

لذا

$$\langle M_1(e_j), M_2(\widetilde{e}_k)\rangle = \langle \widetilde{e}_k, e_j\rangle = \delta_{jk}.$$

(۳) ⇐ (۲). فرض کنیم (۳) برقرار باشد. با توجه به تعریف M_1، M_2 و $S_{\mathcal{G},\mathcal{F}}$، برای هر $x,y \in \mathcal{H}$ داریم،

$$\langle M_1(x), M_2(y)\rangle = \langle S_{\mathcal{G},\mathcal{F}}(y), x\rangle.$$

[1] Wexler-Raz

اینک، با استفاده از فرض، تساوی زیر حاصل می‌شود:

$$\delta_{jk} = \langle \widetilde{e}_k, e_j \rangle = \langle e_j, \widetilde{e}_k \rangle = \langle M_1(e_j), M_2(\widetilde{e}_k) \rangle = \langle S_{\mathcal{G},\mathcal{F}}(\widetilde{e}_k), e_j \rangle.$$

پس $S_{\mathcal{G},\mathcal{F}}(\widetilde{e}_k) = \widetilde{e}_k$ (برای هر $k \in I$). حال چون $S_{\mathcal{G},\mathcal{F}}$ یک عملگر کران‌دار و $\{\widetilde{e}_j\}_{j\in I}$ یک دنبالهٔ کامل در $\mathcal{H}$ است، خواهیم داشت $S_{\mathcal{G},\mathcal{F}} = Id_{\mathcal{H}}$. با اثباتی مشابه، تساوی $S_{\mathcal{F},\mathcal{G}} = Id_{\mathcal{H}}$ نیز حاصل می‌شود. $\square$

لازم به ذکر است که قضیه ۳ در [۱] حالت خاصی از قضیهٔ فوق است.

References

[1] Casazza, P., Kutyniok, G., & Lammers, M.C. (2004). Duality principles in frame theory. *J. Fourier Anal. Appl*, 10, 383–408. DOI: https://doi.org/10.1007/s00041-004-3024-7.

[2] Casazza, P., Kutyniok, G., & Lammers, M.C. (2005). Duality principle, localization of frames, and Gabor theory, Optics and photonics. *International Society for Optics and Photonics*. DOI: https://doi.org/10.1117/12.615440.

[3] Christensen, O., Kim, H.O., & Kim, R.Y. (2011). On the duality principle by Casazza, Kutyniok, and Lammers. *J. Fourier Anal. Appl*, 17, 640–655. DOI: https://doi.org/10.1007/s00041-010-9151-4.

[4] Chuang, Z., & Zhao, J. (2015). On equivalent conditions of two sequences to be R-dual. *Journal of Inequalities and Applications*, 10, 1–8. DOI: https://doi.org/10.1186/s13660-014-0529-8.

[5] Feichtinger, H.G., & Grochenig, K. (1997). Gabor frames and Time-Frequency Analysis of Distributions. *Journal of Functional Analysis*, 146, 464–495. DOI: https://doi.org/10.1006/jfan.1996.3078.

[6] Folland, G.B. (1994). A Course in Abstract Harmonic Analysis. *CRC Press*. DOI: https://doi.org/10.1201/b19172.

[7] Gabor, D. (1946). Theory of communications. *J. Inst. Elec. Eng*, 93, 429–457.

[8] Gröchenig, K. (2001). Foundation of time-frequency analysis. *Birkhäuser, Boston*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0003-1.

[9] Ron, A., & Shen, Z. (1997). Weyl-Heisenberg frames and Riesz bases in $L_2(\mathbb{R})$. *Duke Math. J*, 89, 237–282. DOI: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-97-08913-4.

[10] Stoeva, D.T., & Christensen, O. (2015). On R-duals and the duality principle in Gabor analysis. *J. Fourier Anal. Appl*, 21, 383–400. DOI: https://doi.org/10.1007/s00041-014-9376-8.

[11] Wexler, J., & Raz, S. (1990). Discrete Gabor expansions. *Signal Proc*, 21, 207–220. DOI: https://doi.org/10.1016/0165-1684(90)90087-F.

[12] Xiao, X.M., & Zhu, Y.C. (2009). Duality principle of frames in Banach spaces. *Acta. Math. Sci. Ser. A. Chin*, 29, 94–102.